

УДК 537.312.62

Равновесие и устойчивость в изолированной системе двух короткозамкнутых сверхпроводящих контуров

В. А. Шувалов

ФГУП "ЦНИИмаш", г. Королев, Московская обл., Россия

Рассмотрены особенности электромагнитного взаимодействия короткозамкнутых сверхпроводящих контуров с током. Показано, что в изолированной системе из двух таких объектов наблюдаются положения равновесия, которые отсутствуют в подобной системе из традиционных электромагнитов. Анализ энергии взаимодействия сверхпроводящих контуров позволяет получить условия устойчивости равновесного состояния такой системы при конечном и не равном нулю расстоянии между контурами.

PACS: 85.25.-j

Введение

Важным свойством сверхпроводящего состояния вещества является полное отсутствие омического сопротивления электрическому току. Этот факт приводит к важному следствию, связанному с появлением нового технического объекта в электромеханике – короткозамкнутого электрического контура. Поскольку сопротивление в сверхпроводнике равно нулю, ток в таком замкнутом контуре может циркулировать сколь угодно долго без источника [1]. В традиционной теоретической электромеханике замкнутый контур с током является некоторой абстракцией, удобной при рассмотрении вопросов силового взаимодействия электрических токов [2]. Строго говоря, такая аппроксимация не является эквивалентной, так как традиционный электрический замкнутый контур может функционировать как автономный электромеханический объект только при наличии источника питания, в противном случае омическое сопротивление приведет к затуханию тока. Сверхпроводимость позволила абстрактную идею короткозамкнутого электрического контура превратить в реально функционирующий объект. Технической предпосылкой такой реализации является одно из основных свойств сверхпроводников — равенство нулю омического сопротивления току, т. е. контур становится идеально проводящим (или просто идеальным). При этом полный магнитный поток, связанный с таким контуром, будет сохраняться постоянным (закон сохранения магнитного потока [3]). Это свойство приводит к некоторым особенностям электромеханического взаимодействия сверхпроводящих контуров с током, а именно, возникновению множества состояний равновесия, причем некоторые из которых будут устойчивыми. На примере изолированной системы из двух таких сверхпроводящих объектов в работе опреде-

ляются состояния равновесия и устойчивость этих состояний.

Особенности электромеханического взаимодействия в системе двух сверхпроводящих электрических контуров

Полный поток представляет собой суперпозицию собственного магнитного потока Φ_K , который создается током I_K идеального контура и потоком внешнего поля Φ_B через этот контур, т. е. имеет место равенство

$$\Phi_K + \Phi_B = \text{const.} \quad (1)$$

Перемещение такого электромеханического объекта во внешнем магнитном поле связано с изменением потока Φ_B этого поля через площадь, охватываемую идеальным контуром. При этом полный магнитный поток, в силу (1), будет сохраняться постоянным, т. е. должен измениться собственный поток Φ_K и связанный с ним ток I_K в идеальном контуре, а следовательно и сила взаимодействия тока с внешним полем.

Рассмотрим качественную картину электромеханического взаимодействия двух идеальных колец с током, расположенных на одной оси (рисунок). Пусть токи в кольцах имеют одинаковое направление. Тогда сила магнитного взаимодействия будет сближать кольца, и, следовательно, энергия взаимодействия будет уменьшаться. Известно, что магнитная энергия двух обычных магнитов имеет наименьшее значение, когда расстояние между ними равно нулю (состояние равновесия). В нашем случае энергия взаимодействия будет иметь экстремум, т. е. состояние равновесия при конечном и не равном нулю расстоянии между идеальными кольцами.

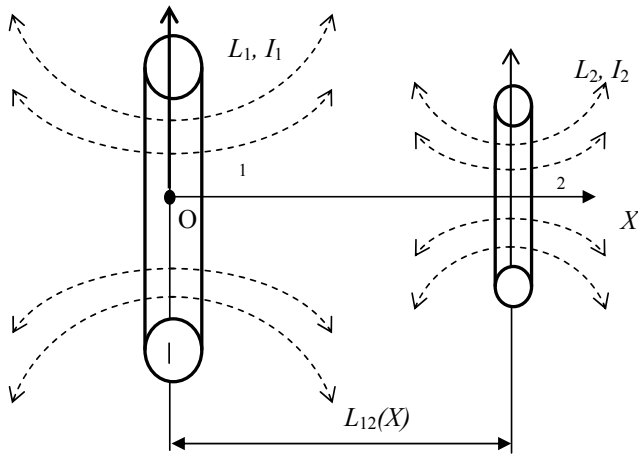


Схема взаимодействия двух идеальных контуров

Далее покажем, что для одномерного случая (см. рисунок) экстремум будет соответствовать минимальному значению магнитной энергии. Однако в пространстве обобщенных координат наблюдается множество равновесных состояний системы, образующих замкнутую поверхность. Причем, каждая точка этой поверхности характеризуется некоторой функциональной зависимостью, имеющей одинаковое (для всех точек поверхности) численное значение, зависящее от параметров электромеханической системы. Такой многомерной функцией рассматриваемой системы идеальных контуров является взаимная индуктивность. Будем считать ее обобщенным параметром, который в нашей постановке соответствует независимому аргументу.

Таким образом, при единственном значении указанного параметра формируется область равновесных состояний. Покажем, что она является устойчивой. Запишем магнитную энергию взаимодействия контуров в виде [1]

$$W = \frac{1}{2} (L_1 I_1^2 + 2L_{12} I_1 I_2 + L_2 I_2^2), \quad (2)$$

где I_1, I_2 — полные токи в контурах;

L_1, L_2 — индуктивности контуров;

L_{12} — взаимная индуктивность (в нашем случае это независимый обобщенный параметр или независимый аргумент в выражении (2)).

В соответствии с постановкой задачи функция (2) отражает энергию изолированной системы двух идеальных замкнутых контуров. Следовательно, изменения токов обусловлены только механическими изменениями относительных координат (или обобщенного параметра L_{12}). Запишем закон сохранения полного магнитного потока в каждом контуре

$$\begin{aligned} L_1 I_1 + L_{12} I_2 &= \Phi_1 = \text{const}_1; \\ L_{12} I_1 + L_2 I_2 &= \Phi_2 = \text{const}_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где Φ_1, Φ_2 — полные начальные магнитные потоки, проходящие через каждый контур.

Магнитную энергию (2) с учетом соотношений (3) можно записать в следующей форме:

$$W = \frac{1}{2} (\Phi_1 I_1 + \Phi_2 I_2). \quad (4)$$

В полученной функции энергии идеальных контуров независимым обобщенным параметром в неявном виде является взаимная индуктивность L_{12} , которая сама зависит от геометрии контуров и относительного расположения их. В нашем случае одномерного расположения колец на оси x (см. рисунок) обобщенный параметр будет зависеть от расстояния x и размеров контуров. Решив систему (3), получим функциональные зависимости полных токов от независимого параметра

$$\begin{aligned} I_1 &= (\Phi_1 L_2 - \Phi_2 L_{12}) / (L_1 L_2 - L_{12}^2); \\ I_2 &= (\Phi_2 L_1 - \Phi_1 L_{12}) / (L_1 L_2 - L_{12}^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Определим положения равновесия системы двух идеальных контуров L_{120} , соответствующее экстремуму магнитной энергии. Для этого возьмем первую производную от функции (2) по обобщенному параметру L_{12} и после некоторых преобразований с учетом (3) получим

$$\partial W / \partial L_{12} = \Phi_1 \partial I_1 / \partial L_{12} + \Phi_2 \partial I_2 / \partial L_{12} + I_1 I_2. \quad (6)$$

Но поскольку первые два члена этого выражения представляют собой удвоенную производную выражения (4), можно записать (6) в виде

$$\partial W / \partial L_{12} = -I_1 I_2. \quad (7)$$

Равенство нулю этого выражения определяет положение равновесия, которое, учитывая выражения для токов (5), имеет место при следующих соотношениях:

$$L_{120}^{(1)} = \Phi_1 L_1 / \Phi_2; \quad (8,а)$$

$$L_{120}^{(2)} = \Phi_2 L_1 / \Phi_1. \quad (8,б)$$

В первом случае $I_1 = 0$, а во втором $I_2 = 0$. Следовательно, сила взаимодействия контуров равна нулю в том случае, когда полный ток хотя бы одного из них равен нулю. Из выражений (8,а), (8,б) следует, что обобщенный параметр L_{120} , а следовательно и расстояние x_0 , на котором оба контура находятся в равновесии, зависит от геометрических (L_1, L_2) и магнитных (Φ_1, Φ_2) параметров идеальных контуров и является конечной величиной. Необходимо подчеркнуть, что в нашей одномерной постановке наблюдается единственное положение равновесия x_0 (соответствующее заданным значениям L_1, L_2, Φ_1, Φ_2). Две зависимости (8,а) и

(8,б) получены в связи с неопределенностью начала координат, которое может быть связано либо с первым контуром (8,а), либо со вторым (8,б).

Покажем далее, что равновесные состояния (8) являются устойчивыми, так как соответствуют минимальной энергии взаимодействия идеальных контуров. Для этого возьмем вторую производную от W , которую получим путем дифференцирования соотношения (7) по обобщенному параметру

$$\partial^2 W / \partial L_{12}^2 = - \left(I_1 \frac{\partial I_2}{\partial L_{12}} + I_2 \frac{\partial I_1}{\partial L_{12}} \right). \quad (9)$$

Вычислим производные от токов, продифференцировав систему (3) по обобщенному параметру и приведя ее к следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial L_{12}} &= - \frac{L_{12}}{L_1} \frac{\partial L_2}{\partial L_{12}} - \frac{I_2}{L_1}, \\ \frac{\partial I_2}{\partial L_{12}} &= - \frac{L_{12}}{L_2} \frac{\partial L_1}{\partial L_{12}} - \frac{I_1}{L_2}. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом этих соотношений вторая производная от магнитной энергии (9) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial L_{12}^2} &= \left(\frac{I_1^2}{L_2} + \frac{I_2^2}{L_1} \right) + \\ &+ \frac{L_{12}}{L_1 L_2} \left(I_1 L_1 \frac{\partial I_1}{\partial L_{12}} + I_2 L_2 \frac{\partial I_2}{\partial L_{12}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Второй член в скобках выражения (11) можно преобразовать с помощью (10) следующим образом:

$$\begin{aligned} &\left(I_1 L_1 \frac{\partial I_1}{\partial L_{12}} + I_2 L_2 \frac{\partial I_2}{\partial L_{12}} \right) = \\ &= -2I_1 I_2 - \left(I_1 L_{12} \frac{\partial I_2}{\partial L_{12}} + I_2 L_{12} \frac{\partial I_1}{\partial L_{12}} \right). \end{aligned}$$

Тогда выражение (10) с учетом (7) преобразуем так

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial L_{12}^2} &= \left(\frac{I_1^2}{L_2} + \frac{I_2^2}{L_1} \right) + \frac{2L_{12}}{L_1 L_2} \frac{\partial W}{\partial L_{12}} - \\ &- \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2} \left(I_1 \frac{\partial I_2}{\partial L_{12}} + I_2 \frac{\partial I_1}{\partial L_{12}} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Но последний член этого соотношения в скобках — это вторая производная от величины энергии контуров, т. е. выражение (9). Следовательно (12) после группировки можно представить в виде

$$\left(1 + \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial L_{12}^2} = \left(\frac{I_1^2}{L_2} + \frac{I_2^2}{L_1} \right) + 2 \frac{L_{12}}{L_1 L_2} \frac{\partial W}{\partial L_{12}}.$$

Очевидно, что в положении равновесия, когда первая производная равна нулю, вторая производная положительна (поскольку $(1 + L_{12}^2 / L_1 L_2) > 0$). Таким образом, положение равновесия (8) двух идеальных контуров по отношению к обобщенному параметру L_{12} является устойчивым

$$\left. \frac{\partial^2 W}{\partial L_{12}^2} \right|_{\partial W / \partial L_{12} = 0} > 0.$$

Положение устойчивого равновесия (8) в системе двух идеальных контуров с одним независимым обобщенным параметром L_{12} является единственным при заданных магнитных и геометрических характеристиках контуров. В рассмотренном одномерном случае, когда L_{12} является функцией только координаты x , устойчивость равновесия очевидна. Но в пространственной системе обобщенных координат, характеризующих контур как твердое тело, обобщенный параметр является функцией многих переменных (т. е. этих координат). Численное значение обобщенного параметра соответствует некоторой поверхности в пространственной системе, каждая точка которой соответствует равновесному состоянию. Таким образом, единственное устойчивое состояние равновесия в изолированной системе двух идеальных контуров будет наблюдаться при фиксации всех степеней свободы, кроме одной.

Заключение

- Рассмотрены особенности силового взаимодействия сверхпроводящих короткозамкнутых контуров с током, связанные с возникновением новых типов равновесных состояний электромеханической системы и не свойственных для системы традиционных электромагнитных контуров (т.е. контуров с омическим сопротивлением).

- Получены условия устойчивости равновесия в изолированной системе двух сверхпроводящих контуров при конечном и не равном нулю расстоянии между ними.

- Разработанный методический подход исследования устойчивости равновесного состояния электромеханической системы двух сверхпроводящих электрических контуров можно распространить на систему произвольного числа таких объектов.

Л и т е р а т у р а

1. Буккель В. Сверхпроводимость. Основы и приложения. — М.: Мир, 1975. — 366 с.

2. Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1989. — 504 с.

3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Электричество. — М.: Наука, 1983. — 687 с.

Статья поступила в редакцию 14 августа 2008 г.

Equilibrium and stability of detached system of two short-circuited superconductive loop

V. A. Shuvalov

FGUP "Tsnimash", Korolev, Moscow Region, Russia

Features of electromagnetic interaction of the short-circuited superconductive loops with current are under consideration. The paper shows that a detached system made of two objects of this type demonstrates the equilibrium which is not intrinsic to a similar system made of traditional electromagnets. Analysis of the superconductive loop interaction energy enables to acquire the stability conditions of equilibrium of such system at finite and nonzero distance between the loops.

PACS: 85.25.-j

* * *