

Degradation cascade model of cosmic rays

V. A. Nikerov

Moscow State Institute of Electronics and Mathematics, 3/12 Large Trekhsvyatitsky al.,
109028, Moscow, Russia
E-mail: nik@cea.ru

A. A. Rukhadze

Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences, 38 Vavilova str., 119991, Moscow, Russia
E-mail: rukh@fpl.gpi.ru

G. V. Sholin

Russian Scientific Center Kurchatov Institute, 1 Academician Kurchatov sq., 123182, Moscow, Russia
E-mail: sholin2@rambler.ru

The power dependency of cosmic rays energy distribution over a wide energy range shows their degradation origin. Analysis of the cosmic rays spectra in comparison with the typical degradation spectra of cascade processes makes possible to describe the kinetics processes of origin and propagation of cosmic rays, in particular the differential loss energy probabilities, the cascade role, and to estimate the energy and number of primary cosmic rays particles.

PACS: 26.40.+ r

Keywords: cosmic rays, cascade processes, degradation processes, power dependency of energy distribution.

Никеров Виктор Алексеевич, профессор
109028, Москва, Б. Трехсвятительский пер., д. 3/12, МИЭМ
Тел. (495) 235-20-22; E-mail: nik@cea.ru

Рухадзе Анри Амвросиевич, главн. науч. сотр., профессор
119991, Москва, ул. Вавилова, 38, ИОФ РАН
Тел. 8 (499) 135-02-47; E-mail: rukh@fpl.gpi.ru

Шолин Геннадий Васильевич, главн. науч. сотр.
123182, Москва, пл. академика Курчатова, 1, РНЦ "Курчатовский институт"
Тел. 8 (499) 196-75-68; E-mail: sholin2@rambler.ru

Необратимость в квантовой механике

Н. В. Лунин

Волжская государственная академия водного транспорта, г. Нижний Новгород, Россия

В. И. Коган

Российский научный центр "Курчатовский институт", Москва, Россия

Обратимость уравнений — необходимое, но недостаточное условие обратимой эволюции. Необратимость — следствие некоммутативности. Из требований к дискретным симметриям найдена композиция альтернативных пропагаторов на неабелевых группах, содержащая необратимость. В замкнутой системе с взаимодействиями, описываемой только обратимыми уравнениями, могут сосуществовать обратимые и необратимые процессы. Найдены геометрическая интерпретация и функционал, который может служить мерой необратимости.

PACS: 02.40.G; 03.65.F; 05.70.L

Ключевые слова: необратимые процессы, квантовая механика, эволюция наблюдаемых переменных.

Введение

"Необратимые процессы столь же реальны, как и обратимые, и не соответствуют дополнительным

ограничениям, которые нам приходится налагать на законы, обратимые по времени", — такая точка зрения высказана И. Пригожиным [1] и относится как к классической механике, так и к квантовой.

В классической статистической механике необратимость проявляет себя в форме второго начала термодинамики — закона возрастания энтропии замкнутой системы. Из одного того обстоятельства, что квантовая механика является обобщением классической, переходящим при соответствующих условиях в последнюю, можно видеть, что и явления квантовой механики содержат необратимость, не говоря даже о том, что существуют необратимые квантовые явления [1—3].

Уравнения, лежащие в основе как классической, так и квантовой механики, обратимы во времени. Не вызывает сомнения, во-первых, что они правильно описывают обратимую эволюцию наблюдаемых, во-вторых, в силу выполнения законов сохранения, обусловленных свойствами симметрии пространства-времени, что они применимы также и к явлениям, в которых наряду с обратимыми процессами протекают и процессы необратимые.

Предположив, что система описывается необратимыми уравнениями, трудно ожидать, что в ней могут протекать обратимые процессы, в этом случае все процессы будут необратимыми, и поэтому описание системы такими уравнениями является достаточным условием необратимой эволюции. Несомненно также, что возможность описания системы с помощью обратимых уравнений является необходимым условием ее обратимой эволюции. Сочетание обратимых и необратимых процессов в одной (квантовой или классической) системе, в основе эволюции которой лежат обратимые уравнения, и составляет, по-видимому, существо проблемы необратимости. Нетрудно понять поэтому замечание в [4], что ясности в проблеме необратимости еще нет.

Расширение класса рассматриваемых физических систем путем включения влияния на систему внешней среды приводит также и к рассмотрению открытых систем с точки зрения необратимости. Ясно, что даже слабое взаимодействие с внешней средой может при некоторых условиях привести к существенному изменению поведения системы, в частности, к необратимым процессам [1—3].

Допустимым рассматривается также и такое изменение схемы квантовой механики, которое, включая необратимость, влечет существенное обобщение ее математического аппарата, например, переход к оснащеному гильбертову пространству [5], включение полугрупп в качестве множества, описывающего необратимую составляющую эволюции наблюдаемых [1] или введение в уравнение Шредингера комплексных или нелинейных членов [2].

Одной из наиболее выразительных особенностей квантовой механики является некоммутатив-

ность операторов, преобразующих волновую функцию при эволюции квантовой системы. Это обстоятельство каким-то образом проявляется и в эволюции наблюдаемых. Поэтому наряду с подходами, перечисленными выше, представляет также интерес выяснить, существует ли связь необратимости с некоммутативностью в квантовой механике, что в свою очередь приводит к вопросу: является ли обратимость уравнений квантовой механики не только необходимой, но и достаточной для обратимой эволюции квантовой системы? Ответ на этот вопрос позволяет рассмотреть и другой вопрос: возможно ли сосуществование обратимых и необратимых процессов в физической системе, описываемой только обратимыми уравнениями?

Если система наблюдаемых величин физической системы полна, а также полны требования к их трансформационным свойствам при преобразованиях координат, то наблюдаемые величины удовлетворяют всем необходимым законам сохранения.

Теоремы Нетер устанавливают взаимнооднозначное соответствие между законами сохранения и группами симметрий, которым подчиняются преобразования наблюдаемых [6], а потому теория, описывающая физическую систему, должна с математической точки зрения представлять собой последовательно теоретико-групповую теорию, сформулированную в терминах представлений групп и устанавливающую все количественные связи между наблюдаемыми, допускающие экспериментальную проверку.

Основными объектами уравнений квантовой механики являются волновые функции, спиноры, амплитуды (в частности, кватернионные [7]) перехода. Они допускают локальные калибровочные преобразования [8] и не являются наблюдаемыми величинами, но связаны с ними и позволяют построить их в виде билинейных эрмитовых форм [9]. Эта связь вместе с теоретико-групповыми требованиями к наблюдаемым приводит к тому, что и эти объекты также обязаны удовлетворять некоторым теоретико-групповым требованиям. Например, в частном случае преобразований поворотов в $3D$ -пространстве группе преобразований векторов $SO(3)$ соответствует группа $SU(2)$ преобразований спиноров [10].

В основе фейнмановской формулировки квантовой механики лежит выражение

$$\varphi_{ca} = \sum_b \varphi_{cb} \varphi_{ba}, \quad (1)$$

где φ_i — амплитуда перехода из начального состояния i в конечное f [11].

Выражение (1) содержит две бинарные операции на множестве амплитуд (пропагаторов): умножение на последовательных отрезках времени или пути в силу их марковских (мультипликативных) свойств и сложение альтернативных амплитуд (пропагаторов) согласно принципу суперпозиции [11, 12].

Группа, в соответствии с определением, является моноидом [13], т. е. множеством с одной бинарной операцией, поэтому фейнмановская формулировка квантовой механики, сочетающая две операции на множестве амплитуд (пропагаторов), а также гейзенберговская и шредингеровская, которые в настоящее время считаются ей эквивалентными, содержит отказ от построения квантовой механики как последовательно теоретико-групповой теории.

Полная система наблюдаемых значений в задачах квантовой механики, описываемых уравнением Шредингера с действительным потенциалом, определенная в [14, 15], и существование коммутативной бинарной композиции на неабелевых группах Ли, установленной в [15—17], вместе с использованием мультипликативного интеграла по путям позволяют построить полную амплитуду перехода, учитывающую и последовательные пути, и пути альтернативные на основе только одной бинарной операции, что, в свою очередь, создает условия для последовательно теоретико-группового построения квантовой механики.

Принято считать, что поскольку уравнения квантовой механики (в частности, нестационарное уравнение Шредингера) инвариантны относительно обращения времени (вместе с переходом к комплексно-сопряженному решению) [18], то в квантовой механике, как и в классической, имеет место обратимость. Каждый элемент группы, согласно определению, обладает обратным элементом, поэтому следует ожидать, что теоретико-групповое описание и обратимость основных уравнений квантовой механики связаны между собой. В то же время группа является множеством с одной операцией. Трудно ожидать поэтому, что построение квантовой механики на множествах с двумя или более операциями (например, на алгебрах) не может привести к нарушению, согласно теоремам Нетер, трансформационных свойств наблюдаемых и/или законов сохранения, а потому описание квантово-механических явлений на множествах с одной операцией представляется необходимым.

Возможный подход к проблеме микронеобратимости может состоять в следующем.

Полная система наблюдаемых значений, описываемых уравнением Шредингера с действительным потенциалом, образует эрмитову матрицу, аналогичную матрице плотности чистых состоя-

ний и имеющую равный нулю определитель, причем последнее обстоятельство имеет смысл локального условия полноты наблюдаемых и не зависит от того, удовлетворяют волновые функции и их градиенты (или компоненты спинора), из которых построены билинейные эрмитовы формы, уравнению Шредингера или нет [19]. Если решение удовлетворяет уравнению Шредингера, то к упомянутой выше матрице возникают дополнительные требования, отвечающие выполнению соответствующих законов сохранения.

Тот факт, что эти эрмитовы матрицы, матричные элементы которых являются линейными комбинациями наблюдаемых, которые могут быть измерены, имеют равный нулю определитель, а потому для них не существует обратных матриц, позволяет предположить, что математическое описание микронеобратимости в своей основе должно содержать матрицы плотности чистых состояний.

Единственным, но весьма сильным указанием на микронеобратимость являются проявляющиеся в экспериментах свойства наблюдаемых величин. Естественным поэтому кажется предположение, что и определение понятия микронеобратимости, как и обратимости, должно быть сформулировано в терминах только наблюдаемых величин.

Изложенное позволяет сделать предположение о возможности включения микронеобратимости в схему нерелятивистской квантовой механики.

Теоретико-групповое описание квантовых явлений в силу теорем Нетер является необходимым для выполнения требований к трансформационным свойствам наблюдаемых и выполнения законов сохранения, оно не противоречит обратимости основных уравнений квантовой механики и может рассматриваться как необходимое условие обратимости.

Условие полноты наблюдаемых величин выражается в виде равенства нулю определителя матрицы плотности чистых состояний, матричные элементы которой представляют собой линейные комбинации наблюдаемых. Одновременно это условие приводит к отсутствию матриц, обратных к матрицам плотности. Для того чтобы эволюция системы была обратима во времени, необходима, очевидно, не только обратимая эволюция волновых функций или спиноров, но и обратимая эволюция всех наблюдаемых, т. е. матрицы плотности. Поэтому задача исследования микронеобратимости сводится к исследованию условий обратимости временной эволюции матрицы плотности чистых состояний, не имеющей обратной матрицы.

В основе предлагаемого ниже подхода к микронеобратимости лежит согласование групповых свойств полной системы наблюдаемых и преобра-

зований соответствующей матрицы плотности чистых состояний при эволюции квантовой системы с теоретико-групповыми свойствами преобразований спиноров, определяющимися в нерелятивистской квантовой механике уравнением Шредингера при условии выполнения соответствующих ему законов сохранения.

Нестационарное уравнение Шредингера

Пусть частица описывается нестационарным уравнением Шредингера с действительным, зависящим от координат и времени, потенциалом $U(\mathbf{r}, t)$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U(\mathbf{r}, t) \psi. \quad (2)$$

Пусть также в начальный момент t_0 в точке \mathbf{r}_0 заданы волновая функция и ее пространственная производная вдоль некоторого направления $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}_0)$ (\mathbf{u}_0 — действительный вектор). С помощью замены $\psi(\mathbf{r}_0 t) = \exp\{-iE_0 t/\hbar\} \chi(\mathbf{r}, t)$, где E_0 — энергия частицы в \mathbf{r}_0 , t_0 , перейдем к уравнению

$$-i \frac{2m}{\hbar} \frac{\partial \chi}{\partial t} = \left\{ \nabla^2 + k^2(\mathbf{r}, t) \right\} \chi, \quad (3)$$

где $k^2(\mathbf{r}, t) = \left(2m/\hbar^2 \right) \{ E_0 - U(\mathbf{r}, t) \}$.

От волновой функции $\chi(\mathbf{r}, t)$ и ее градиента перейдем, подобно [14—16], к двум скалярным функциям $\Phi_{\pm}(\mathbf{r}, t)$

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \frac{k^{-1/2}(\mathbf{r}, t)}{\sqrt{2}} \{ \Phi_+ + \Phi_- \}, \quad (4)$$

$$\nabla \chi(\mathbf{r}, t) = \frac{ik^{1/2}(\mathbf{r}, t)}{\sqrt{2}} \{ \Phi_+ - \Phi_- \} \mathbf{u}(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Поскольку введены две комплексные функции Φ_{\pm} , то на произвольный вектор $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, имеющий, согласно (4), (5) [14, 15], смысл направления тока, линейного по градиенту волновой функции, в трехмерном пространстве, допустимо наложить некоторые требования. Примем, что

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{u}^2(\mathbf{r}) = 1. \quad (6)$$

Из (3)—(6) для функций Φ'_{\pm} получим систему двух связанных уравнений (штрих означает частную производную по времени)

$$\begin{aligned} \nabla \Phi_+ + \frac{m}{\hbar k} (\Phi'_+ + \Phi'_-) \mathbf{u} = \\ = ik\mathbf{u}\Phi_+ + \frac{\nabla k}{2k} \Phi_- + \frac{m}{\hbar k} \cdot \frac{k'}{2k} (\Phi_+ + \Phi_-) \mathbf{u}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \Phi_- - \frac{m}{\hbar k} (\Phi'_+ + \Phi'_-) \mathbf{u} = \\ = -ik\mathbf{u}\Phi_- + \frac{\nabla k}{2k} \Phi_+ - \frac{m}{\hbar k} \cdot \frac{k'}{2k} (\Phi_+ + \Phi_-) \mathbf{u}, \end{aligned}$$

которые после перехода к единицам $2m = \hbar = 1$ и матричной записи уравнений для $\Phi =$ столбец $\|\Phi_+, \Phi_-\|$ принимают вид

$$\begin{aligned} \nabla \Phi + \frac{\mathbf{u}}{2k} (\sigma_3 + i\sigma_2) \Phi' = \\ = \left\{ ik\mathbf{u}\sigma_3 + \frac{\nabla k}{2k} \sigma_1 + \frac{\mathbf{u}}{2k} \frac{k'}{2k} (\sigma_3 + i\sigma_2) \right\} \Phi, \end{aligned} \quad (7)$$

где σ_i — матрицы Паули;

σ_0 — единичная матрица 2×2 .

Заметим, что от (7), принимая во внимание (3)—(6), возможен и обратный переход к уравнению Шредингера (2). В стационарном случае (7) переходит в уравнение [14, 15]

$$\nabla \Phi = \left\{ ik\mathbf{u}\sigma_3 + \frac{\nabla k}{2k} \sigma_1 \right\} \Phi, \quad (8)$$

которое является уравнением Шредингера в спинорном представлении.

Исследуем групповые свойства решения (7), представив его в форме $\Phi(\mathbf{r}, t) = Q\Phi(\mathbf{r}_0, t_0)$, где Q — некоторая матрица 2×2 .

Подставляя выражение (8) в уравнение (7), для мультипликативной производной [20] от Q с дифференциальным оператором из (7) получим

$$\left\{ \nabla Q + \frac{\mathbf{u}}{2k} (\sigma_3 + i\sigma_2) Q' \right\} Q^{-1} = \mathbf{P}, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{P} = \left\{ ik\mathbf{u}\sigma_3 + \frac{\nabla k}{2k} \sigma_1 + \frac{\mathbf{u}}{2k} \frac{k'}{2k} (\sigma_3 + i\sigma_2) \right\}.$$

Матрица \mathbf{P} в (9) имеет след, равный нулю, поэтому Q — унимодулярна.

Принимая во внимание, что коэффициент при σ_3 в матрице \mathbf{P} является комплексной величиной, а также вычисляя коммутатор $[\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_f]$ в произвольных точках (\mathbf{r}_i, t_i) и (\mathbf{r}_f, t_f) (откуда следует, что в коммутаторе коэффициенты при σ_1 и σ_2 также комплексны), приходим к заключению, что матрица Q , определяющая решение уравнения (7), принадлежит группе $SL(2, C)$, она может быть выражена в форме $Q = \exp\{\mathbf{q}\sigma\}$ с зависящим от \mathbf{r} и t вектором \mathbf{q} с комплексными компонентами.

Наблюдаемые и законы сохранения

Рассмотрим, следуя данным работ [14, 15], четыре эрмитовы формы $j_s, s = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} j_0 &= k\chi\chi^* + (\nabla\chi)(\nabla\chi^*)/k; \\ \mathbf{j}_2 &= \chi(\nabla\chi^*) + \chi^*(\nabla\chi); \\ j_1 &= k\chi\chi^* - (\nabla\chi)(\nabla\chi^*)/k; \\ \mathbf{j}_3 &= i(\chi(\nabla\chi^*) - \chi^*(\nabla\chi)). \end{aligned} \tag{10}$$

В (10) j_0 и j_1 — скалярные, \mathbf{j}_2 и \mathbf{j}_3 — векторные наблюдаемые, линейную комбинацию $\rho = \chi\chi^* = (j_0 + j_1)/(2k)$ называют обычно плотностью вероятности, $\mathbf{j}_2 = \nabla\rho$. В отличие от [14, 15] величины j_s содержат зависимость от времени.

Четыре величины j_s в (10) имеют размерность тока, они удовлетворяют тождеству

$$j_0^2 = j_1^2 + j_2^2 + j_3^2, \tag{11}$$

которое выполняется для любых (\mathbf{r}, t) независимо от того, является $\chi(\mathbf{r}, t)$ решением (3) или нет. Поэтому, в частности, (11) имеет место и в начальной (\mathbf{r}_0, t_0) и в конечной (\mathbf{r}, t) точках.

Заметим, что величины j_s аналогичны параметрам Стокса.

Заданные в \mathbf{r}_0, t_0 условия запишем в виде

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{r}_0, t_0) &= a \exp(ib); \\ \mathbf{u}_0 \cdot \nabla\chi(\mathbf{r}_0, t_0) &= k_0 \cdot c \exp(id). \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $k_0 = k(\mathbf{r}_0, t_0), a, b, c, d$ — четыре действительных параметра. При этом, согласно (10) и (12), тождество (11) также выполняется, откуда следует, что из четырех токов j_s лишь три независимы.

Амплитуды величин j_s из (10) могут быть выражены через скалярные комплексные функции $\Phi_{\pm} : j_s = \Phi^+ \sigma_s \Phi$ [14, 15]. Они также удовлетворяют тождеству (11). Нетрудно показать [14], что при преобразованиях поворотов векторные величины из (10) преобразуются на группе $SO(3)$, им отвечают преобразования величины $\Phi = \text{столбец } \|\Phi_+, \Phi_-\|$ на группе $SU(2)$, сохраняющие, в силу унитарности преобразований, величину j_0 , поэтому Φ является спинором.

Из спинора Φ и эрмитово сопряженного образуем, в соответствии с определением прямого произведения, эрмитову матрицу $J = \Phi^+ \oplus \Phi$, матричные элементы которой выражаются через токи j_s из (10) в виде [19]

$$\begin{aligned} J &= \Phi^+ \otimes \Phi = \|\Phi_+^*, \Phi_-^*\| \otimes \|\Phi_+, \Phi_-\| = \\ &= \|\Phi_+^* \Phi_+ \Phi_-^* \Phi_+\| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} j_0 + j_3 & j_1 - ij_2 \\ j_1 + ij_2 & j_0 - j_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ее определитель равен нулю, она удовлетворяет условию $J^2 = j_0 J$, которое при условии нормировки $j_0 = 1$ совпадает с определением идемпотентной матрицы, и потому J аналогична матрице плотности чистых состояний.

Используя тождество $\Phi^+ \otimes \Phi \equiv (1/2) \sum_{s=0}^3 \sigma_s \times (\Phi^+ \sigma_s \Phi) = (1/2) \sum_{s=0}^3 \sigma_s j_s$, а также уравнение (7) и эрмитово сопряженное, получим связи для токов j_s :

$$\begin{aligned} \nabla j_0 + \frac{\mathbf{u}}{2k} j_3' + i \frac{\mathbf{u}}{2k} (\Phi^+ \sigma_2 \Phi' - \Phi'^+ \sigma_2 \Phi) &= \\ = \frac{\nabla k}{k} j_1 + \frac{\mathbf{u}}{2k} \frac{k'}{k} j_3; \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \nabla j_1 - \frac{\mathbf{u}}{2k} j_3' - i \frac{\mathbf{u}}{2k} (\Phi^+ \sigma_2 \Phi' - \Phi'^+ \sigma_2 \Phi) &= \\ = \frac{\nabla k}{k} j_0 + 2k\mathbf{u}j_2 - \frac{\mathbf{u}}{2k} \frac{k'}{k} j_3; \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \nabla j_2 + i \frac{\mathbf{u}}{2k} \times \\ \times \{ \Phi^+ (\sigma_0 + \sigma_1) \Phi' - \Phi'^+ (\sigma_0 + \sigma_1) \Phi \} &= \\ = -2k\mathbf{u}j_1; \end{aligned} \tag{16}$$

$$\nabla j_3 + \frac{\mathbf{u}}{2k} (j_0' + j_1') = \frac{\mathbf{u}}{2k} \frac{k'}{k} (j_0 + j_1). \tag{17}$$

В стационарном случае из (14)—(17) следуют связи между токами

$$\begin{aligned} \nabla j_0 &= \frac{\nabla k}{k} j_1, \\ \nabla j_1 &= \frac{\nabla k}{k} j_0 + 2k\mathbf{u}j_2, \quad \nabla j_2 = -2k\mathbf{u}j_1, \quad \nabla j_3 = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

к которым приводит уравнение (8).

Дифференцируя тождество (11) по координатам и времени, можно показать, что подстановка связей (14)—(17) также приводит к тождеству (18), поэтому (11) и (14)—(17) представляют собой полную систему связей между наблюдаемыми (10), построенными из решений уравнения (7).

Принимая во внимание, что $\rho = \chi\chi^* = (j_0 + j_1)/(2k)$, из (17) с учетом (18) получим уравнение непрерывности в виде

$$\nabla j_3 + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (19)$$

Сумма (14) и (15) приводит к связи $\nabla(j_0 + j_1) = \frac{\nabla k}{k}(j_0 + j_1) + 2k\mathbf{u}j_2$, поэтому

$$\nabla \rho = j_2 \mathbf{u}. \quad (20)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что после рассмотрения уравнения непрерывности (19) формула (20) не содержит производных по времени, поэтому связь (20) имеет такую же форму, как и в стационарном случае, с тем однако отличием, что в (20) время содержится в качестве параметра.

Эволюция наблюдаемых

Пусть в момент времени t_0 для квантовой системы, описываемой уравнением Шредингера, задана полная система наблюдаемых. Линейные комбинации наблюдаемых — билинейных эрмитовых форм — образуют эрмитову матрицу плотности чистых состояний (13) с равным нулю определителем, а при эволюции квантовой системы от t_0 к t наблюдаемые образуют последовательность эрмитовых матриц плотности чистых состояний $J(t_0) \dots (t)$ с тем же (равным нулю) определителем.

Требование выполнения законов сохранения, определяемых уравнением Шредингера, налагает некоторые условия на матричные элементы последовательности, которые могут быть сформулированы в алгебраической или дифференциальной форме.

В соответствии с изложенным во Введении эволюция системы обратима, если при обращении времени, т. е. при эволюции системы от t к t_0 , матрица плотности чистых состояний J (или, что то же самое, — все наблюдаемые эволюционирующей системы) проходит в обратном порядке ту же последовательность, что и в прямом процессе [21]. Очевидно, что при обратимой эволюции от t к t_0 обязаны выполняться те же самые, определяющиеся (обратимым) уравнением Шредингера, законы сохранения, что и при эволюции от t_0 к t .

Необходимым условием обратимой эволюции (поскольку сами матрицы J не имеют обратных) является существование такого преобразования матрицы плотности чистых состояний, которое осуществляет взаимно-однозначную и обратимую их связь для произвольных моментов времени t_1 и t_2 из последовательности $t_0 \dots t_1 \dots t_2 \dots t$ при условии выполнения необходимых законов сохранения.

В противном случае, когда такого преобразования не существует и потому матрицы плотности разных состояний взаимно-однозначно и обратимо не связаны, обратимость существовать не может. При этом не предполагается обязательным существование какого-либо непосредственного (матричного) преобразования $J(t_1)$ в $J(t_2)$.

Предположим, что при эволюции системы от t_0 к t , когда произвольному моменту времени t_1 внутри этого интервала соответствует спинор $\Phi(t_1)$ и матрица плотности $J(t_1)$, а произвольному последующему моменту времени t_2 соответствуют $\Phi(t_2)$ и $J(t_2)$, спиноры связаны матрицей $Q(t_1, t_2)$ из группы $SL(2, C)$: $\Phi(t_2) = Q(t_1, t_2)\Phi(t_1)$.

Матрицы $J(t_1)$ и $J(t_2)$ запишем в виде

$$J(t_1) = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^3 \sigma_s \left\{ \Phi^+(t_1) \sigma_s \Phi(t_1) \right\}; \quad (21)$$

$$J(t_2) = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^3 \sigma_s \times \left\{ \Phi^+(t_1) Q^+(t_2, t_1) \sigma_s Q(t_2, t_1) \Phi(t_1) \right\}. \quad (22)$$

Пусть эволюция системы полностью описывается только одной последовательностью матриц (в общем случае — некоммутативных) $Q(t_0, t_0) \dots Q(t_1, t_0) \dots Q(t_2, t_0) \dots Q(t, t_0)$, преобразующих спинор, и соответствующей ей последовательностью матриц плотности $J(t_0) \dots J(t_1) \dots J(t_2) \dots J(t)$ согласно (21) и (22). Это может иметь место, например, в случае, когда в мысленном эксперименте с двумя бесконечно малыми щелями, расположенными на границе раздела сред [14, 15, 19, 22], открыта только одна из щелей, или в том случае, когда эволюция полностью определяется единственной стационарной, удовлетворяющей принципу наименьшего действия, траекторией. Последняя отвечает равенству нулю вариации следа пропагатора [16].

При обращении времени, т. е. при эволюции системы от t к t_0 , спинор преобразуется, поскольку уравнение Шредингера обратимо с помощью обратных матриц, а для любых моментов времени t_1 и t_2 обратная матрица существует в силу групповых свойств преобразований, причем $Q(t_1, t_2) = Q^{-1}(t_2, t_1)$. Это означает, что в прямом и последующем обратном процессах $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_1$ спинор преобразуется как

$$\begin{aligned} \Phi(t_1) &\rightarrow Q(t_2, t_1)\Phi(t_1) \rightarrow Q(t_1, t_2)Q(t_2, t_1)\Phi(t_1) = \\ &= Q^{-1}(t_2, t_1)Q(t_2, t_1)\Phi(t_1) = \Phi(t_1), \end{aligned}$$

поэтому матрица плотности (22) преобразуется как $J(t_1) \rightarrow J(t_2) \rightarrow J(t_1)$, т. е. все наблюдаемые в

конец процесса приобретут те же самые значения (21), какими они были в его начале.

Таким образом, если процесс полностью описывается только одной последовательностью матриц, преобразующих спинор, то он обратим.

Эволюция квантовой системы, когда последовательность матриц плотности определяется только одной последовательностью матриц, преобразующих спинор, не является единственно возможной. Если система описывается уравнением Шредингера с потенциалом $U(\mathbf{r}, t)$, зависящим от всех координат, то полная амплитуда перехода из \mathbf{r}_0, t_0 в произвольную точку \mathbf{r}, t зависит от всех возможных путей. Например, в фейнмановской формулировке квантовой механики она представляет собой интеграл по траекториям.

Рассмотрим вопрос об обратимости эволюции квантовой системы, когда последовательность матриц плотности определяется больше чем одной последовательностью необязательно коммутативных матриц Q , определяющих последовательность $J(t_0) \dots J(t)$. В данном случае достаточно ограничиться только двумя последовательностями матриц Q , что, в частности, имеет место в эксперименте с двумя щелями на границе раздела сред.

Пусть эволюция квантовой системы от t_1 к t_2 определяется двумя равноправными путями. Рассмотрим вопрос об обратимости наблюдаемых при обращении времени вида $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_1$. Матрицы перехода (обозначим их A и B) от t_1 к t_2 по двум разным путям принадлежат, как показано выше, группе $SL(2, C)$, и потому они представимы в виде $A = \exp(\mathbf{a}\sigma)$ и $B = \exp(\mathbf{b}\sigma)$ с комплексными векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} .

При обращении времени, т. е. при эволюции от t_2 к t_1 , матрицы A и B , преобразующие спинор на каждом из путей при эволюции от t_1 к t_2 , переходят в обратные, $A \rightarrow A^{-1}$ и $B \rightarrow B^{-1}$. Обратные матрицы существуют в силу обратимости уравнения Шредингера или вследствие того, что они принадлежат группе, при обращении матриц векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} меняют знак.

Полный пропагатор (матрица перехода) в процессе $t_1 \rightarrow t_2$, учитывающий оба пути, является композицией матриц по обоим путям. Требование выполнения тех же законов сохранения, которые выполняются для каждого из путей, приводит к тому, что допустимые композиции должны принадлежать той же группе, которой принадлежат A и B . Кроме групповой принадлежности, полный пропагатор по двум путям должен удовлетворять некоторым дополнительным требованиям, отражающим свойства симметрии системы при дискретных преобразованиях, в данном случае при перестановках, т. е. при $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a}$, и при инверсии, т. е. при $\mathbf{a} \rightarrow -\mathbf{a}$ и $\mathbf{b} \rightarrow -\mathbf{b}$.

Уравнение Шредингера обратимо. Это означает, что решение уравнения (2) или комплексно-сопряженного, или построение пропагатора для спинорной формы уравнения Шредингера (7) или соответствующего спинорного уравнения для комплексно-сопряженного уравнения Шредингера эквивалентны. Комплексное сопряжение уравнения Шредингера (вместе с переходом к комплексно-сопряженным решениям) соответствует замене $t \rightarrow -t$, при этом пропагатор Q переходит в Q^{-1} для обратного процесса. Поэтому пропагаторы для прямого и обратного процессов Q и Q^{-1} (на группе обязательно существуют оба) эквивалентны в том же смысле, в каком эквивалентны ψ и ψ^* при обращении времени.

Рассмотрим сначала перестановки пропагаторов A и B . В силу равноправия путей полный пропагатор должен быть либо симметричным, либо, учитывая изложенное выше, антисимметричным при $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$, т. е. полный пропагатор либо не меняется, либо переходит в обратный.

Симметричный по перестановкам пропагатор, как показано в [14—17], выражается в виде

$$M = \left\{ \left(AB^{-1} \right)^{1/2} B \right\}^2 = \left\{ \left(BA^{-1} \right)^{1/2} A \right\}^2. \quad (23)$$

При закрытии одной из щелей, т. е. при $A \rightarrow 1(\mathbf{a} = \mathbf{0})$ или $B \rightarrow 1(\mathbf{b} = \mathbf{0})$, матрица M переходит в пропагатор для одного пути, $M = B$ или $M = A$, соответственно.

Антисимметричный, переходящий при перестановках в обратный, пропагатор имеет вид [19]

$$D = \left\{ (AB)^{1/2} B^{-1} \right\}^2. \quad (24)$$

Покажем, что при $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$ пропагатор $D \rightarrow D^{-1}$, т. е.

$$\tilde{D} = \left\{ (BA)^{1/2} A^{-1} \right\}^2 = \left\{ (AB)^{1/2} B^{-1} \right\}^{-2} = D^{-1}.$$

Для этого, очевидно, достаточно доказать равенство $(BA)^{1/2} A^{-1} = B(AB)^{-1/2}$. Умножая его справа на A и возводя в квадрат, получим

$$\begin{aligned} BA &= B(AB)^{-1/2} A \cdot B(AB)^{-1/2} A = \\ &= B(AB)^{-1/2} (AB)(AB)^{-1/2} A = BA. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается перестановочность (23).

Кроме этих двух композиций существуют еще две антисимметричные по перестановкам композиции [23]

$$T = (AB^{-2}A)^{1/2} A^{-1}B, \quad (25)$$

$$T' = (AB^2A)^{1/2} A^{-1}B^{-1}, \quad (26)$$

такие, что при $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$ матрица $T \rightarrow T^{-1}$ и $T' \rightarrow (T')^{-1}$ доказательство подобно приведенному выше.

Указанные перестановочные свойства композиций матриц (23)—(26) справедливы для неособенных матриц произвольного порядка. Если A и B принадлежат одной мультипликативной группе, то и их композиции M , D , T и T' принадлежат той же группе. Это следует из того, что в явные выражения для них входят только произведения и действительные степени матриц — операции, сохраняющие групповые свойства результата*. В частности, если $A, B \in SL(2, C)$ то M, D, T и T' также принадлежат $SL(2, C)$. Поэтому при действии матриц M, D, T и T' на спинор выполняются те же законы сохранения, что и для A и B по отдельности.

Рассмотрим трансформационные свойства матриц M, D, T и T' как полных пропагаторов для спинора и учитывающих оба пути при обращении времени, т. е. при $A \rightarrow A^{-1}$ и $B \rightarrow B^{-1}$. Нетрудно показать, что каждый из пропагаторов M и D при такой замене переходит в обратный. Это означает, что при $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_1$ действие каждого из пропагаторов M и D на спинор приводит к спинору $\Phi(t_1)$, и потому все наблюдаемые (т. е. матрицы плотности чистых состояний), вычисленные с помощью пропагаторов M и D , приобретают те же значения в конце процесса, какими они были в его начале. Иными словами, пропагаторы M и D могут описывать процессы обратимые, каждый из них отвечает наблюдаемым с соответствующими перестановочными свойствами, но они не содержат необратимости.

Рассмотрим подробнее пропагатор T . Пусть одна из щелей закрыта, при этом в (25) следует положить $A = 1$ или $B = 1$. В обоих случаях $T = 1$. Если матрицы A и B коммутативны (при этом показатели их степеней складываются), то также $T = 1$. Поэтому в этих случаях (открыта одна щель, что соответствует только одной последовательности матриц Q , преобразующих спинор, или их две, но пропагаторы A и B коммутативны) действие пропагатора T на спинор не приводит ни к каким изменениям, и потому наблюдаемые также не меняются.

Рассмотрим теперь преобразование пропагатора T при обращении матриц A и B , заменив в (25) $A \rightarrow A^{-1}$ и $B \rightarrow B^{-1}$. При этом $T \rightarrow \tilde{T} = (A^{-1}B^2A^{-1})^{1/2} AB^{-1}$. Покажем, что $\tilde{T} = T$, т. е. $(A^{-1}B^2A^{-1})^{1/2} AB^{-1} = (AB^{-2}A)^{1/2} A^{-1}B$. Умножая это равенство справа последовательно на B^{-1} и A и возводя его в квадрат, получим

$$AB^{-2}A = (A^{-1}B^2A^{-1})^{1/2} AB^{-1} \cdot B^{-1}A \cdot (A^{-1}B^2A^{-1})^{1/2} \times \\ \times AB^{-1} \cdot B^{-1}A = (AB^{-2}A)^{-1/2} (AB^{-2}A) (AB^{-2}A)^{-1/2} \times \\ \times (AB^{-2}A) = AB^{-2}A,$$

т. е. $\tilde{T} = T$ (аналогичными свойствами обладает и пропагатор T'). Это означает*, что если преобразование спинора $\Phi(t_1)$ с помощью пропагатора T в процессе $t_1 \rightarrow t_2$ приводит к $\Phi(t_2) = T(t_1)$, то последующее преобразование спинора $\Phi(t_2)$ в процессе $t_2 \rightarrow t_1$ приводит к $\tilde{\Phi}(t_1) = T\Phi(t_2) = T^2\Phi(t_1)$, т. е. спинор $\tilde{\Phi}(t_1)$ в конце процесса $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_1$ не совпадает со спинором в его начале, если $T^2 \neq \sigma_0$.

Запишем матрицу плотности чистых состояний $\tilde{J}(t_1)$ в конце процесса $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_1$, полученную с помощью пропагатора T , в виде

$$\tilde{J}(t_1) = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^3 \sigma_s \left\{ \Phi^+(t_1) (T^+)^2 \sigma_s T^2 \Phi(t_1) \right\}.$$

Очевидно, что условием совпадения наблюдаемых в начале и конце процесса, т. е. условием обратимости является

$$(T^+)^2 \sigma_s T^2 = \sigma_s \quad (27)$$

для всех $s = 0, 1, 2, 3$. При $s = 0$ оно приводит к $(T^2)^+ = T^{-2}$, т. е. к требованию унитарности матрицы T^2 , что может рассматриваться в качестве одного из необходимых условий обратимости. Выразив в этом случае унитарную матрицу в виде $T^2 = \exp\{2it\sigma\} = \cos 2t + i(\mathbf{t}\sigma/t)\sin 2t$ с действительным вектором \mathbf{t} , получим условие обратимости в виде** $\sin 2t = 0$, или $t = \pi n/2, t = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}$.

Если условие (27) не выполняется, то $\tilde{J}(t_1) \neq J(t_1)$, и эволюция в процессе $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_1$ необратима.

* Групповые и перестановочные свойства бинарных выражений M, D, T и T' сохраняются для любых их действительных степеней.

* Мультипликативность последовательных преобразований справедлива как для обратимых, так и для необратимых процессов [24].

** Здесь t_j и t — компоненты и длина вектора \mathbf{t} .

Выражение для матрицы \mathbf{P} из (9) позволяет сделать некоторые выводы о физических причинах необратимости. Если потенциал не меняется ни во времени, ни в пространстве ($k' = 0$ и $\nabla k = 0$), взаимодействие отсутствует, матрицы A и B диагональны и коммутативны, при этом T равна единичной, а все процессы обратимы. В случае взаимодействия, когда $k' \neq 0$ и (или) $\nabla k \neq 0$, недиагональные матричные элементы в A и B отличны от нуля, при этом A и B могут быть неунитарными и некоммутативными, а потому процессы могут протекать необратимо. Поэтому взаимодействие, в частности, столкновения, в системе следует считать необходимой физической причиной необратимости, хотя и недостаточной. Например, если имеется взаимодействие, но $A = B$, то матрица T равна единичной, и необратимость отсутствует.

В случае сложных систем, когда имеется много путей эволюции и соответствующих им пропагаторов A, B, \dots , необходимым условием обратимости является выполнение условия (27) для всех пар парциальных пропагаторов, а достаточным условием необратимости является его нарушение для одной пары.

Заключение

Нерелятивистские квантовые системы с действительным потенциалом описываются обратимым уравнением Шредингера. Требования к трансформационным свойствам наблюдаемых, которые являются действительными скалярными и векторными величинами, и выполнение законов сохранения приводят, в соответствии с теоремами Нетер, к соответствующим теоретико-групповым требованиям к пропагаторам, преобразующим спиноры. Пропагаторы являются элементами соответствующих групп, они обладают обратными элементами, что отвечает обратимости уравнения Шредингера.

Необратимость квантовых систем, являющаяся экспериментальным фактом, требует своей формулировки в терминах наблюдаемых величин. Полный набор наблюдаемых (билинейных эрмитовых форм) образует матрицу плотности чистых состояний. Полнота наблюдаемых может быть выражена в виде равенства ее определителя нулю, поэтому эти матрицы не имеют обратных. Эволюция наблюдаемых квантовой системы выражается последовательностью таких матриц с тем же, равным нулю, определителем, а требования выполнения законов сохранения приводят к некоторым условиям на матричные элементы этой последовательности, определяемым обратимым уравнением

Шредингера и соответствующей ему группой, которой принадлежат пропагаторы для спинора.

Из совместимости требований к матрице плотности чистых состояний с теоретико-групповыми требованиями к пропагаторам получены условия обратимой эволюции квантовой системы. Обратимость уравнения Шредингера представляет собой необходимое, но вовсе не достаточное условие обратимой эволюции квантовой системы. Обратимая эволюция осуществляется лишь в случае обратимых преобразований всех наблюдаемых.

Предложенный подход к рассмотрению необратимости имеет аналогию с рассмотрением обычных интерференционных явлений. Например, в случае стационарной интерференции, определяемой двумя путями, сначала строится решение (парциальный пропагатор) по каждому из путей, затем строится полное решение, представляющее композицию парциальных, и после этого на основе полного, учитывающего оба пути, решения строятся наблюдаемые.

Совершенно аналогично рассмотрению необратимости. Эволюция матрицы плотности определяется эволюцией одной или нескольких последовательностей парциальных пропагаторов, преобразующих спинор. Эти матричные пропагаторы каждой из последовательностей вследствие обратимости уравнения Шредингера обратимы, они обладают свойствами группы, отвечающей соответствующим законам сохранения. Полные пропагаторы являются композицией соответствующих парциальных пропагаторов каждой из последовательностей парциальных пропагаторов, они принадлежат той же группе, которой принадлежат входящие в них парциальные пропагаторы. Этим обстоятельством обусловлены выполнение тех же законов сохранения, к которым приводит каждый из парциальных пропагаторов, и трансформационные свойства наблюдаемых при преобразованиях координат. Полные пропагаторы обладают также определенными перестановочными свойствами, которые в свою очередь определяют их свойства симметрии при переходе к обратным матрицам. Наблюдаемые вычисляются на основе полных пропагаторов.

При обращении времени все парциальные пропагаторы переходят в обратные в соответствии с обратимостью уравнения Шредингера. Они порождают, в частности, такие принадлежащие той же группе, что и парциальные, полные пропагаторы, которые при обращении парциальных переходят в обратные. Эти обратимые полные пропагаторы не приводят к необратимости наблюдаемых, они описывают только обратимую эволюцию.

Необратимая эволюция наблюдаемых может быть связана только с такими полными пропагаторами, которые не переходят в обратные при обращении времени и соответствующего обращения входящих в него парциальных пропагаторов. Кроме обратимых полных пропагаторов, обратимые парциальные порождают также и такие полные пропагаторы, которые при обращении входящих в них парциальных пропагаторов не меняются. Поэтому они принадлежат той же группе, что и парциальные, и потому, не нарушая законов сохранения, могут приводить к необратимой эволюции наблюдаемых.

Существуют условия, при которых и такие полные пропагаторы не приводят к необратимой эволюции. Это прежде всего имеет место, когда эволюция наблюдаемых определяется только одной последовательностью пропагаторов, преобразующих спинор, в этом случае полный пропагатор совпадает с парциальным. Во-вторых, в том случае, когда соответствующие пропагаторы каждой из последовательностей парциальных пропагаторов коммутативны, эволюция наблюдаемых также обратима.

Если полный пропагатор, не переходящий в обратный при обращении входящих в него парциальных пропагаторов, не удовлетворяет этим требованиям, то эволюция наблюдаемых квантовой системы необратима. Физической причиной необратимости является взаимодействие в системе.

Предложенный подход к необратимости допускает одновременное существование и обратимых, и необратимых процессов в системе, описываемой обратимым уравнением Шредингера, поскольку в достаточно сложной системе, эволюция которой определяется большим числом парциальных пропагаторов, условие обратимости, зависящее от координат и времени, может выполняться для одних сочетаний парциальных пропагаторов и не выполняться для других.

Обращают на себя внимание два замечания авторов [5], связанных с необратимостью в квантовой механике и имеющих непосредственное отношение к развитому подходу. "Необратимость, выражаемая стрелой времени, — свойство статистическое. Она не может быть введена на уровне отдельных траекторий (или волновых функций) и поэтому требует радикального отхода от ньютоновской механики или ортодоксальной квантовой механики, в основе которой лежат понятия отдельной траектории или волновой функции", [5, стр. 181] и "Основное допущение, которое мы здесь вводим, состоит в утверждении, что пространство—время с нулевой кривизной, такое, как пространство Минковского, не обладает энтропи-

ей" [5, стр. 232]. Первое из них отвечает тому обстоятельству, что в предложенном подходе необратимость отсутствует, если путь эволюции только один, для необратимости необходимы два парциальных пропагатора с соответствующими свойствами. Второе замечание следует сопоставить с некоммутативностью парциальных пропагаторов. Оба они получают объяснение с геометрической точки зрения на основе неевклидова принципа суперпозиции, учитывающего некоммутативность.

Геометрическим выражением некоммутативности пропагаторов является их отображение в виде неколлинеарных геодезических векторов в пространстве с ненулевой гауссовой кривизной, а необратимость определяется площадью "параллелограмма", построенного на этих векторах как на смежных сторонах. В том случае, когда пропагаторы в пространстве с ненулевой гауссовой кривизной коммутативны, необратимость отсутствует. Отсутствует она также и в предположении, что все пропагаторы могут быть отображены в евклидовом пространстве, обобщением которого является гильбертово пространство [5].

В плоских пространствах, где все геодезические векторы, являющиеся отображением пропагаторов, перестановочны, необратимость отсутствует. Связь с геометрической фазой Берри (Приложение) показывает, что для необратимости необходимо существование замкнутого контура с отличной от нуля площадью в пространстве с ненулевой гауссовой кривизной.

Совместное рассмотрение физических причин необратимости, т.е. взаимодействий, с геометрическими, приведенное в Приложении, показывает, что существование растущего со временем и ограниченного функционала \tilde{J}_0 , отражающего необратимость эволюции, есть следствие ненулевой гауссовой кривизны пространства логарифмов пропагаторов, это обстоятельство можно рассматривать как геометрическое выражение утверждений авторов [5], приведенных выше.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для некоторых простых подгрупп группы $SL(2, C)$, таких как $SU(1, 1)$, $SL(2, R)$, бинарным композициям M , D , T и T' может быть дана геометрическая интерпретация. Такая возможность связана с тем, что матрице, например $A = \exp(a\sigma)$ из группы $SU(1, 1)$, может быть сопоставлен геодезический вектор \mathbf{a} на плоскости Лобачевского в ее представлении на карте Пуанкаре [14, 16]. Операции умножения матриц сопоставляется последовательное сложение таких геодезических векторов. Сопоставление матрицам геодезических векторов, а операции умножения матриц — последовательного сложения этих векторов в пространстве Лобачевского устанавливает изоморфизм матричного и геометрического представлений некоммутативных групп.

Выразим матрицу* A в виде $A = \exp(\mathbf{a}\sigma) = \exp\{(\mathbf{n}_a\sigma)a\} = \text{cha} + (\mathbf{n}_a\sigma)\text{sha}$, где $\mathbf{a}\sigma = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3$; $a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$; $\mathbf{n}_a = \mathbf{a}/a$, и перемножим две подобные матрицы $C = BA$. Результат умножения записывается в виде

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{c}\sigma) = \exp(\mathbf{b}\sigma)\exp(\mathbf{a}\sigma) = \text{cha} \cdot \text{chb} + (\mathbf{n}_a\mathbf{n}_b) \times \\ \times \text{sha} \cdot \text{shb} + \sigma \{ \mathbf{n}_a\text{sha} \cdot \text{chb} + \mathbf{n}_b\text{shb} \cdot \text{cha} + \\ + i[\mathbf{n}_b\mathbf{n}_a] \text{shb} \cdot \text{sha} \}. \end{aligned} \quad (28)$$

Геометрически выражение (28) интерпретируется следующим образом (рисунок, а). Из начала O на карте Пуанкаре отложим отрезок геодезической OA длиной a , затем из точки A отложим отрезок AB длиной b , угол между ними определяется величиной $(\mathbf{n}_b\mathbf{n}_a)$ [16]. Отрезок OB , лежащий в плоскости Лобачевского, которая определена векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} , равен длине результирующего вектора \mathbf{c} , она определяется следом произведения матриц $\text{chc} = \text{chb} \cdot \text{cha} + (\mathbf{n}_b\mathbf{n}_a)\text{shb} \cdot \text{sha}$ и соответствует формуле треугольника на плоскости Лобачевского. Вектор \mathbf{c} (изображенный отрезком геодезической OC) из-за наличия последнего члена в (28), пропорционального $[\mathbf{n}_b\mathbf{n}_a]$, не лежит в плоскости геодезических векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , он содержит ортогональную к ней составляющую, которая отображена в виде отрезка BC .

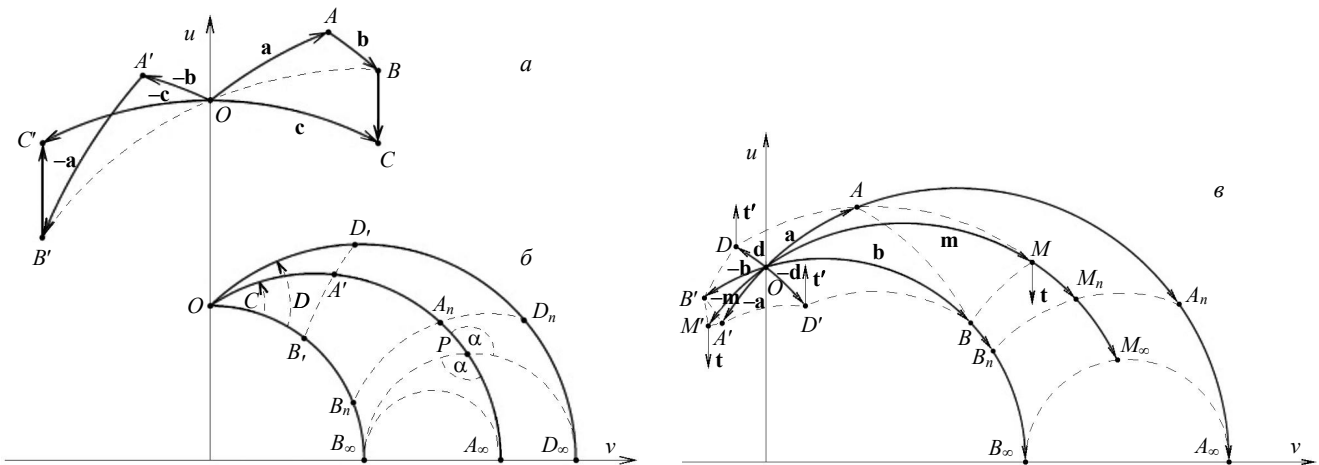
При изменении порядка перемножения матриц составляющая результата, ортогональная плоскости Лобачевского, содержащей векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} , меняет знак, она отвечает некоммутативной части произведения матриц.

Обращение матрицы C , т. е. переход к $C^{-1} = A^{-1}B^{-1}$, геометрически изображено на левой части рисунка, а. Ортогональная составляющая вектора $-\mathbf{c}$ (отрезок $B'C'$) направлена противоположно BO , поэтому геодезические векторы \mathbf{c} и $-\mathbf{c}$ лежат по разные стороны от плоскости векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Бинарные композиции M, D, T и T' также могут быть отображены в пространстве Лобачевского. Равноправным матрицам A и B на плоскости Лобачевского соответствуют геодезические векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} , исходящие из общей точки O (см. рисунок, в), они изображены отрезками OA и OB , соответственно. Из той же точки исходят векторы $-\mathbf{a}$ и $-\mathbf{b}$, соответствующие обратным матрицам A^{-1} и B^{-1} , они изображены отрезками OA' и OB' . Все эти векторы лежат в одной плоскости Лобачевского.

Матрица $M = \exp(\mathbf{m}\sigma)$ из (23), симметричная относительно перестановок A и B , имеет, согласно [14], следующие параметры вектора:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_m = (\mathbf{n}_b\text{shb} + \mathbf{n}_a\text{sha}) / \\ / \sqrt{\text{sh}^2b + 2(\mathbf{n}_b\mathbf{n}_a)\text{shb} \cdot \text{sha} + \text{sh}^2a}, \\ \text{th}(m/2) = \sqrt{\text{sh}^2b + 2(\mathbf{n}_b\mathbf{n}_a)\text{shb} \cdot \text{sha} + \text{sh}^2a} / \\ / (\text{chb} + \text{cha}). \end{aligned} \quad (29)$$



Карта Пуанкаре (полуокружности с центрами на оси V — геодезические):

а — сложение векторов в пространстве Лобачевского — векторы \mathbf{c} и $-\mathbf{c}$ лежат вне плоскости векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , векторы BC и $B'C'$ ортогональны последней;

б — отображение взаимодействий и эволюции системы в пространстве Лобачевского — угол C растет с возрастанием взаимодействия;

в — векторы \mathbf{m} и \mathbf{d} — обратимые композиции заданных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , лежащие в одной плоскости Лобачевского; векторы \mathbf{t} и \mathbf{t}' ортогональны плоскости векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} ; треугольник $OA_\infty B_\infty$ имеет бесконечно удаленные вершины на оси V , углы при этих вершинах равны нулю; OM_∞ — медиана треугольника $OA_\infty B_\infty$.

* Ниже для сокращения записи принято, что гауссова кривизна плоскости Лобачевского $C_G = -1$, что не сказывается на геометрической интерпретации. В количественных вычислениях следует учесть, что гауссова кривизна для уравнения Шредингера $C_G = -4$ [14—16]. Для учета этого обстоятельства следует в формулах геометрии Лобачевского [25] положить $k = 1/2$.

Геометрически вектор \mathbf{m} отображается отрезком геодезической OM , лежащим в той же плоскости Лобачевского, в которой расположены \mathbf{a} и \mathbf{b} , поскольку не содержит члена с $[\mathbf{n}_b\mathbf{n}_a]$. Он представляет собой диагональ "параллелограмма" $OAMB$ (четырехугольника, диагонали которого пересекаются в серединах) на гиперболической плоскости, построенного на векторах \mathbf{a}

и **b** как на смежных сторонах. Эта диагональ проходит через гиперболическую середину отрезка геодезической *AB*, при замене **a** → **b** и **b** → **a** вектор **m** не меняется.

При обращении матриц *A* и *B*, входящих в выражение для *M* (23), знаки векторов **a** и **b** меняются на противоположные (отрезки *OA'* и *OB'*), при этом вектор **m** также меняет знак (отрезок *OM'* на рисунке, *в*).

Чтобы получить выражение для бинарной композиции *D*, антисимметричной относительно перестановок, достаточно в (23) заменить *B* → *B*⁻¹ или в (29) **b** → -**b**:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_d &= (-\mathbf{n}_b \operatorname{sh} b + \mathbf{n}_a \operatorname{sh} a) / \\ & / \sqrt{\operatorname{sh}^2 b - 2(\mathbf{n}_b \mathbf{n}_a) \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} a + \operatorname{sh}^2 a}, \\ \operatorname{th}(d/2) &= \sqrt{\operatorname{sh}^2 b - 2(\mathbf{n}_b \mathbf{n}_a) \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} a + \operatorname{sh}^2 a} / \\ & / (\operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a). \end{aligned} \quad (30)$$

Геометрически результат бинарной композиции (30) отображается диагональю *OD* "параллелограмма" *OADB'*, построенного на векторах **a** и -**b** как на смежных сторонах.

Очевидно, что при перестановке матриц *A* и *B* в (24) вектор **d** меняет знак как антисимметричная диагональ "параллелограмма". Вектор **d**, как и вектор **m**, лежит в плоскости Лобачевского, определяемой векторами **a** и **b**. При обращении матриц *A* и *B* (т. е. при **a** → -**a** и **b** → -**b**) вектор **d** также меняет знак, при этом *OD* → *OD'* (см. рисунок, *в*).

Векторы **m** и **d** лежат в плоскости векторов **a** и **b** при любых углах между последними. Однако в том случае, когда **a** и **b** неколлинеарны, существует отличный от нуля вектор $[\mathbf{n}_b \mathbf{n}_a]$, ортогональный плоскости Лобачевского, в которой лежат **a** и **b**.

Представив *T* из (25) в виде

$$\begin{aligned} T &= e^{t\sigma} = e^{(\mathbf{n}_t \sigma)t} = \operatorname{ch} t + (\mathbf{n}_t \sigma) \operatorname{sh} t = \\ &= (e^{a\sigma} e^{-2b\sigma} e^{a\sigma})^{1/2} e^{-a\sigma} e^{b\sigma}, \end{aligned}$$

для параметров вектора **t** получим

$$\mathbf{n}_t = i[\mathbf{n}_b \mathbf{n}_a] / \sqrt{1 - (\mathbf{n}_b \mathbf{n}_a)^2}, \quad (31)$$

$$\operatorname{th} t = \frac{\sqrt{1 - (\mathbf{n}_b \mathbf{n}_a)^2} \operatorname{th} b \cdot \operatorname{th} a}{1 - (\mathbf{n}_b \mathbf{n}_a) \operatorname{th} b \cdot \operatorname{th} a}. \quad (32)$$

Из (31) видно, что вектор **t** всегда ортогонален векторам **a** и **b**, причем его направление меняется при перестановке **a** и **b**, но при переходе к обратным матрицам, когда **a** → -**a** и **b** → -**b**, ни его направление, ни длина не меняются.

Для операции *T'* параметры соответствующего ей вектора **t'** получаются из (31), (32) заменой **b** → -**b**. Направления векторов **t** и **t'** противоположны, длины в общем случае также различны (см. рисунок, *в*).

Из сравнения (32) с выражением Каньоли для углового дефекта "параллелограмма" на плоскости Лобачевского (или, что то же с выражением для его площа-

ди) [25] следует связь между угловым дефектом, т. е. площадью и длиной вектора **t**: *tht* = sin δ. Поэтому длины векторов **t** и **t'** определяют площади "параллелограммов" *OAMB* и *OADB'*, соответственно, на плоскости Лобачевского, эти площади, вообще говоря, различны.

Локально геометрия Лобачевского переходит в евклидову. Если векторы **a** и **b** малы, то из разложения экспоненциальных представлений матриц следует $\mathbf{m} \cong \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{d} \cong \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{t} \cong i[\mathbf{b}\mathbf{a}] \cong -\mathbf{t}'$. Эти выражения сохраняют перестановочные свойства матриц *M*, *D*, *T* и *T'*, а также их свойства при обращении, т. е. при переходе к векторам -**a** и -**b**. Однако площади соответствующих "параллелограммов" равны ($|\mathbf{t}| \cong |\mathbf{t}'|$), как это имеет место в евклидовой геометрии.

Следует отметить, что имеется связь между вектором **t** и геометрической фазой Берри [26, 27], с помощью которой был интерпретирован сдвиг интерференционных полос в эффекте Ааронова—Бома. Геометрический смысл этой фазы связан с параллельным переносом вектора по замкнутому контуру в пространстве с ненулевой гауссовой кривизной. В частном случае пространство с постоянной положительной кривизной (сфера), которому соответствуют унитарные преобразования, фаза пропорциональна телесному углу, соответствующему площади фигуры, охватываемой замкнутым контуром на сфере. В случае унитарных преобразований на группе *SU*(2) и их геометрической интерпретации площадь четырехугольника на сфере и его угловой эксцесс связаны аналогично тому, как связаны площадь и угловой дефект в геометрии Лобачевского для соответствующих преобразований на псевдоунитарной группе *SU*(1,1).

В качестве примера системы, которая описывается обратимым уравнением Шредингера и в которой может иметь место необратимость, рассмотрим мысленный эксперимент с двумя (точечными) щелями, расположенными на границе раздела двух сред. Этот пример, в котором парциальные пропагаторы принадлежат группе *SU*(1,1), рассматривался в работах [14, 15], где построен симметричный полный пропагатор *M*, и для соответствующей интерференционной картины получены величины *j_s* в произвольной конечной точке за экраном.

Для определения условий обратимости и необратимости процесса распространения из начальной точки *S* в конечную *R* выразим, следуя [14, 15], пропагаторы *A* и *B* по разным путям из *S* в *R* в форме

$$\begin{aligned} A &= e^{a\sigma} = e^{iM_1\sigma_3} e^{L\sigma_1} e^{iN_1\sigma_3}, \\ B &= e^{b\sigma} = e^{iM_2\sigma_3} e^{L\sigma_1} e^{iN_2\sigma_3}, \end{aligned} \quad (33)$$

где *N* и *M* — действие (в единицах \hbar) на путях в первой и второй средах, соответственно, величина $L = (1/2) \ln(k_2/k_1)$ (*k*₁ и *k*₂ — волновые числа в соответствующих средах) отвечает взаимодействию на границе сред.

Условие обратимости (*t* = 0), как это следует из (32), приводит к требованию $\sqrt{1 - (\mathbf{n}_b \mathbf{n}_a)^2} \operatorname{th} b \cdot \operatorname{th} a = 0$.

Это означает, что процесс обратим, если хоть один из векторов **a** или **b** равен нулю, либо если они коллинеарны.

Пользуясь (33), для параметров вектора **a** получим

$$\begin{aligned} cha &= chL \cos(N_1 + M_1); \\ n_{a1}sha &= shL \cos(N_1 - M_1); \\ n_{a2}sha &= shL \sin(N_1 - M_1); \\ n_{a3}sha &= ichL \sin(N_1 + M_1), \end{aligned} \quad (34)$$

и аналогичные формулы для **b**.

Если среды одинаковы, $k_1 = k_2$, $L = 0$, взаимодействие отсутствует, пропагаторы *A* и *B* диагональны и коммутативны, а единственная отличная от нуля компонента векторов **a** и **b** отвечает σ_3 , т. е. эти векторы коллинеарны. При этом *T* равна единичной матрице, и потому в однородной среде имеет место обратимость для любых путей и любых пар начальных и конечных точек.

Если среда неоднородна, т. е. $L \neq 0$, но пропагаторы *A* и *B* на путях, соединяющих начальную и конечную точки, удовлетворяют условиям $chL \cos(N_1 + M_1) = \pm 1$ или $chL \cos(N_2 + M_2) = \pm 1$, то длины векторов **a** и **b** равны нулю, матрицы *A* или *B* равны единичной, а потому и *T* равна единичной матрице. В этом случае имеет место обратимость.

Если среда неоднородна, а длины неколлинеарных векторов **a** и **b** отличны от нуля, то приведенное выше условие обратимости не выполняется, т. е. процесс распространения в этом случае необратим.

Ответим на вопрос о пространственном расположении пар начальных и конечных точек, для которых выполняются условия обратимости или необратимости. Для простоты ограничимся случаем симметричного расположения источника относительно щелей. В этом случае $N_1 = N_2 = N$. Скалярное произведение направляющих векторов в соответствии с (34) выражается в форме

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}_b \mathbf{n}_a) &= \\ &= \frac{sh^2 L \cos(M_2 - M_1) - ch^2 L \sin(N + M_1) \sin(N + M_2)}{\sqrt{ch^2 L \cos^2(N + M_1) - 1} \sqrt{ch^2 L \cos^2(N + M_2) - 1}}. \end{aligned} \quad (35)$$

При $L \neq 0$ (35) условие обратимости $(\mathbf{n}_b \mathbf{n}_a)^2 = 1$ приводят к $M_2 - M_1 = \pi k$, $k = 0, 1, \dots$. Оно совпадает с теми условиями, которые отвечают максимумам интерференционной картины за экраном [14, 15], для других точек за экраном оно не выполняется. Поэтому при симметричном расположении источника относительно точечных щелей процесс распространения обратим для тех конечных точек за экраном с двумя щелями на границе раздела двух сред, которые расположены на гиперболоидах вращения, удовлетворяющих условию $M_2 - M_1 = \pi k$, $k = 0, 1, \dots$, для всех остальных точек процесс распространения необратим.

Если процесс, происходящий в замкнутой системе, необратим, то это обстоятельство должно сказаться на наблюдаемых. Представляет интерес найти функцио-

нал, связанный с последними и отражающий необратимость эволюции системы.

Пусть процесс $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_1$ необратим, т. е. условие (27) не выполняется, а некоммутативные пропагаторы *A* и *B* принадлежат группе $SU(1,1)$ как в рассмотренном выше примере с двумя щелями на границе раздела двух сред. Предположим, что эволюция системы представляет собой повторяющийся процесс $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_1$. Если процесс $t_1 \rightarrow t_2$, которому соответствует преобразование исходного спинора с помощью матриц *A* и *B*, требует времени $\Delta t = t_2 - t_1$, то в процессе $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_1$ время удваивается, а *n* — кратное его повторение требует времени $2n\Delta t$. Поэтому в повторяющемся *n* раз процессе с соответствующей временной протяженностью длины векторов **a** и **b** в композиции *T*, содержащей необратимость, увеличиваются в $2n$ раз, при этом векторы \mathbf{n}_a и \mathbf{n}_b не меняются.

Таким образом, необратимость эволюции системы должна в данном случае проявиться как зависимость наблюдаемых от числа повторений *n*.

В процессе эволюции матрица плотности чистых состояний, отвечающая преобразованию спинора с помощью матрицы *T* и содержащая необратимость, имеет единственное ненулевое, положительно определенное собственное значение $\tilde{j}_0 = \tilde{\Phi}^+ \tilde{\Phi} = \Phi^+ T^+ T \Phi$. Исследуем его зависимость от числа повторений процесса $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_1$ включая $n \rightarrow \infty$, ограничившись условиями $(TrA)/2 > 1$, $(TrB)/2 > 1$, при которых длины векторов **a** и **b** действительны.

В силу некоммутативности матриц *A* и *B* величина $\mathbf{n}_b \mathbf{n}_a \neq \pm 1$, а длина вектора **t** в (32) положительна. После *n*-кратного повторения процесса $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_1$ выражение для длины вектора $\tilde{\mathbf{t}}$ согласно изложенному выше приобретает вид

$$th\tilde{t} = \frac{\sqrt{1 - (\mathbf{n}_b \mathbf{n}_a)^2} th2nb \cdot th2na}{1 - (\mathbf{n}_b \mathbf{n}_a) th2nb \cdot th2na}. \quad (36)$$

Вычисляя $T^+ T$, умножая его слева и справа на Φ^+ и Φ , соответственно, получим выражение для \tilde{j}_0 после *n*-кратного повторения процесса

$$\begin{aligned} \tilde{j}_0 &= \\ &= \frac{\left\{ 1 + \left(1 + 2 \frac{t_3^2}{t^2} \right) th^2 \tilde{t} \right\} j_0 + 2 \frac{t_1 j_1 + t_2 j_2}{t} th\tilde{t} + 2 t_3 \frac{t_1 j_2 - t_2 j_1}{t^2} th^2 \tilde{t}}{1 - th^2 \tilde{t}}, \end{aligned} \quad (37)$$

в котором j_s являются наблюдаемыми в его начале и в котором учтено, что отношения t_s/t не зависят от *n*. Учтено также то, что на группе $SU(1,1)$ a_1, a_2 — действительные, а a_3 — мнимая [14, 15], поэтому в (37) третья компонента вектора **t** выражена в виде it_3 с действительным t_3 .

Величина $\tilde{j}_0 = \tilde{\Phi}^+ \tilde{\Phi}$ положительно определена. В начале процесса, когда $n = 0$, \tilde{j}_0 совпадает с $j_0 > 0$. Знаменатель выражения (37) положителен, а числитель положителен и ограничен, поэтому с ростом \tilde{t} величина

на \tilde{J}_0 возрастает. Из выражения (36) очевидно, что \tilde{I} при $n \rightarrow \infty$ ограничено, поэтому при эволюции системы положительная наблюдаемая \tilde{J}_0 возрастает и ограничена сверху. Это позволяет считать, что собственное значение матрицы плотности чистых состояний \tilde{J}_0 может служить мерой необратимости при эволюции замкнутой системы.

Рассмотрим вопрос геометрически. С ростом числа повторений процесса возрастают длины сторон треугольника Лобачевского, n повторениям процесса соответствует треугольник OA_nB_n (см. рисунок, в). С ростом n его угловой дефект и площадь возрастают. При стремлении числа повторений к бесконечности этот треугольник переходит в $OA_\infty B_\infty$ с нулевыми углами при бесконечно удаленных вершинах A_∞ и B_∞ , его площадь определяется только углом между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} , она конечна, а потому конечен и функционал \tilde{J}_0 .

Рассмотрим также одно из физических следствий описанного подхода. Наибольшую распространенность и в связи с этим большой физический интерес представляют системы со слабым взаимодействием. Пропагаторы для процессов, происходящих в таких системах, почти диагональны, и коммутаторы матриц A и B дают малый вклад в эволюцию. Таким пропагаторам A и B соответствуют векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} с небольшим углом C между ними, поэтому ограничимся условием $\mathbf{n}_a \mathbf{n}_b = \cos C > \text{th}b \cdot \text{th}a$.

Сравним эволюцию двух таких систем, отличающихся вкладом в нее взаимодействий. Пусть первой системе в процессе $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_1$ соответствует треугольник Лобачевского OB_1A_1 (см. рисунок, в), а второй, для которой вклад взаимодействий больше на наибольшую величину, соответствует треугольник OB_1D_1 , их углы в вершине O отличаются на $\Delta C = D - C > 0$. Согласно (32) в указанной выше области углов площадь треугольника OB_1D_1 больше площади треугольника OB_1A_1 .

При эволюции систем, т. е. при $n \rightarrow \infty$, треугольникам OB_1A_1 и OB_1D_1 отвечают, соответственно, предельные треугольники $OB_\infty A_\infty$ и $OB_\infty D_\infty$ с бесконечно удаленными вершинами B_∞ , A_∞ , D_∞ . Покажем, что при увеличении вклада взаимодействий, т. е. при увеличении угла C площадь предельного треугольника уменьшается.

Изменение площади равно разности площадей треугольников $OB_\infty D_\infty$ и $OB_\infty A_\infty$. Площадь общего треугольника $OB_\infty P_\infty$ не дает вклада в изменение, поэтому последнее равно разности площадей треугольников OPD_∞ и $PA_\infty B_\infty$. Их вертикальные углы в общей вершине P равны, на рисунке, б они обозначены α . Треугольник OPD_∞ имеет один равный нулю угол в вершине D_∞ , а треугольник $PA_\infty B_\infty$ — два равных нулю угла в A_∞ и B_∞ , поэтому их площади, согласно выражению площади треугольника Лобачевского [25] (см. сноску к Приложению), имеют вид $S_2 = \pi - \Delta C - \alpha$ и $S_1 = \pi - \alpha$, соответственно. Поэтому изменение площади при увеличении угла C равно $\Delta S = S_2 - S_1 = -\Delta C < 0$, т. е. площадь уменьшается.

Поскольку, с одной стороны, при увеличении вклада взаимодействий площадь треугольника OB_1A_1 возраста-

ет, а с другой стороны — площадь предельного треугольника убывает, то в силу аддитивности площадей для достижения площади треугольника OA_nB_n (см. рисунок, б) величины, близкой к предельной, требуется меньшее число повторений процесса $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_1$, и наоборот.

Таким образом, взаимодействия ускоряют процесс достижения предельных величин функционала (37). Краткое изложение работы содержится в [28].

Авторы благодарны С. Т. Беляеву,
Ю. Л. Климонтовичу, Г. А. Котельникову,
В. С. Лисице, В. И. Манько и Л. А. Шелепину
за внимание к работе, ее обсуждения и замечания.

Л и т е р а т у р а

1. Пригожин И. От существующего к возникающему. — М.: Наука, 1985.
2. Кадомцев Б. Б. Динамика и информация. — М.: Редакция журнала УФН, 1999.
3. Климонтович Ю. Л. Статистическая теория открытых систем. Т. 3. — М.: Янус, 2001.
4. Гинзбург В. Л. // УФН. 1999. № 4. С. 419.
5. Пригожин И., Стенгерс И. Время, хаос, квант. — М.: Прогресс, 1999.
6. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989.
7. Шелепин А. Л., Шелепин Л. А. // Труды ФИАН. 1994. Т. 218. С. 3.
8. Кейн Г. Современная физика элементарных частиц. — М.: Мир, 1990.
9. Вейль Г. Теория групп и квантовая механика. — М.: Мир, 1986.
10. Райдер Р. Квантовая теория поля. — М.: Мир, 1987.
11. Фейнман Р. П. // Rev. Mod. Phys. 1948. V. 20. P. 367.
12. Фейнман Р. П. Теория фундаментальных процессов. — М.: Наука, 1978.
13. Желобенко Д. П., Штерн А. И. Представления групп Ли. — М.: Наука, 1983.
14. Лунин Н. В. // Препринт ИАЭ — 6113/6, 1998.
15. Лунин Н. В. // ДАН. 1999. Т. 368. С. 323.
16. Lunin N. V. // Preprint IAP RAS. No. 354, 1994.
17. Lunin N. V. // Proc. IX Workshop on HEP and QFT. Zvenigorod, 1994. P. 297.
18. Кадомцев Б. Б. // УФН. 1999. № 8. С. 967.
19. Lunin N. V. // Proc. 22 Int. Workshop on HEP and QFT. Protvino, 1999. P. 272.
20. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988.
21. Леонтович М. А. Введение в термодинамику. — М.: Наука, 1983.
22. Lunin N. V. // Proc. Int. Conf. Mod. Group Analysis for New Millennium. Ufa, 2000. P. 120.
23. Лунин Н. В. // Вестник Нижегородского государственного университета. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2002. № 1(25). С. 120.
24. Боум А. Квантовая механика: основы и приложения. — М.: Мир, 1990.
25. Несторович Н. М. Геометрические построения в плоскости Лобачевского. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1951.
26. Berry M. V. // Proc. R. Soc. Lond. 1984. V. A392. P. 45.
27. Berry M. V. // Phys. Today. 1990. December. P. 34.
28. Лунин Н. В., Коган В. И. // ДАН. 2004. Т. 399. С. 753.

Статья поступила в редакцию 13 апреля 2009 г.

