

УДК 53.092

## Уменьшение гидродинамического сопротивления при стохастическом воздействии на поток

О. Н. Журавлев, Д. А. Коротеев, К. И. Попов

Исследовательский центр Технологической компании "Шлюмберге", Москва, Россия

*Теоретически исследовано влияние стохастического возмущения параметров потока жидкости на интегральные характеристики течения в плоском канале. Показано, что наложение внешних флуктуаций скорости и давления приводит к снижению гидродинамического сопротивления. Величина уменьшения сопротивления пропорциональна инертивности источника стохастических возмущений.*

Понижение гидродинамического сопротивления является важной задачей для многих областей науки и техники, начиная от нефтяной промышленности и заканчивая исследованиями потоков вещества в наноструктурных трубках. Известные методы воздействия на гидродинамическое сопротивление сводятся к понижению вязкости жидкостей за счет нагревания или специальному профилированию каналов течения (обтекаемых тел). Помимо непосредственного нагрева используется ультразвуковое воздействие, которое в итоге также приводит к повышению температуры облучаемой жидкости при релаксации энергии упругих колебаний. В рассматриваемой работе предлагается физический механизм воздействия на эффективную вязкость потока жидкости посредством возбуждения стохастических флуктуаций параметров потока.

Известно [1], что при турбулизации потока ньютоновой жидкости в трубе часть поступательной энергии передается флуктуационным движением элементов жидкости. Следствием этого является уменьшение средней скорости потока при постоянном перепаде давления между входным и выходным сечениями трубы. Простое физическое описание этого явления впервые предложено Рейнольдсом в 1894 г. [2].

Современные методы описания турбулентности активно используют аппарат статистической физики. В частности, в работах [3—5] для описания полей флуктуирующих величин используется техника стохастических дифференциальных уравнений и кинетических уравнений типа уравнения Фоккера-Планка.

Данная работа посвящена анализу возможности реализации механизма, обратного турбулентности, т. е. рассматривается возможность передачи энергии из флуктуационных степеней свободы физически малых объемов жидкости в направленное движение.

### Физическое описание

Для простоты физического описания рассмотрим модельную задачу о течении вязкой несжи-

маемой жидкости с плотностью  $\rho$  и вязкостью  $\eta$  в плоском канале (рис. 1) под действием стационарного перепада давления  $\Delta p$ . В начальный момент времени  $t = 0$  на поток накладываются возмущения за счет вибрации верхней стенки канала. Упрощая дальнейшее рассмотрение, положим максимальную амплитуду вибрации стенки много меньшей толщины канала  $l_y$  и будем рассматривать только стохастические возмущения скорости потока  $\delta v_y = \delta u$ , исходящие от верхней стенки. Другими словами, с точки зрения гидродинамики в данной постановке на верхней стенке канала реализуется "вдув-отсос", и при этом не нарушаются условия прилипания по  $x$ -компоненте скорости потока  $v_x$ . При дальнейшем рассмотрении будем считать флуктуации  $y$ -составляющей при  $y = l_y$  гауссовым шумом:

$$\langle \delta u(t) \delta u(t + \tau) \rangle = \mu \delta(\tau), \quad \langle \delta p(t) \rangle = 0. \quad (1)$$



Рис. 1. Геометрия канала течения

Для  $x$ -составляющей скорости уравнение Навье-Стокса записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \zeta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение непрерывности в данном случае выглядит так:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим окрестность центральной точки канала ( $l_x/2, l_y/2$ ). Обозначая в этой области  $v_x=v$ , учитывая (2), (3) и полагая  $l_x \gg l_y$ , аппроксимируем значения пространственных производных конечно-разностным методом:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \approx -\frac{v_y|_{y=l_y} - v_y|_{y=0}}{l_y} = -\frac{\delta u - 0}{l_y} = -\frac{\delta u}{l_y}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\frac{1}{2}l_y} \left( \frac{v_x|_{y=l_y} - v}{\frac{1}{2}l_y} - \frac{v - v_x|_{y=0}}{\frac{1}{2}l_y} \right) = \frac{0 + 0 - 2v}{\frac{1}{4}l_y^2} \approx \frac{-8v}{l_y^2}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx -\frac{\Delta p}{l_x}. \quad (8)$$

Таким образом, из (2), (4)–(8) можно получить уравнение для скорости в центральной точке канала

$$\dot{v} = \frac{\Delta p}{\rho l_x} - \frac{8\eta}{\rho l_y^2} v + \frac{v \delta u}{l_y}. \quad (9)$$

Уравнение (9) представляет собой стохастическое дифференциальное уравнение с флуктуирующим членом  $\delta u$ , имеющим функцию распределения гауссовского вида. Уравнения такого вида также называют уравнениями Ланжевена. Согласно теории стохастических уравнений [6, 7], такому уравнению соответствует кинетическое уравнение Фоккера-Планка, решением которого является функция распределения  $f(v, t)$ . В рассматриваемом случае это функция распределения по скоростям в центральной точке канала.

Если уравнение Ланжевена записано в виде  $\dot{v} = F(v) + G(v)\delta u(t)$ , где  $\delta u$  — флуктуирующая величина с гауссовым распределением, то соответствующее уравнение Фоккера-Планка представляется следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v}(Af) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2}(Bf), \quad (10)$$

где  $A = F + \frac{1}{2}G \frac{\partial G}{\partial v} \mu$ ,  $B = G^2 \mu$ .

В рассматриваемом случае

$$F = \frac{\Delta p}{\rho l_x} - \frac{8\eta}{\rho l_y^2} v, \quad G = \frac{v}{l_y}.$$

Уравнение (10) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \theta v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + (2\theta - r)v - c \frac{\partial f}{\partial v} + \theta - r f, \quad (11)$$

где

$$r = \frac{\mu}{2l_y^2} - \frac{8\eta}{\rho l_y^2}; \quad c = \frac{\Delta p}{\rho l_x}; \quad \theta = \frac{\mu}{l_y^2}.$$

Уравнение (11) позволяет вычислить среднюю скорость  $\langle v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(v, t) v dv$ , зная свойства функции распределения при  $v \rightarrow \pm\infty$ . Умножая (11) на  $v$  и интегрируя по  $dv$  в бесконечных пределах (см. Приложение), получим уравнение для средней скорости:

$$\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial t} = r \langle v \rangle + c. \quad (12)$$

Решение (12) с начальным условием  $\langle v \rangle|_{t=0} = v_0$  можно записать в виде

$$v(t) = \left( v_0 + \frac{c}{r} \right) \exp(rt) - \frac{c}{r}.$$

Здесь и далее знак усреднения опускается. В стационарном режиме средняя скорость

$$v_{st} = \frac{\Delta p l_y^2}{l_x (8\eta - \mu \rho / 2)}. \quad (13)$$

Время релаксации к стационару

$$\tau = \frac{8\eta}{\rho l_y^2} - \frac{\mu}{2l_y^2}.$$

Выражение (13) описывает течение Пуазейля в плоском канале с уменьшенной эффективной вязкостью:

$$\eta_{eff} = \eta - \frac{\mu \rho}{16}.$$

Отклонение численного коэффициента в соотношении (13) от точного решения для течения Пуазейля в плоском канале обусловлено конечно-разностной аппроксимацией пространственных производных.

Согласно определению (1), для оценки интенсивности стохастического воздействия при приме-

нении реальных генераторов шума можно использовать формулу

$$\mu \approx \frac{\langle \delta u^2 \rangle}{\Delta\omega} \approx \frac{2E_V}{\rho\Delta\omega},$$

где  $E_V$  — объемная плотность энергии генератора;

$\Delta\omega$  — диапазон частот (ширина шумового спектра).

Так как в приложениях реализация подобных возмущений возможна только при вибрациях верхней стенки канала, то существенным ограничением описанного подхода является условие малости амплитуды колебаний стенки  $\delta l_y < l_y$ :

$$\delta l_y \sim \tau_v \delta u \sim \frac{\sqrt{\mu\Delta\omega}}{\Delta\omega} \rightarrow \mu < l_y^2 \Delta\omega, \quad (14)$$

где  $\tau_v$  — среднее время пульсаций  $\delta u$ .

Рассмотренная задача при условии (14) имеет точное решение, описывающее линейное уменьшение гидродинамического сопротивления канала с ростом интенсивности искусственно созданных флуктуаций поперечной компоненты скорости. Однако с прикладной точки зрения легче создавать пульсации давления. Задача о возбуждении потока в плоском канале при наложении внешних флуктуаций на продольный градиент давления также рассмотрена. В этом случае стенки канала неподвижны, а перепад давления складывается из постоянной составляющей  $\Delta p$  и флуктуирующей части  $\delta p$ , которая также, как и в предыдущем случае, рассматривается как гауссова случайная величина

$$\langle \delta p(t)\delta p(t+\tau) \rangle = \mu_p \delta(\tau), \quad \langle \delta p(t) \rangle = 0.$$

В данном случае применяется та же вычислительная техника, как и в предыдущем, с единственным отличием. Для выявления эффекта при одномерных возбуждениях потока необходимо рассматривать приближение слабосжимаемой жидкости, так как в противном случае уравнение Ланжевена линейно по возмущениям давления, что приводит лишь к изменению вида функции распределения, а средняя скорость потока остается равной скорости в невозмущенном случае. Учет сжимаемости приводит к следующим уравнениям Ланжевена и Фоккера–Планка:

$$\dot{v} = \frac{\alpha\Delta p}{l_x} v^2 - \frac{8\eta}{\rho l_y^2} v - \frac{\Delta p}{\rho l_x} + \left( \frac{\alpha}{l_x} v^2 - \frac{1}{\rho l_x} \right) \delta p;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & \left\{ \frac{\chi}{2} v^4 - \xi v^2 + \gamma \right\} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \\ & + 3\chi v^3 - av^2 + (b - 3\xi)v + c \frac{\partial f}{\partial v} + \\ & + 3\chi v^2 - 2av + b - \xi f. \end{aligned} \quad (15)$$

В (15) введены обозначения:  $\chi = \mu_p (\alpha/l_x)^2$ ,  $\xi = \mu_p \alpha / (\rho l_x^2)$ ,  $\gamma = 0,5\mu_p / (\rho l_x^2)$ ,  $a = \alpha\Delta p/l_x$ ,  $b = 8\eta/\rho l_y^2$ ,  $\alpha$  — сжимаемость жидкости. Использование разложения стационарного решения уравнения (15) по малому параметру (сжимаемости) позволяет вычислить первую поправку к средней скорости в центральной точке канала:

$$v_{st} \approx \frac{|\Delta p| l_y^2}{8\eta l_x} + \frac{43}{256} \frac{\alpha \mu_p l_y^4 |\Delta p|}{l_x^3 \eta^2}. \quad (16)$$

Выражение (16) описывает линейный рост средней скорости течения в центральной точке канала с ростом интенсивности шумового воздействия  $\mu_p$ .

### Обсуждение результатов

В работе на основе методов статистической физики проанализирована возможность применения стохастического возмущения параметров потока жидкости для уменьшения гидродинамического сопротивления канала. Показано, что с увеличением интенсивности вносимых “из вне” флуктуаций поперечной скорости и продольного градиента давления растет средняя скорость потока (выражения (13) и (16)) при постоянной средней величине перепада давления. С инженерно-прикладной точки зрения это может трактоваться как уменьшение гидродинамического сопротивления канала или понижение эффективной вязкости жидкости.

На рис. 2 приведены функции распределения по скорости в центральной точке канала при различных интенсивностях шумового воздействия. Рис. 3 иллюстрирует уменьшение эффективной вязкости с ростом средней амплитуды воздействия.

Полученные результаты могут иметь практическое применение прежде всего в тех случаях, когда невыгодно (не представляется возможным) увеличивать стационарный перепад давления в гидросистеме, а также когда применение тепловых методов понижения вязкости неэффективно или затруднено. В частности, воздействие шумовым акустическим сигналом может проводиться при низкой естественной депрессии в нефтедобывающих скважинах для увеличения дебита жидкости.

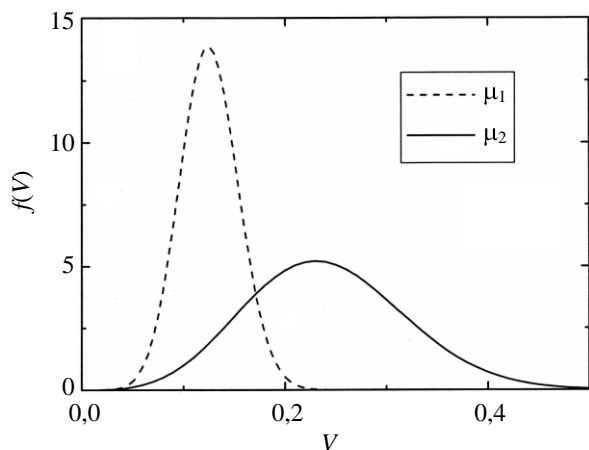


Рис. 2. Функции распределения по скорости в центральной точке канала при различных интенсивностях шумового воздействия ( $\mu_2 > \mu_1$ )

Оценки, проведенные с использованием полученных результатов, показывают, что при воздействии источником шумового акустического сигнала в слышимом диапазоне частот на нефтедобывающий пласт толщиной 1 м можно ожидать увеличения дебита скважины на 1—20 % при мощности источника 1 кВт. Результат зависит от вязкости и сжимаемости жидкости, а также от пористости пласта.

**Приложение**

Интегрирование функции распределения  $f(v)$  и ее производных с различными весами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^3 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} dv = v^3 \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{-\infty}^{\infty} - 3 \int_{-\infty}^{\infty} v^2 \frac{\partial f}{\partial v} dv =$$

$$= v^2 f \Big|_{-\infty}^{\infty} + 6 \int_{-\infty}^{\infty} v f dv = 6 \langle v \rangle;$$

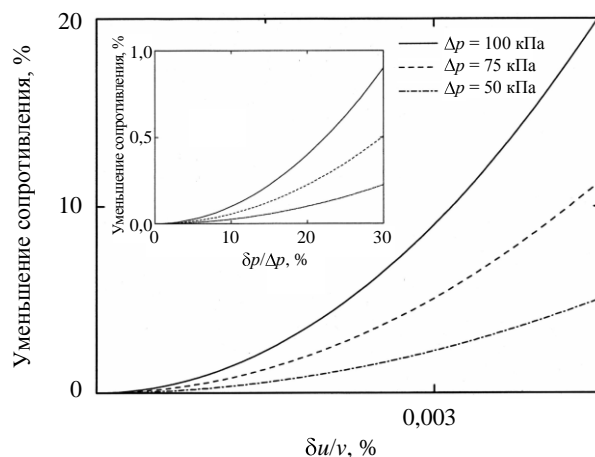


Рис. 3. Зависимость эффективной вязкости от среднеквадратичного значения амплитуды воздействия

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2 \frac{\partial f}{\partial v} dv = v^2 f \Big|_{-\infty}^{\infty} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} v f dv = -2 \langle v \rangle;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v \frac{\partial f}{\partial v} dv = v f \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f dv = -1.$$

**Литература**

1. Лойцанский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1970.
2. Reynolds// Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1894. № 186. P. 123.
3. Климонтович Ю. Л. Турбулентное движение и структура хаоса. — М.: Наука, 1990.
4. Marcq P., Naert A.// Phys. Fluids 2001. V. 13. № 9. P. 2590.
5. Friedrich R., Peinke J.// Phys. Rev. Lett. 1997. № 78. P. 863.
6. Brown W. F.// Phys. Rev. 1963. V. 130. № 5. P. 1677.
7. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.

Статья поступила в редакцию 31 августа 2007 г.

**Hydrodynamic resistance reducing by stochastic impact**

O. N. Zhuravlev, D. A. Koroteev, K. I. Popov

Technology Company Schlumberger. Research Center, Moscow, Russia

*The influence of stochastic perturbations of liquid flow parameters on integral characteristics of flux is investigated theoretically. It is shown that external fluctuations in velocity and pressure field lead to hydrodynamic resistance decrease. The magnitude of resistance decrease is proportional to the intensity of stochastic fluctuations field.*

\*\*\*