

УДК 531.312/315

О возможности выбора оптимальной траектории движения частицы на основе принципа наименьшего действия

П. А. Поляков

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Э. В. Сергеев, А. В. Тремаскин

Шуйский государственный педагогический университет, г. Шуя, Россия

М. А. Степович

Калужский государственный педагогический университет им. К. Э. Циолковского, г. Калуга, Россия

Одним из наиболее общих методов выбора траектории движения частицы из набора близких по масштабу пробных траекторий является подход Гамильтона-Лагранжа, а также связанный с ним принцип наименьшего действия (ПНД) [1, 2]. До недавнего времени ПНД часто имел лишь теоретическое значение и практически не использовался для решения прикладных задач. В данной работе идею такого подхода предлагается использовать для решения классической задачи электронной оптики — расчета траектории движения заряженной частицы в заданном силовом поле.

Постановка задачи

Для определения траектории, близкой к оптимальной, предлагается использовать модифицированный принцип наименьшего действия (МПНД), а также модифицированный метод механического подобия и виртуальную теорему. Суть МПНД состоит в том, что исследуется набор виртуальных траекторий с закрепленными "концевыми" точками, одна из которых является базисной, а для отыскания траектории, близкой к оптимальной, вычисляется отношение действий $S_g/\{S'_g\} = S/\{S'\}$, где S — действие на исходной (базисной) траектории; $\{S'\}$ — совокупность действий на траекториях близкого масштаба.

В зависимости от величины этого отношения можно получить ответ на вопрос о поиске траектории, близкой к оптимальной, в потенциальном силовом поле заданной возможности структуры.

Метод решения задачи

Для решения поставленной задачи рассмотрим частицу массы m , которая движется со скоростью \vec{v} по исходной траектории длины l , затрачивая на ее прохождение время t . Запишем функцию Лагранжа L и действие S исследуемой частицы в системе K :

$$L = L(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{m\vec{v}^2}{2} - U(\vec{r}), \quad S = \int_0^t L dt,$$

где \vec{r} — радиус-вектор частицы.

Перейдем из системы K в другие механически подобные ей системы $\{K'\}$, для которых

$$\{L'\} = L(\vec{r}', \vec{v}') = \frac{m'\vec{v}'^2}{2} - U(\vec{r}'), \quad \{S'\} = \int_0^{t'} \{L'\} dt',$$

изменив при этом масштабы длин, масс и времени согласно соотношениям

$$\frac{r'}{r} = \frac{\ell'}{\ell} = \lambda; \quad \frac{m'}{m} = \mu; \quad \frac{t'}{t} = \tau, \quad (1)$$

где λ, μ, τ — безразмерные масштабные коэффициенты.

Возможности перехода из исходной (базисной) системы K , для которой $\lambda = 1, \mu = 1, \tau = 1$, в другие механически подобные системы $\{K'\}$ с увеличенным ($\lambda > 1, \mu > 1, \tau > 1$) либо уменьшенным ($\lambda < 1, \mu < 1, \tau < 1$) масштабами, которым соответствуют геометрически подобные траектории движения, схематично представлены на рис. 1, а.

Согласно теореме о среднем среднее значение функции $f(t)$ определяется выражением

$$\bar{f} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(t) dt. \quad (2)$$

Исходя из (2) действие S в системе K запишется в виде

$$S = \int_0^t L dt = \int_0^t (E_K - U) dt = (\bar{E}_K - \bar{U}) t = \bar{L} t. \quad (3)$$

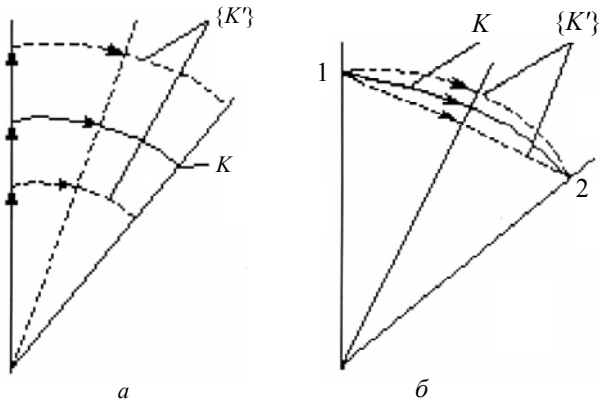


Рис. 1. Схематическое изображение:

a — масштабного преобразования базисной траектории при переходе из системы *K* в другие механически подобные системы $\{K'\}$; *b* — базисной траектории (система *K*) и двух пробных квазиподобных геометрических траекторий близкого масштаба в системах $\{K'\}$ с общими "концевыми" точками 1 и 2

Перейдем к безразмерному отношению действий для двух механически подобных систем *K* и $\{K'\}$, которое, согласно (3) и (1), примет вид

$$S/\{S'\} = \frac{\int_0^t L dt}{\int_0^{t'} \{L'\} dt'} = \frac{t\bar{L}}{t'\{L'\}} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\bar{L}}{\{L'\}} \right) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\bar{E}_K - \bar{U}}{\{L'\}} \right). \quad (4)$$

Исходя из (1) проведем преобразование механического подобия функций Лагранжа $\{L'\}$, т. е.

$$\begin{aligned} \{L'\} &= \frac{m'\bar{v}'^2}{2} - U(\bar{r}') = \frac{m'}{2} \left(\frac{d\bar{r}'}{dt'} \right)^2 - U(\bar{r}') = \\ &= \left(\frac{m\mu}{2} \right) \left(\frac{d(\lambda\bar{r})}{d(\tau t)} \right)^2 - U(\lambda\bar{r}) = \mu \left(\frac{\lambda}{\tau} \right)^2 \frac{m\bar{v}^2}{2} - U(\lambda\bar{r}). \end{aligned} \quad (5)$$

Полагая, что потенциальная энергия является однородной функцией степени *k* относительно своих координат, имеем

$$U(\lambda\bar{r}) = \lambda^k U(\bar{r}). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получим

$$\{L'\} = (E'_K - U') = \mu \left(\frac{\lambda}{\tau} \right)^2 E_K - \lambda^k U,$$

откуда

$$\left\{ \bar{L}' \right\} = \mu \left(\frac{\lambda}{\tau} \right)^2 \bar{E}_K - \lambda^k \bar{U}. \quad (7)$$

Используя (7), отношение действий (4) примет вид

$$S/\{S'\} = \frac{(\bar{E}_K - \bar{U})}{\tau \left(\mu \left(\frac{\lambda}{\tau} \right)^2 \bar{E}_K - \lambda^k \bar{U} \right)}. \quad (8)$$

Пусть движение механической системы происходит в ограниченной области пространства, а потенциальная

энергия есть однородная функция степени *k* относительно своих координат. Тогда на основании вириальной теоремы удвоенная средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной энергии, умноженной на степень ее однородности, т. е.

$$2\bar{E}_K = k\bar{U},$$

откуда

$$\bar{E}_K = \frac{k}{2}\bar{U}, \quad \bar{U} = \frac{2}{k}\bar{E}_K. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), получаем две эквивалентные формы написания (8), т. е.

$$S/\{S'\} = f(\lambda, \mu, \tau; k) = \frac{\left(\frac{k}{2} - 1 \right)}{\tau \left(\mu \frac{k}{2} \left(\frac{\lambda}{\tau} \right)^2 - \lambda^k \right)}; \quad (10)$$

$$S/\{S'\} = f(\lambda, \mu, \tau; k) = \frac{\left(1 - \frac{2}{k} \right)}{\tau \left(\mu \left(\frac{\lambda}{\tau} \right)^2 - \frac{2\lambda^k}{k} \right)}. \quad (11)$$

Действительно, умножая числитель и знаменатель (10) на (2/k), получаем (11), а умножив числитель и знаменатель (11) на (k/2), получаем (10). Поэтому в дальнейшем воспользуемся выражением (10).

Как известно, принцип наименьшего действия (ПНД) Гамильтона-Лагранжа имеет место при выполнении следующих условий:

наличии общих "концевых" пространственно-временных точек для реальной и пробных траекторий движения;

близости пробных траекторий к реальной.

Принимая во внимание и следуя ПНД, что масштабные преобразования не затрагивают изменение времени движения и массы объекта по исследуемому спектру траекторий, с дополнительным учетом 2-го условия из (1) получаем

$$\ell'/\ell = \frac{\ell \pm \Delta\ell}{\ell} = (1 \pm \varepsilon) = \lambda; \quad m'/m = \mu = 1; \quad t'/t = \tau = 1, \quad (12)$$

где

$$\lambda = (1 \pm \varepsilon); \quad \varepsilon = (\Delta\ell / \ell) > 0. \quad (13)$$

В этом случае рис. 1, *a* модифицируется в рис. 1, *b*, в котором схематически отображено движение объекта по двум близким квазиподобным геометрическим траекториям меньшего и большего масштаба относительно базисной траектории с общими "концевыми" пространственно-временными точками 1 и 2.

С учетом (12) и (13) выражение (10) переписывается в виде

$$S/\{S'\} = \frac{(k-2)}{2\left(\frac{k\lambda^2}{2} - \lambda^k\right)} = \frac{(k-2)}{k(1\pm\varepsilon)^2 - 2(1\pm\varepsilon)^k} \approx$$

$$\approx \frac{(k-2)}{k(1\pm 2\varepsilon + \varepsilon^2) - 2(1\pm k\varepsilon)} = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{\left(1 - \frac{2}{k}\right)}} = \frac{1}{1 + \Delta(\varepsilon; k)}.$$

Здесь $\Delta(\varepsilon; k) = \varepsilon^2 / (1 - 2/k)$.

Таким образом, при переходе объекта с базисной траектории на траекторию близкого (большого либо меньшего) масштаба отношение действий определяется соотношением

$$S/\{S'\} = f(\varepsilon; k) = \frac{1}{1 + \Delta(\varepsilon; k)} = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{1 - \frac{2}{k}}}, \quad (14)$$

где S — действие на исходной базисной траектории;

$\{S'\}$ — действия на пробных траекториях близкого масштаба.

Чтобы воспользоваться выражением (14), дополнительно проведем следующее:

1) введем упорядоченный набор траекторий и соответствующий им набор действий таких, что $S_1 < S_2 < \dots < S_n < \dots < S_m$;

2) выберем из этого набора одно из действий, считая его базисным ($S_b = S_n$), и составим отношение этого действия к заданному набору действий.

Тогда с учетом (14) возможны следующие три случая:

$$\bullet \frac{S_n}{(S_1, \dots, S_{n-1})} > 1; \quad S/\{S'\} = f(\varepsilon; k=+1) = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} > 1; \quad (15)$$

$$\bullet \frac{S_n}{(S_{n+1}, \dots, S_m)} < 1; \quad S/\{S'\} = f(\varepsilon; k=-1) = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{3}} \leq 1; \quad (16)$$

$$\bullet \frac{S_n}{S'} = 1; \quad S/\{S'\} = f(\varepsilon > 0; k = 2) = 1. \quad (17)$$

В первом случае $S_n > (S_1, \dots, S_{n-1})$ и поэтому поиск оптимальной траектории, которой соответствует минимальное действие из заданного набора, возможен.

Во втором случае $S_n < (S_{n+1}, \dots, S_m)$, и поиск оптимальной траектории на заданном наборе действий невозможен, ибо любое из этих действий больше базисного.

Третий случай соответствует граничному условию, отделяющему первый случай от второго, и это условие можно считать началом отсчета для отношения этих действий.

Результаты рассмотрения модельных задач

Перейдем к анализу результатов исходя из выражений (14)—(17) на примерах исследования движения

заряженных частиц в произвольных потенциальных силовых электрических полях. При этом

$$dU = -\vec{F}d\vec{r} = -e\vec{E}d\vec{r}. \quad (18)$$

Пример 1. Рассмотрим движение электрона в однородном электростатическом поле. Используя (18), имеем

$$U(r) = -\int e\vec{E}d\vec{r} + U_0 = -e\vec{E}\vec{r} + U_0 = -eEr \cos\alpha + U_0. \quad (19)$$

Из (19) с учетом (6) имеем степень однородности потенциальной энергии, равную единице ($k = 1$), тогда из (19) следует, что при $\alpha = 0^\circ$ движение электрона будет равнозамедленным, а при $\alpha = 180^\circ$ — равноускоренным. В обоих случаях оптимальной является линейная траектория движения (рис. 2, а). Если же $0 < \alpha < 180^\circ$, то движение электрона происходит по параболической траектории.

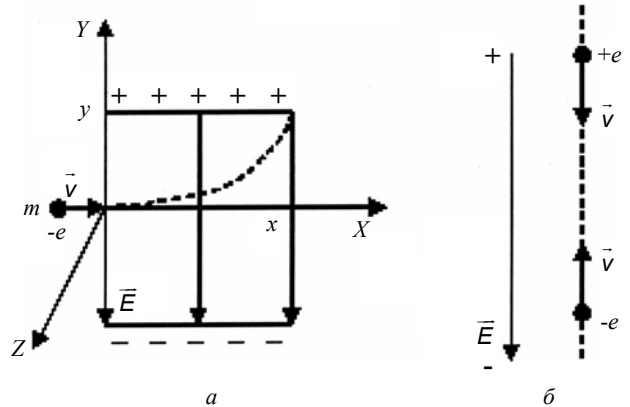


Рис. 2. Движение электрона в однородном электро-статическом поле перпендикулярно (а) и вдоль (б) линий напряженности

Это легко показать для $\alpha = 90^\circ$. Так как

$$\frac{m d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e\vec{E}, \quad (20)$$

то, проецируя уравнение (20) на ось Y (см. рис. 2, б), имеем

$$\begin{cases} m \frac{d^2 y}{dt^2} = eE; \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0; \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0, \end{cases} \quad (21)$$

где $E_x = 0; E_z = 0; E_y = -E; r_x = x; r_z = z; r_y = y$.

Так как $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2} v^2$, то из (21) получаем $\frac{d^2y}{dx^2} v^2 = \frac{eE}{m}$, откуда после двукратного интегрирования имеем $y(x) = \frac{eE}{mv^2} \frac{x^2}{2} = Ax^2$.

Таким образом, поиск оптимальной траектории в однородном электрическом поле с позиций принципа наименьшего действия возможен, а структура оптимальной траектории определяется условием задачи. Этот пример соответствует первому случаю — см. (15), — в котором $k=1$.

Пример 2. Рассмотрим движение электрона $-e$ в центральном силовом поле кулоновских сил, созданном зарядом $+e$ (кеплерова задача) (рис. 3). Так как $dU = -\vec{F}d\vec{r} = -Fdr \cos 0^\circ = -Fdr$, то $\vec{F} = \frac{(+e)(-e)}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$, и согласно (18)

$$U(r) = -\int \frac{(-e)(+e)}{r^2} dr + A = e^2 \int \frac{dr}{r^2} + A = -\frac{e^2}{r} + A = -\frac{e^2}{r},$$

где $U(r \rightarrow \infty) = 0 = A$, откуда согласно (6) степень однородности потенциальной энергии в поле кулоновских сил равна минус единице ($k = -1$). Это соответствует условию (16), согласно которому выбор оптимальной траектории с позиций ПНД в центральном силовом поле невозможен.

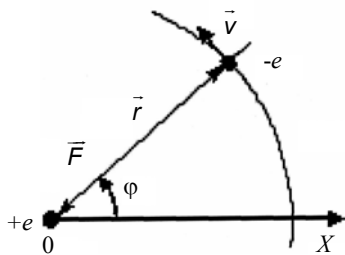


Рис. 3. Движение электрона в центральном силовом поле

Хорошо известно, что движение в поле центральной силы приводит к одному из следующих двух режимов движения:

- по эллиптической либо круговой траектории при $E = \left(\frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{r}\right) < 0$;
- по гиперболической или параболической траектории при $E \geq 0$.

В первом случае нарушается первое условие применимости ПНД, так как начальная и конечная пространственные точки совпадают, а во втором случае нарушается условие применимости вириальной теоремы, которая работает в ограниченной области пространства.

Заметим, что круговую траекторию движения можно легко обосновать, если учесть, что заряд $(-e)$ будет обладать лишь нормальным ускорением ($a_n = v^2/r$) и тогда

$$(-e)\vec{E} = m \frac{v^2}{r} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right), \quad (22)$$

откуда, возводя в квадрат левую и правую части (22) и учитывая, что $r^2 = x^2 + y^2$, получим

$$x^2 + y^2 = \frac{m^2 v^4}{e^2 E^2} = R^2.$$

Пример 3. Рассмотрим поле квазиупругих электростатических сил или модель упруго-связанного электрона (модель атома Томсона).

Пусть заряд $+e$ равномерно распределен в сфере радиуса a с плотностью $\rho = \frac{+e}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ (рис. 4). Если электрон уклоняется от центра атома на расстояние $r \leq a$, то на него действует электрическая сила со стороны положительного электрического заряда q_e , распределенного внутри сферы радиуса r , и не действует электрический заряд, распределенный в сферическом слое $(a - r)$.

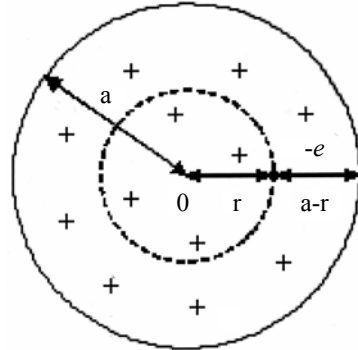


Рис. 4. Модель упругосвязанного электрона (модель атома Томсона)

Так как

$$q_e = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{er^3}{a^3},$$

то

$$\vec{F} = \frac{q_e(-e)}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{e(-e)}{a^3} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\frac{e^2}{a^3} r \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\kappa^* r \left(\frac{\vec{r}}{r}\right), \quad (23)$$

где $\kappa^* = \frac{e^2}{a^3} = m\omega^2$.

Используя (18) и (23), получаем

$$dU = -\kappa^* r \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) d\vec{r} = -\kappa^* r d\vec{r},$$

откуда

$$U(r) = -\kappa^* \int_0^r r dr = -\kappa^* \frac{r^2}{2}. \quad (24)$$

Из (24), согласно (6), степень однородности потенциальной энергии в модели упругосвязанного электрона равна двум ($k = 2$). Этот результат соответствует условию (17).

Таким образом, в поле упругих либо квазиупругих сил отсутствует выбор оптимальной траектории в силу предопределенности гармонического движения объекта под влиянием этих сил, а гармонические движения являются тем эталоном, относительно которого можно исследовать меру энгармонизма всех прочих движений. В нашем случае движение электрона также будет происходить по гармоническому закону. Действительно, так как

$$F = m \frac{d^2 r}{dt^2},$$

где $r(t) = A \sin \omega t$, то $\frac{d^2 r}{dt^2} = -A \omega^2 \sin \omega t$, откуда с учетом (23) получим

$$F = -m \omega^2 r = -\kappa^* r,$$

где κ^* — коэффициент упругости.

Заключение

Использование разработанной на основе модифицированного принципа наименьшего действия методики расчета траекторий движения заряженных частиц позволяет прогнозировать возможности поиска оптимальной траектории из набора пробных квазиподобных траекторий с выделением гармонических движений как эталонных.

Л и т е р а т у р а

1. Беленький И. М. Введение в аналитическую механику. — М.: Высш. шк., 1964.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Наука, 1965.

Статья поступила в редакцию 22 декабря 2005 г.

About the choice possibility of the optimal motion trajectory of the particle on the basis of the least action principle

P. A. Poljakov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E. V. Sergeev, A. V. Tremaskin

Shuya State Pedagogical University, Shuya, Ivanovo District, Russia

M. A. Stepovich

Tsiolkovsky Kaluga State Pedagogical University, Kaluga, Russia

One of the most common methods of a choice of a movement trajectory of a particle from a set of trial short on scale is the approach of Hamilton—Lagrange, and also the principle of least action (PLA) connected to it. [1, 2]. Up to now PLA frequently had only theoretical value and practically it was not used for the solution of applied problems. A classical problem of electron optics is calculation of a mechanical trajectory of a charged particle in the given force field. In this work the PLA is used for the solution of this problem.