

УДК 533.537

Формирование торцов плотных электронных пучков, бриллюэновские "баранки" и сферы

В. А. Сыровой

Всероссийский электротехнический институт им. В. И. Ленина, Москва, Россия

Дано точное решение задачи формирования торцевой области плотных электронных пучков в виде цилиндров конечной длины, усеченных конусов, цилиндрических и конических колец, а также сплошных и полых тороидов и сфер, выделенных из потоков бриллюэновского типа с единственной отличной от нуля азимутальной компонентой скорости.

PACS: 41.85.-p

Введение

В качестве объектов исследования рассмотрены цилиндрические пучки в магнитном поле с вариацией z -компоненты скорости по закону циклоиды; нерелятивистские и релятивистские цилиндрические и конические бриллюэновские течения, обсуждаемые в работе [1]; торцы цилиндрического диода и магнетрона в докритическом режиме. Геометрия перечисленных образований приведена на рис. 1.

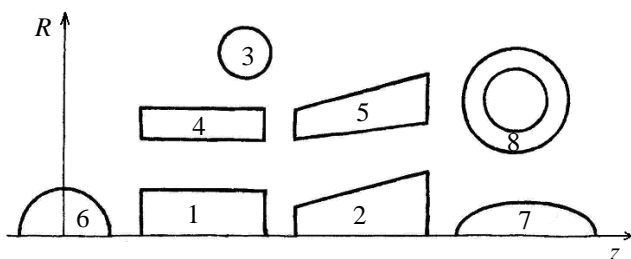


Рис. 1. Объекты рассмотрения:

1 — цилиндр конечной длины; 2 — усеченный конус; 3 — тороид; 4 — цилиндрическое кольцо; 5 — коническое кольцо; 6 — сфера; 7 — эллипсоид; 8 — тороидальное кольцо

Известны, по-видимому, всего две работы, в которых рассматриваются задачи такого рода [2, 3]. В [2] дано решение для концевых экранов цилиндрического диода, только формально являющееся точным из-за присутствия контурных интегралов в комплексной плоскости параметра интегрирования. В [3] сформулирована аналогичная проблема для двухмерного бриллюэновского магнетрона и дано решение в случае плоской геометрии.

Ниже рассмотрено точное решение в торцевой области и приведены результаты, относящиеся к торцам нерелятивистских бриллюэновских потоков, а также бриллюэновских образований в виде тороидов, тороидальных колец и сфер. Все эти задачи объединены тем, что электронный пучок или ступок может быть заключен в сферу конечного

радиуса в отличие от обычной ситуации, примером которой может быть формирование параксиального пучка: его протяженность в принципе ничем не ограничена.

Торцевая область

Точное решение для потенциала в торцевой области определяется формулой, получающейся за счет специализации общего выражения, описывающего решение задачи Коши для уравнения Лапласа в случае осевой симметрии в форме, приведенной в [1],

$$\varphi_{u,v} = \frac{1}{\sqrt{\cos v}} \times \left\{ \operatorname{Re} \left[e^{iv/2} V w \right] + \int_0^v \left(\operatorname{Re} \left[e^{i\xi/2} F \zeta \right] F \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda_e \right) - \frac{1}{8} \operatorname{tg} v \operatorname{Re} \left[e^{i\xi/2} V \zeta \right] F \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; \lambda_e \right) \right) d\xi \right\}; \quad (1)$$

$$\lambda_e = \frac{\cos v - \cos \xi}{2 \cos v};$$

$$w = u + iv, \quad \zeta = u + i\xi, \quad u = \ln \bar{r},$$

$$v = \theta - \frac{\pi}{2}, \quad \bar{r} = \frac{r}{a},$$

где $V = \varphi_e$, $F = (\partial\varphi/\partial v)_e$ — потенциал и его производная на торце $z = 0$, $b \leq R \leq a$;

r, θ — сферические координаты;

z, R — цилиндрические координаты.

• Сплошной бриллюэновский поток описывается выражениями

$$v_\psi = -\omega R, \quad 2\varphi = \omega^2 R^2, \quad \rho = 2\omega^2, \quad \omega = \frac{1}{2} H_z.$$

Потенциал в торцевой области определен элементарной формулой

$$\bar{\varphi} = R^2 - 2z^2.$$

Нулевая эквипотенциаль в плоскости z, R представляет собой прямую $R = \sqrt{2}z$ с наклоном $\theta \sim 54,7^\circ$, а линия $\varphi = \text{const}$ — гиперболу (рис. 2).

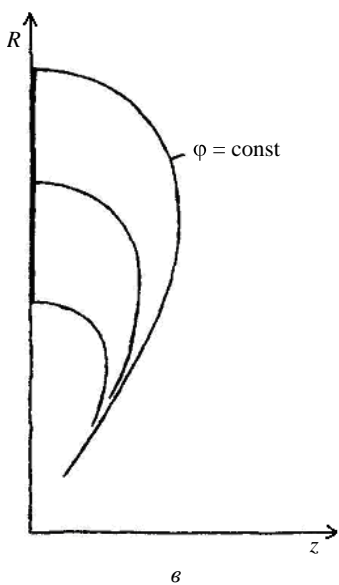
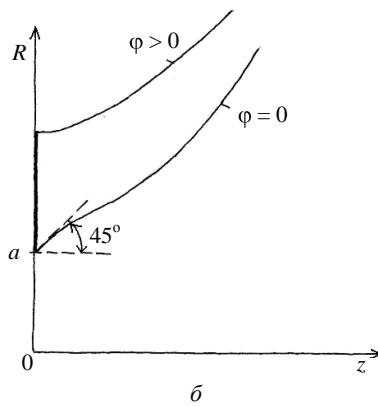
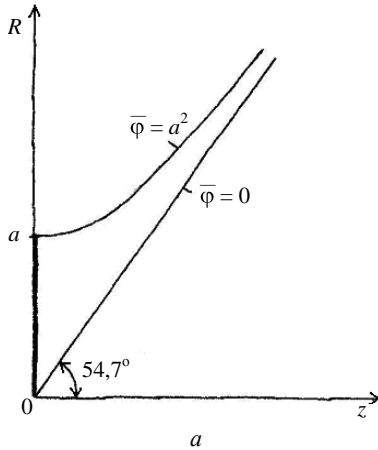


Рис. 2. Эквипотенциали в торцевой области:

a — сплошного бриллюэновского потока; b — кольцевого бриллюэновского потока; v — электростатического бриллюэновского потока

• Кольцевой поток определяется формулами

$$v_\psi = -\omega R \left(1 - \frac{a^2}{R^2} \right); \quad 2\varphi = \omega^2 R^2 \left(1 - \frac{a^2}{R^2} \right)^2;$$

$$\rho = 2\omega^2 \left(1 + \frac{a^4}{R^4} \right);$$

$$2\text{Re} \left[e^{i\xi/2} V \zeta \right] =$$

$$= \omega^2 r^2 \left(\cos \frac{5}{2}\xi - 2 \frac{a^2}{r^2} \cos \frac{1}{2}\xi + \frac{a^4}{r^4} \cos \frac{3}{2}\xi \right),$$

$$F = 0.$$

Явные уравнения эквипотенциалей $r = r(\theta; \varphi)$ после применения формулы (1) являются решениями биквадратного уравнения, коэффициенты которого зависят от θ . Нулевая эквипотенциаль, проходящая через точку $R = a$, при малых v описывается уравнением

$$\frac{r}{a} = 1 + \alpha_1 v + \alpha_2 v^2 + \alpha_3 v^3; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -1; \quad \alpha_3 = \frac{41}{16}.$$

Она подходит к границе пучка под углом в 45° (см. рис. 2, б) и имеет кривизну $k = 5/(2\sqrt{2})$. Эквипотенциаль, проходящая через точку $R = a\sqrt{2}$ в той же области, подходит к границе под прямым углом с кривизной $k = 1 - 2\alpha_2$:

$$\frac{r}{a\sqrt{2}} = 1 + \alpha_2 v^2; \quad \alpha_2 = \frac{13}{6}.$$

• Электростатический поток имеет следующие параметры

$$v_\psi = \frac{\omega_0 a^2}{R}; \quad 2\varphi = \frac{\omega_0^2 a^4}{R^2}; \quad \rho = \frac{2\omega_0^2 a^4}{R^4}; \quad \omega_0 = \text{const}.$$

Решение определено выражением

$$2\varphi = \frac{\omega_0^2 a^4}{r^2 \sqrt{\cos v}} \times$$

$$\times \left[\cos \frac{3}{2}v - \frac{1}{8} \text{tg} v \int_0^v \cos \frac{3}{2}\xi F \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; \lambda_e \right) d\xi \right].$$

Все эквипотенциали являются подобными кривыми, имеющими вблизи границы пучка вид

$$\frac{r}{a} = 1 + \alpha_2 v^2 + \alpha_4 v^4; \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}; \quad \alpha_4 = -\frac{1}{8},$$

где a — точка старта с кривизной и ее производными $k = 2, k' = 0, k'' = 4$. Начало координат в этом

случае будет особой точкой, к которой стремятся все эквипотенциали (см. рис. 2, в).

Бриллюэновские образования

Ограничимся рассмотрением фрагментов сплошного нерелятивистского потока.

• *Тороид.* Для решения задачи о тороидальном бриллюэновском пучке построим конформное отображение верхней полуплоскости с выброшенным кругом радиуса b на полуполосу в плоскости $w = u + iv$. Необходимые геометрические обозначения приведены на рис. 3, а соответствующие отображения определены формулами

$$w_1 = u_1 + iv_1 = -\frac{Z - ih}{Z + ih}; \quad Z = z + iR; \quad w_1 = b_1 e^{-iv};$$

$$Z = ih \frac{1 - w_1}{1 + w_1}; \quad b_1, h = \text{const.}$$

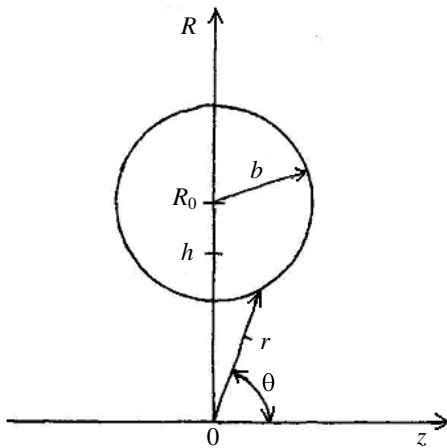


Рис. 3. Геометрия тороидальных бриллюэновских образований

Связь цилиндрических z, R и криволинейных u, v координат описывается соотношениями

$$z = -h \frac{2b_1 e^v \sin u}{1 + b_1^2 e^{2v} + 2b_1 e^v \cos u};$$

$$R = h \frac{1 - b_1^2 e^{2v}}{1 + b_1^2 e^{2v} + 2b_1 e^v \cos u}.$$

Параметрические уравнения контура сечения имеют вид

$$Z_e = -h \frac{2b_1 \sin u}{1 + b_1^2 + 2b_1 \cos u};$$

$$R_e = h \frac{1 - b_1^2}{1 + b_1^2 + 2b_1 \cos u}.$$

Константы b_1, h удовлетворяют двум связям и выражаются через b, R_0

$$b_1 = \sqrt{h^2 + b^2} - h; \quad R_0 = \frac{1 + b_1^2}{1 - b_1^2} h.$$

Для b_1 получается уравнение четвертой степени.

Функции, входящие в выражение для потенциала [1], определены следующими формулами:

$$\alpha_e = -\frac{1}{h} R_e Z_e; \quad \beta_e = Z_e \left(\text{ctg } u - \frac{1}{h} Z_e \right);$$

$$V = \frac{1}{2} \omega^2 R_e^2; \quad F = \omega^2 R_e \beta_e.$$

Окончательно имеем:

$$\varphi_{u,v} = \frac{\omega^2}{2\sqrt{R}} \text{Re} \times$$

$$\times \left\{ R_e^{5/2} w + \frac{1}{2} \int_0^v 5R_e^{5/2} \beta_e F \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda_e \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4R} \left(\frac{R^2 - R_e^2 + Z_e - z^2}{2R_e} \beta_e + Z_e - z \alpha_e \right) \times \right. \quad (2)$$

$$\left. \times R_e^{3/2} F \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; \lambda_e \right) \right] d\xi;$$

$$\lambda_e = -\frac{R_e - R^2 + Z_e - z^2}{4R_e R}.$$

Функции $R_e, Z_e, \alpha_e, \beta_e$ под интегралом зависят от $\xi = u + i\xi$.

Формула (2) описывает поле вне тороида. При формировании внутренности тороида для реализации тороидального кольца криволинейные координаты задаются выражениями

$$Z - iR_0 = b \frac{w - i}{w + i}; \quad z = b \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v + 1^2};$$

$$R - R_0 = -\frac{2bu}{u^2 + v + 1^2}.$$

Необходимые для построения решения функции имеют вид

$$R_e = R_0 - \frac{2bu}{u^2 + 1}; \quad Z_e = b \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}; \quad \alpha_e = -2 \frac{Z_e}{u^2 + 1};$$

$$\beta_e = -2 \frac{R_e - R_0}{u^2 + 1}; \quad V = \frac{1}{2} \omega^2 R_e^2; \quad F = \omega^2 R_e \beta_e,$$

а само решение определяется формулой (2).

• *Сфера.* Задавая сферу радиуса a параметрическими уравнениями

$$R_e = a \sin \theta; \quad Z_e = a \cos \theta; \quad a_e = Z_e; \quad \beta_e = -R_e,$$

приходим к криволинейным координатам u, v

$$u = \theta; \quad v = -\ln \bar{r}; \quad w = u + iv; \quad \zeta = u + i\xi; \quad \bar{r} = r/a.$$

Потенциал и его производная на границе связаны соотношением

$$V = \frac{1}{2} \omega^2 R_e^2; \quad F = -2V.$$

Решение имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{u,v} &= \frac{\omega^2}{2} \frac{1}{\sqrt{R}} \times \\ &\times \left\{ \operatorname{Re} R_e^{5/2} w - \frac{5v}{2} \int_0^v \operatorname{Re} \left[R_e^{5/2} \zeta F \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda_e \right) \right] \times \right. \\ &\times d\xi - \frac{1}{16} \frac{r^2 - a^2}{R} \int_0^v \operatorname{Re} \left[R_e^{3/2} \zeta F \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; \lambda_e \right) \right] d\xi \left. \right\}; \end{aligned}$$

$$\lambda_e = -\frac{\bar{r}^2 - 2\bar{r} \operatorname{ch} \xi + 1}{4\bar{r}} \frac{\operatorname{ch} \xi - i \operatorname{ctg} u \operatorname{sh} \xi}{\sin^2 u + \operatorname{sh}^2 \xi}.$$

Потенциал на оси z принимает нулевое значение. Положительные эквипотенциалы $\varphi = \omega^2 \sin^2 \theta_0 / 2$ при малых v определены уравнением

$$v = \alpha_1 \bar{\theta} + \alpha_2 \bar{\theta}^2; \quad \bar{\theta} = \theta - \theta_0; \quad \alpha = \operatorname{ctg} \theta_0;$$

$$\alpha_2 = \frac{7}{2} \operatorname{ctg}^4 \theta_0 + \frac{11}{2} \operatorname{ctg}^2 \theta_0 + 2.$$

Коэффициент α_1 соответствует нулевому значению производной dR/dz на границе сгустка. Качественная картина эквипотенциалей приведена на рис. 4.

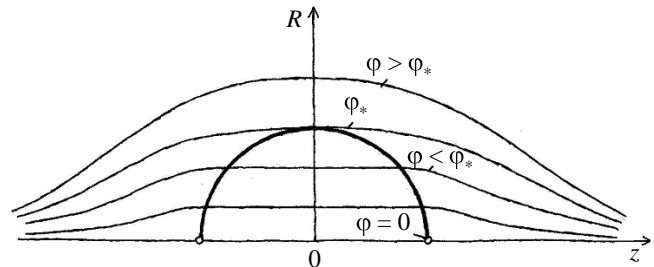


Рис. 4. Качественная картина поля в случае бриллюэновской сферы: $\varphi_* = \omega^2 a^2 / 2$

Полученные в работе точные решения для ряда осесимметричных торцевых областей и бриллюэновских образований в виде тороидов, тороидальных колец и сфер существенно расширяют число известных эталонов.

Л и т е р а т у р а

1. Сыровой В. А. Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. — М.: Энергоатомиздат, 2004.
2. Radley D. E. // J. Electron. Control. 1963. V. 15. No. 5. P. 469.
3. Данилов В. Н. // РЭ. 1966. Т. 11. № 11. С. 1994.

Статья поступила в редакцию 21 июня 2008 г.

Formation of dense electron beam butt-ends, Brillouin “bagel” and sphere

V. A. Syrovoy

Lenin All-Russian Electrotechnical Institute, Moscow, Russia

The exact solution of dense electron beam butt-ends formation is formulated. The objects are cylinders of finite length, truncated cones, cylindrical and conical rings, toroids, spheres and ellipsoids which are divided from Brillouin flow with single non-zero azimuthal component of velocity.

PACS: 41.85.-p