

УДК 537.877

## Анализ коэффициента рассеяния низкочастотного электромагнитного поля на сферической оболочке

В. А. Воробьев

*Проанализирован коэффициент рассеяния низкочастотного электромагнитного поля на сферической оболочке, находящейся в слабопроводящей среде.*

PACS: 93.85.JK

*Ключевые слова:* сферическая оболочка, коэффициент рассеяния, электромагнитное поле, магнитная проницаемость, функция Герца.

### Введение

При решении ряда задач геофизики и радиолокации исследуется электромагнитное поле в сферически слоистых средах [1].

Задача о возмущении однородного переменного магнитного поля проводящей сферической оболочкой является одной из базовых. В ряде случаев требуется учесть не только проводимость и магнитную проницаемость материала оболочки [2, 3], но и проводимость вмещающей оболочку среды и заполнителя. Решению последней задачи посвящена данная работа.

### Проводимость вмещающей среды и заполнителя

Пусть оболочка с проводимостью  $\sigma_2$  и магнитной проницаемостью  $\mu_2$ , внешним радиусом  $a_1$  и внутренним  $a_2$  находится в поле радиального магнитного диполя с магнитным моментом  $\vec{m}$ . Вмещающая оболочку среда и среда внутри оболочки имеют, соответственно, параметры  $\sigma_1, \mu_1$  и  $\sigma_3, \mu_3$ .

Пусть магнитный момент излучателя меняется по гармоническому закону. Задачу решаем в сферической системе координат. Систему координат выберем так, что ее начало совпадает с центром оболочки. Введем функцию Герца  $u$ , удовлетворяющую уравнению Гельмгольца в указанных средах [4]. В силу симметрии падающего поля компоненты результирующего поля в некоторой точке пространства на расстоянии  $R$  находятся из соотношений:

$$H_R = \frac{1}{R\mu\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \cdot \frac{\partial u}{\partial \Theta} \right);$$

$$H_\Theta = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 (Ru)}{\partial R \partial \Theta};$$

$$E_\varphi = i\omega\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial \Theta}.$$

Остальные компоненты поля равны нулю.

Функцию Герца  $u_1$  в первой среде представим в виде суммы функций падающего  $u'$  и рассеянного  $u''$  полей, которые будем искать методом разделения переменных в виде:

$$u' = -\frac{im}{4\pi K_1 R R_0^2} \times \\ \times \sum (2n+1) \psi_n(K_1 R) \xi_n^{(1)}(K_1 R) P_n(\cos \Theta);$$

$$u'' = -\frac{im}{4\pi K_1 R R_0^2} \times \\ \times \sum (2n+1) d_n \xi_n^{(1)}(K_1 R) \xi_n^{(1)}(K_1 R_0) P_n(\cos \Theta),$$

где  $R_0$  — расстояние от центра оболочки до излучателя;

$P_n(\cos \Theta)$  — полиномы Лежандра.

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \cdot J_{n+1/2}(x); \\ \xi_n^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \cdot H_{n+1/2}^{(1)}(x),$$

где  $J_{n+1/2}(x), H_{n+1/2}^{(1)}(x)$  — функции Бесселя и Ханкеля, соответственно.

Во второй и третьей средах функции Герца  $u_2$  и  $u_3$  записываются аналогично.

Коэффициенты  $d_n$  рассеянного поля, а также коэффициенты, используемые в разложении функции Герца для оболочки и заполнителя, находятся из граничных условий, что и решает задачу нахождения полей в этих средах. Коэффициент рассеяния низкочастотного поля (т. е. выполняются условия  $|k_1|a$  и  $|k_3|a \ll 1$ ) равен отношению пер-

---

**Воробьев Владимир Александрович**, старший преподаватель. Северо-Западный государственный заочный технический университет, Россия, 191186, С.-Петербург, ул. Миллионная, 5. Тел. (812) 710-62-62. Факс (812) 571-60-16. E-mail: fprkr@bk.ru

Статья поступила в редакцию 28 мая 2009 г.

вых членов разложения рассеянного и падающего полей. В этом приближении полагая  $\mu_1 = \mu_3 = 1$  и сделав замену  $\mu_2 = \mu$ , коэффициент рассеяния равен

$$D(\omega) = \frac{4m \cos x - \frac{\sin x}{x} (i\omega\mu_0 Sa + 4M)}{3 \cos x + \frac{\sin x}{x} (2M - i\omega\mu_0 Sa)}, \quad (1)$$

где  $x = \sqrt{i\sigma\omega\mu_0 h^2}$ ;

$a_1 - a_2 = h$ ;

$h_2/a = h/a = m$ ;

$\mu m = M$  — относительная продольная магнитная проницаемость;

$S = \sigma h$  — продольная электропроводность слоя или оболочки.

Из формулы (1) видно, что  $D(\omega)$  является функцией трех параметров:  $Sa$ ,  $M$  и  $m$ . Зависимость  $D(\omega)$  от  $m$  играет роль только для немагнитных оболочек, причем лишь при малых  $x$  порядка самого значения  $m$ . Ясно, что можно пренебречь этой зависимостью. Таким образом,  $D(\omega)$  существенно зависит только от двух параметров:  $Sa$  и  $M$ . Следовательно, для классификации объектов в виде тонкостенных сферических оболочек в принципе достаточно было бы работать на одной частоте, измеряя амплитуду и фазу колебаний. Однако, как будет показано ниже, не зная самих этих параметров, выбрать нужную частоту априори сложно. Поэтому чтобы разделить объекты в виде сферических оболочек хотя бы на два класса по этим параметрам, надо работать, по крайней мере, на двух частотах.

На рис. 1 представлены графики действительной и мнимой частей комплексной функции  $D$ , рассчитанные по формуле (1) для различных значений  $M$ . Для удобства в качестве независимой переменной выбрана величина  $b = \sqrt{\sigma\omega\mu_0 h^2}$ .

Из этих графиков видно, что области значений  $\omega$ , соответствующие наибольшей скорости изменения действительной и мнимой частей  $D$ , существенно отличаются. Так, например, для немагнитного объекта частота  $\omega_1$  ( $b_1 = 0,4$ ), соответствующая максимальной скорости изменения действительной части  $D$ , примерно в четыре раза больше, чем частота  $\omega_2$  ( $b_2 = 0,2$ ), соответствующая максимальной скорости изменения мнимой части  $D$ . Для магнитного объекта  $M = 10$  (что соответствует  $\mu = 100$  при  $h/a = 0,1$ ), как видно из того же графика, эти частоты отличаются уже примерно в 25 раз ( $b_{\max} \text{Re } D \approx 7-8$ ;  $b_{\max} \text{Im } D \approx 1,5$ ).

Конечно, можно работать на двух близких частотах для реальной или мнимой  $D$ , но все равно это две разные частоты, и их надо знать.

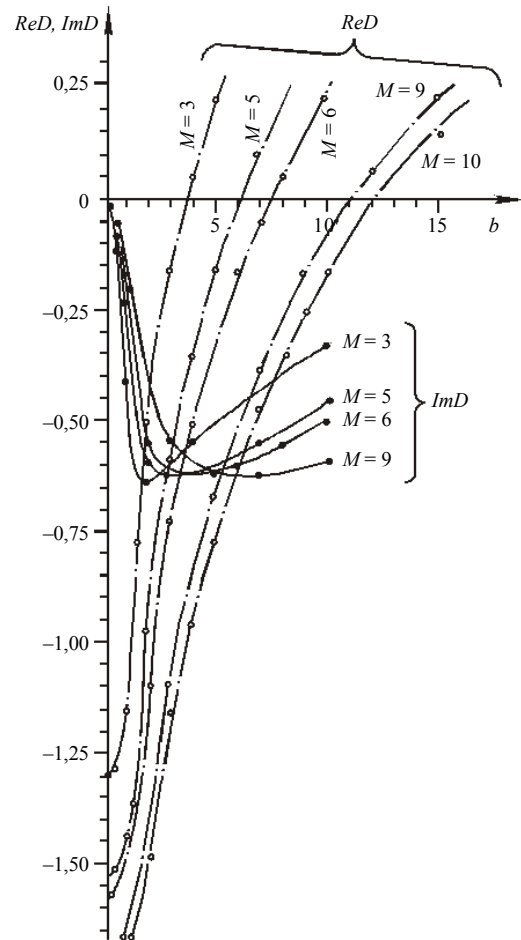


Рис. 1. Зависимость действительной и мнимой частей коэффициента рассеяния от параметра  $b$

Ясно, что необходимость подбора нужных частот для каждого из упомянутых классов объектов обусловлена тем, чтобы уровень сигнала от объекта был достаточным по амплитуде для выделения его на фоне мешающих сигналов, в том числе и от объектов — помех.

Следовательно, для решения такой задачи как селекция объектов по двум параметрам  $Sa$  и  $M$  одночастотный метод малопригоден. У реальных объектов независимых параметров разумеется больше чем два. Таким образом, для классификации реальных объектов необходимо знать поведение коэффициента рассеяния  $D(\omega)$  в широком диапазоне частот.

Обратимся вновь к графикам функции  $D(\omega)$ . Анализ поведения кривой действительной части  $D(\omega)$  показывает, что для магнитных объектов она пересекает ось абсцисс в точках, для которых частота пересечения ( $\omega_{\text{cross}}$ ) тем больше, чем больше выражены магнитные свойства объекта, т. е. величина  $M$ . Этот факт может служить существенным классификационным признаком, разделяющим объекты исследования на два класса — магнитные и немагнитные.

На рис. 2 показана зависимость (кривая II) значений  $\omega_{cross}$  от параметра  $M$ . Видно, что эта зависимость практически линейна. Исследуя далее поведение действительной и мнимой частей  $D(\omega)$ , на рис. 2 можно представить другие зависимости от  $M$ .

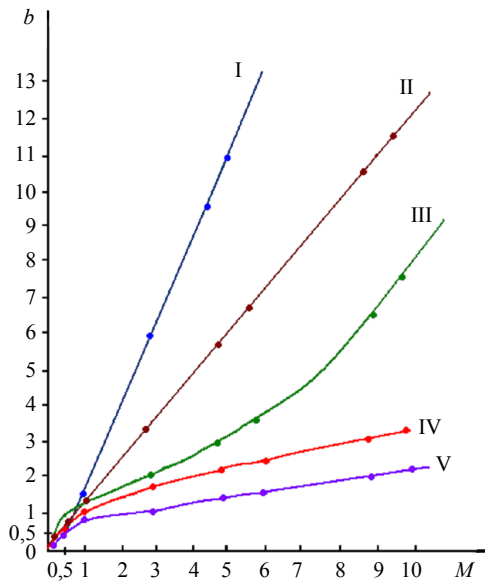


Рис. 2. Зависимости от параметра  $M$ :

I — значений мнимой части  $D(\omega)$  по уровню 0,7 правее минимумов кривых  $ImD(\omega)$ ; II — значений частот  $\omega_{cross}$ , соответствующих пересечению кривых действительной части  $D(\omega)$  с осью абсцисс; III — минимумов мнимой части кривых  $D(\omega)$ ; IV, V — максимумов первой производной по параметру в соответственно действительной и мнимой частях  $D(\omega)$

Из характера этих зависимостей видно, что при больших значениях  $M$  все они имеют почти линейную зависимость от  $M$ . Ясно, что найти из этих графиков отдельно параметры  $Sa$  и  $M$  нельзя.

Однако учитывая, что для низких частот ( $\omega \rightarrow 0$ ) индукционные токи малы, коэффициент рассеяния  $D(\omega)$  определяется только магнитными свойствами оболочки, т. е. величиной  $M$ . На рис. 3 представлена зависимость действительной части  $D(\omega)$  от параметра  $M$  при  $\omega \rightarrow 0$ . Тогда, взяв значение действительной части  $D(\omega)$  при  $\omega \rightarrow 0$  из этого графика, находим параметр  $M$ . Из совокупности кривых рис. 2 видно, что наиболее сильно с ростом  $M$  изменяется кривая I. Учитывая практически линейную зависимость этого графика, можно записать  $b = \alpha M$ , где  $\alpha$  — некоторый коэффициент, легко определяемый из того же графика. Это соотношение, учитывая, что  $b = \sqrt{\sigma \omega \mu_0 h^2}$ , можно записать в виде

$$\omega_{0,7} = \alpha^2 \frac{M}{\mu_0 Sa}$$

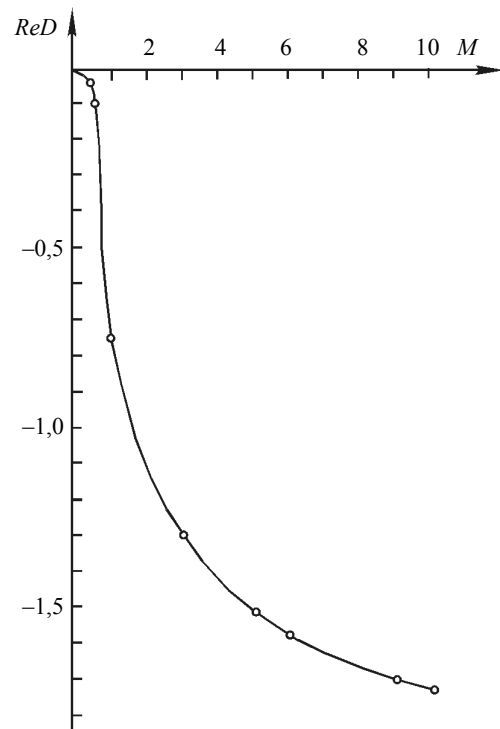


Рис. 3. Зависимость действительной части  $D(\omega)$  от параметра  $M$  при  $\omega \rightarrow 0$

Из этого уравнения находим второй параметр  $Sa$ , характеризующий проводимость материала оболочки.

### Заключение

Получено выражение для коэффициента рассеяния гармонического сигнала от сферической оболочки с учетом проводимости вмещающей среды и построена серия графиков для действительной и мнимой его частей.

Изложена методика, позволяющая на основе полученных графиков определять параметры  $Sa$  и  $M$ , характеризующие проводимость и магнитные свойства материала оболочки при использовании гармонического зондирующего сигнала.

### Литература

1. Панченко Б. А., Гизатулин М. Г. Рассеяние и поглощение электромагнитных волн слоистыми структурами. — Екатеринбург: УрТИСИ ГОУ ВПО «СибГУТИ», 2008. — 117 с.
2. Шайдуров Г. Я. Импульсные электромагнитные системы поиска. — Красноярск: КГТУ, 1999. — 315 с.
3. Седельников Э. С. Анализ и синтез геофизических систем на примере электроразведки с использованием сверхдлинных волн. — М.: ЦНИГРИ, 2006.
4. Светов Б. С., Губаненко В. П. Аналитические решения электродинамических задач. — М.: Наука, 1988.

---

## **Analysis of reflection coefficient of a lowfrequency electromagnetic field in the spherical layer located on a lowconducting medium**

*V. A. Vorob'ev*

North-West State Technical University by Correspondence, 5 Million str., 191186, St. Peterburg, Russia

E-mail: fpkp@bk.ru

*The article analyzed the reflection coefficient of a lowfrequency electromagnetic field in the spherical layer located on a lowconducting medium.*

PACS: 93.85.JK

*Keywords:* spherical layer, coefficient of a lowfrequency, lowconducting medium, magnetic permeability, Hertz function.

Bibliography — 4 references.

*Received 28 May 2009*