

УДК 537.533

## Дифференциальные уравнения, определяющие отклонение частиц ионного пучка от осевой траектории в электрических и магнитных полях

О. А. Байсанов, Г. А. Доскеев, З. Г. Зарипова, И. Ф. Спивак-Лавров

*Получены точные дифференциальные уравнения, определяющие отклонения траекторий заряженных частиц от осевой траектории, в криволинейных координатах, связанных с осевой траекторией пучка, в виде, удобном для проведения численных расчетов динамики пучков заряженных частиц, в том числе с учетом релятивизма. Эти уравнения записаны также в линейном приближении.*

PACS: 41.85.-i

*Ключевые слова:* дифференциальные уравнения, осевая траектория, пучок, релятивизм.

### Введение

Траекторный метод исследования пучков заряженных частиц, основанный на использовании криволинейной системы координат, связанной с осевой траекторией пучка, по-видимому, впервые был использован в работе Кота [1] и получил дальнейшее развитие в работах Гринберга, Стэррока, Касьянкова и Вандакурова [2—5]. Отметим, что точные уравнения траектории заряженной частицы в криволинейных координатах, полученные в работах [2—5], непосредственно не интегрировались.

На практике использовались лишь параксиальные уравнения и абберационная теория [3—5], причем в основном исследовались системы, названные в [3] ортогональными.

Общие свойства фокусировки для ортогональных систем на основе параксиальных уравнений рассмотрены в работе [6], а в работах [7, 8] в линейном приближении исследованы общие фокусирующие и диспергирующие свойства систем со средней плоскостью, являющейся плоскостью симметрии электрического и антисимметрии магнитного полей, которые также относятся к классу ортогональных, и найден общий критерий качества статических масс-спектрометров.

В работах [9—12] были получены и численно проинтегрированы точные уравнения траектории в

криволинейных координатах для полей со средней плоскостью. В них показана плодотворность использования точных уравнений траектории для расчета параксиальных свойств и аббераций, а также для нахождения пределов применимости абберационной теории.

В общем случае, когда кручение осевой траектории отлично от нуля, связанная с ней криволинейная система координат не является локально-ортогональной. Это приводит к трудностям при вычислении градиентов потенциалов в точках, удаленных от осевой траектории. Ортогональной является лишь тройка орт на самой осевой траектории. В данной работе показано, что с помощью соотношений, связывающих координаты точек в базовой декартовой системе с их координатами в криволинейной системе, градиенты потенциалов могут быть вычислены в нужных точках в декартовых координатах, а затем спроектированы на ортогональные орты, связанные с осевой траекторией. Трудности, возникающие при вычислении градиентов потенциалов, легко разрешаются.

### Точные уравнения

Электрическое и магнитное поля произвольной корпускулярно-оптической системы будем описывать электростатическим  $\varphi \equiv \varphi(x, y, z)$  и скалярным магнитостатическим  $\omega \equiv \omega(x, y, z)$  потенциалами, заданными в некоторой декартовой системе координат  $x, y, z$ . В области пространства, свободной от зарядов и токов, напряженность электрического поля  $\vec{E}$  и индукция магнитного поля  $\vec{B}$  выражаются через градиенты скалярных потенциалов  $\varphi$  и  $\omega$ :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi, \quad \vec{B} = -\vec{\nabla} \omega. \quad (1)$$

**Байсанов Орда Абдуалиевич**, начальник отдела.

Военный институт сил воздушной обороны  
им. Т. Я. Бегельдинова.

Казахстан, 030000, г. Актобе, пр. А. Молдагуловой, 16.

**Доскеев Гималин Алтынбаевич**, доцент.

**Зарипова Зауре Гизатовна**, преподаватель кафедры.

**Спивак-Лавров Игорь Феликсович**, зав. кафедрой.

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова.

Казахстан, 030000, г. Актобе, ул. Бр. Жубановых, 263.

Тел. 8 (7132) 54-37-56.

E-mail: spivakif@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 18 ноября 2009 г.

Ориентируясь в дальнейшем на рассмотрение пучков заряженных частиц с разбросом по массам и энергиям, представим массу частицы в виде

$$m = m_c(1 + \gamma),$$

а энергию частицы на входе в систему как

$$W_0 = -(1 + \varepsilon)e\phi_0,$$

где  $m_c$  — масса "центральной" частицы, движущейся по осевой траектории;

$\gamma$  — безразмерный параметр, определяющий разброс частиц по массе;

$\varepsilon$  — безразмерный параметр, определяющий разброс частиц по энергии в предметной области на входе в систему, где электростатический потенциал постоянен и равен  $\phi_0$ .

Для осевой траектории  $\gamma = \varepsilon = 0$ . Электростатический потенциал  $\phi$  нормирован так, что он равен нулю там, где скорость частиц равна нулю. Здесь и далее индекс "0" обозначает значения переменных в предметной области на входе в корпускулярно-оптическую систему, а индекс "c" — значения величин на осевой траектории.

Введем безразмерные скалярные потенциалы  $\Phi$  и  $\Omega$ , которые связаны с электростатическим потенциалом  $\phi$  и магнитостатическим  $\omega$  соотношениями:

$$\Phi = -\frac{e\phi}{m_c c^2}, \quad \Omega = -\frac{e\omega}{m_c c},$$

где  $c$  — скорость света в вакууме.

Уравнение движения заряженной частицы в безразмерных переменных запишем в виде

$$(1 + \gamma) \frac{d\vec{\beta}}{d\tau} = \vec{\nabla}\Phi + \vec{\beta} \times \vec{\nabla}\Omega, \quad (2)$$

где  $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$  — безразмерная скорость;  $\tau = ct$  имеет размерность длины.

Исключая время из уравнения (2) с помощью закона сохранения энергии и переходя к дифференцированию по длине дуги  $l$  траектории частицы, получим уравнение траектории произвольной заряженной частицы пучка в безразмерных переменных:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dl^2} = \frac{\vec{\nabla}\Phi}{2(\Phi + \varepsilon\Phi_0)} + \frac{1}{\sqrt{2(\Phi + \varepsilon\Phi_0)(1 + \gamma)}} \frac{d\vec{r}}{dl} \times \left[ \vec{\nabla}\Omega - \frac{d\vec{r}}{dl} \left( \frac{d\vec{r}}{dl} \cdot \frac{\vec{\nabla}\Phi}{2(\Phi + \varepsilon\Phi_0)} \right) \right], \quad (3)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор частицы.

Если за основу взять релятивистское уравнение движения, приведенное в [13], то в безразмерных переменных оно запишется в виде

$$(1 + \gamma) \frac{d\vec{\beta}}{d\tau} = \sqrt{1 - \beta^2} \left[ \vec{\nabla}\Phi + \vec{\beta} \times \vec{\nabla}\Omega - \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{\nabla}\Phi) \right]. \quad (4)$$

Используя релятивистский закон сохранения энергии

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1 + \frac{\Phi + \varepsilon\Phi_0}{1 + \gamma}$$

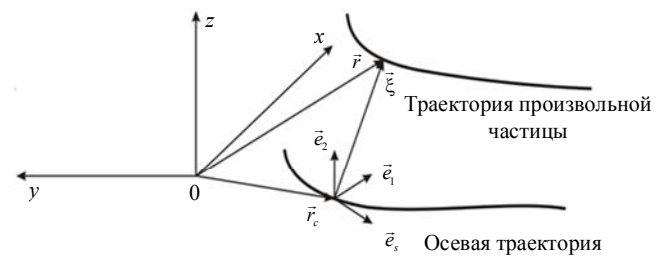
и переходя в (4) к дифференцированию по  $l$ , получим релятивистское уравнение траектории

$$\frac{d^2\vec{r}}{dl^2} = \frac{\vec{\nabla}\Phi_R}{2\Phi_R} + \frac{1}{\sqrt{2\Phi_R(1 + \gamma)}} \frac{d\vec{r}}{dl} \times \left[ \vec{\nabla}\Omega - \frac{d\vec{r}}{dl} \left( \frac{d\vec{r}}{dl} \cdot \frac{\vec{\nabla}\Phi_R}{2\Phi_R} \right) \right]. \quad (5)$$

Уравнение (5) отличается от нерелятивистского уравнения (3) лишь заменой  $\Phi + \varepsilon\Phi_0$  на так называемый "релятивистский" потенциал  $\Phi_R$ , определяемый формулой

$$\Phi_R = (\Phi + \varepsilon\Phi_0) \left( 1 + \frac{\Phi + \varepsilon\Phi_0}{2(1 + \gamma)} \right). \quad (6)$$

Для исследования поведения пучков заряженных частиц введем криволинейную систему координат  $q_1, q_2, s$ , связанную с осевой траекторией пучка, по которой движется некоторая "центральная" частица с зарядом  $e$  и массой  $m_e$ . ( $s$  — длина дуги осевой траектории). Орты  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_s$  образуют ортогональную правую систему, причем вектор  $\vec{e}_s$  направлен по касательной к осевой траектории, вектор  $\vec{e}_1$  — по нормали, а вектор  $\vec{e}_2$  — по бинормали, как показано на рисунке.



Выбор криволинейных координат

Точные уравнения траектории произвольной частицы пучка в криволинейных координатах получим из дифференциального уравнения траекто-

ри заряженной частицы в естественных координатах (3). Радиус-вектор  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  произвольной траектории пучка представим в виде

$$\vec{r}(s) = \vec{r}_c(s) + \vec{\xi}(s), \quad (7)$$

где  $\vec{r}_c(s)$  — радиус-вектор, описывающий осевую траекторию пучка, а

$$\vec{\xi}(s) = q_1(s)\vec{e}_1 + q_2(s)\vec{e}_2 \quad (8)$$

определяет отклонение произвольной траектории пучка от осевой траектории в плоскости, перпендикулярной к осевой траектории. Из (3), полагая  $\varepsilon = 0, \gamma = 0, dl = ds$ , получим дифференциальное уравнение для осевой траектории. Будем считать, что решение  $\vec{r}_c(s)$  этого уравнения при определенных начальных условиях известно, т. е.

$$\vec{r}_c(s) = \vec{i}x_c(s) + \vec{j}y_c(s) + \vec{k}z_c(s). \quad (9)$$

Орты криволинейной системы координат  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_s$  связаны с радиусом-вектором осевой траектории  $\vec{r}_c(s)$  следующими соотношениями [14]:

$$\vec{e}_s = \frac{d\vec{r}_c}{ds} \equiv \vec{r}'_c, \quad \vec{e}_1 = \frac{1}{k_1} \frac{d^2\vec{r}_c}{ds^2} \equiv \frac{1}{k_1} \vec{r}''_c, \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_s \times \vec{e}_1, \quad (10)$$

где  $k_1 \equiv k_1(s)$  — кривизна осевой траектории, которая определяется выражением

$$k_1 = \left| \frac{d^2\vec{r}_c}{ds^2} \right| = \sqrt{x_c''^2 + y_c''^2 + z_c''^2}.$$

Здесь и в дальнейшем штрихи обозначают дифференцирование по длине дуги осевой траектории  $s$ . Используя формулы (8)—(10), определим производную

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \equiv \vec{r}' = \vec{e}_s + q'_1\vec{e}_1 + q_1 \frac{d\vec{e}_1}{ds} + q'_2\vec{e}_2 + q_2 \frac{d\vec{e}_2}{ds}. \quad (11)$$

С помощью формул Серре—Френе [13]

$$\frac{d\vec{e}_s}{ds} = k_1\vec{e}_1, \quad \frac{d\vec{e}_2}{ds} = k_2\vec{e}_1, \quad \frac{d\vec{e}_1}{ds} = -k_1\vec{e}_s - k_2\vec{e}_2,$$

где  $k_2 \equiv k_2(s)$  — кручение осевой траектории, определяемое формулой

$$k_2 = -\vec{e}_s \cdot \left( \vec{e}_1 \frac{d\vec{e}_1}{ds} \right) = -\frac{1}{k_1^2} [x'_c(y''_c z'''_c - y'''_c z''_c) + y'_c(z''_c x'''_c - z'''_c x''_c) + z'_c(x''_c y'''_c - x'''_c y''_c)],$$

запишем (11) в виде

$$\vec{r}' = (q'_1 + k_2 q_2)\vec{e}_1 + (q'_2 - k_2 q_2)\vec{e}_2 + (1 - k_1 q_1)\vec{e}_s. \quad (12)$$

Соответственно, для элемента дуги произвольной траектории  $dl$  получим выражение

$$dl = |d\vec{r}| = r' ds = \sqrt{(q'_1 + k_2 q_2)^2 + (q'_2 - k_2 q_1)^2 + (1 - k_1 q_1)^2} ds. \quad (13)$$

Из (12) и (13) найдем первую и вторую производные радиуса-вектора  $\vec{r}$  по  $l$ :  $\frac{d\vec{r}}{dl}$  и  $\frac{d^2\vec{r}}{dl^2}$ .

Используемая криволинейная система координат в общем случае не является локально-ортогональной. Это вносит некоторые затруднения в вычисление градиентов потенциалов в точках, отстоящих от осевой траектории, в том случае, когда потенциалы заданы в виде функций криволинейных координат  $q_1, q_2, s$  [2—5]. В данной работе потенциалы считаются известными функциями декартовых координат  $x, y, z$ , что соответствует постановке реальной физической задачи. При этом градиенты потенциалов вычисляются следующим образом.

Орты  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_s$  криволинейной системы выражаются через орты  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  декартовой системы с помощью формул (9) и (10):

$$\vec{e}_1 = \vec{i} \frac{x''_c}{k_1} + \vec{j} \frac{y''_c}{k_1} + \vec{k} \frac{z''_c}{k_1}; \quad \vec{e}_2 = \vec{i} \frac{y'_c z''_c - z'_c y''_c}{k_1} + \vec{j} \frac{z'_c x''_c - x'_c z''_c}{k_1} + \vec{k} \frac{x'_c y''_c - y'_c x''_c}{k_1}, \quad (14) \quad \vec{e}_s = \vec{i} x'_c + \vec{j} y'_c + \vec{k} z'_c.$$

Используя формулы (14), можно записать выражение для градиента потенциала  $\Phi$ , аналогичное выражение справедливо и для  $\Omega$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \Phi &= \vec{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \\ &= \vec{e}_1 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{x''_c}{k_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{y''_c}{k_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{z''_c}{k_1} \right) + \vec{e}_2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{y'_c z''_c - z'_c y''_c}{k_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{z'_c x''_c - x'_c z''_c}{k_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{x'_c y''_c - y'_c x''_c}{k_1} \right) + \\ &\quad + \vec{e}_s \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} x'_c + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y'_c + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z'_c \right) = \\ &= \vec{e}_1 (\vec{\nabla} \Phi)_{q_1} + \vec{e}_2 (\vec{\nabla} \Phi)_{q_2} + \vec{e}_s (\vec{\nabla} \Phi)_s. \end{aligned} \quad (15)$$

где  $(\vec{\nabla}\Phi)_{q_1}$ ,  $(\vec{\nabla}\Phi)_{q_2}$ ,  $(\vec{\nabla}\Phi)_s$  — проекции градиента потенциала, вычисленного в точке с координатами  $x, y, z$ , на орты  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_s$  в соответствующей точке осевой траектории.

Подставляя (14) в (7) и (8), получим связь между декартовыми  $x, y, z$  и криволинейными координатами  $q_1, q_2, s$ , т. е.

$$\begin{aligned} \vec{r}(s) &= \vec{r}_c + q_1 \vec{e}_1 + q_2 \vec{e}_2 = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z = \\ &= \vec{i} \left( x_c + q_1 \frac{x_c''}{k_1} + q_2 \frac{y_c' z_c'' - z_c' y_c''}{k_1} \right) + \\ &+ \vec{j} \left( y_c + q_1 \frac{y_c''}{k_1} + q_2 \frac{z_c' x_c'' - x_c' z_c''}{k_1} \right) + \\ &+ \vec{k} \left( z_c + q_1 \frac{z_c''}{k_1} + q_2 \frac{x_c' y_c'' - y_c' x_c''}{k_1} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Используя найденные выражения, получим из (3) дифференциальные уравнения второго порядка для функций  $q_1(s)$  и  $q_2(s)$ , разрешенных относительно старших производных. Они могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} q_1'' &= -k_1 + (k_1^2 + k_2^2) q_1 - k_2' q_2 - 2k_2 q_2' - \\ &- \frac{q_1' + k_2 q_2}{1 - k_1 q_1} (2k_1 q_1' + k_1' q_1 + k_1 k_2 q_2) + \\ &+ \frac{r'^2}{2(\Phi + \varepsilon \Phi_0)} \left[ (\vec{\nabla}\Phi)_{q_1} - \frac{q_1' + k_2 q_2}{1 - k_1 q_1} (\vec{\nabla}\Phi)_s \right] + \\ &+ \frac{r'}{\sqrt{2(\Phi + \varepsilon \Phi_0)(1 + \gamma)}} \left[ (q_2' - k_2 q_1) (\vec{\nabla}\Omega)_s + \right. \\ &+ \frac{(q_1' + k_2 q_2)(q_2' - k_2 q_1)}{1 - k_1 q_1} (\vec{\nabla}\Omega)_{q_1} - \\ &\left. - \frac{(1 - k_1 q_1)^2 + (q_1' + k_2 q_2)^2}{1 - k_1 q_1} (\vec{\nabla}\Omega)_{q_2} \right]; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} q_2'' &= k_2' q_1 + 2k_2 q_1' + k_2^2 q_2 - \\ &- \frac{q_1' + k_2 q_2}{1 - k_1 q_1} (2k_1 q_1' + k_1' q_1 + k_1 k_2 q_2) + \\ &+ \frac{r'^2}{2(\Phi + \varepsilon \Phi_0)} \left[ (\vec{\nabla}\Phi)_{q_2} - \frac{q_2' - k_2 q_1}{1 - k_1 q_1} (\vec{\nabla}\Phi)_s \right] + \\ &+ \frac{r'}{\sqrt{2(\Phi + \varepsilon \Phi_0)(1 + \gamma)}} \left[ -(q_1' + k_2 q_2) (\vec{\nabla}\Omega)_s + \right. \\ &+ \frac{(1 - k_1 q_1)^2 + (q_2' - k_2 q_1)^2}{1 - k_1 q_1} (\vec{\nabla}\Omega)_{q_1} - \\ &\left. - \frac{(q_1' + k_2 q_2)(q_2' - k_2 q_1)}{1 - k_1 q_1} (\vec{\nabla}\Omega)_{q_2} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Основной особенностью найденных точных уравнений траекторий (17) и (18) является то, что при их интегрировании сразу вычисляются отклонения  $q_1(s)$  и  $q_2(s)$  произвольной частицы пучка от осевой траектории. Это значительно повышает точность расчетов по сравнению с обычным подходом в случае, когда отклонение вычисляется как разность больших чисел, обычных координат частиц.

Полученные уравнения позволяют с высокой точностью описывать поведение практически любых пучков в корпускулярно-оптических системах, рассматривая их сечения плоскостями  $s = \text{const}$ , перпендикулярными осевой траектории, и не ограничиваясь требованием малости  $q_1, q_1', q_2, q_2', \varepsilon, \gamma$ , как это обычно предполагается в корпускулярной оптике.

Условием, ограничивающим применение этих уравнений, является требование однозначности определения координат, которое выполняется в случае, когда значения координат  $q_1$  и  $q_2$  не превосходят радиусов кривизны и кручения.

Уравнения (17) и (18) могут использоваться также в случае, когда потенциалы достаточно медленно изменяются со временем  $t$ , т. е.  $\varphi \equiv \varphi(x, y, z, t)$  и  $\omega \equiv \omega(x, y, z, t)$ , но по-прежнему справедливы формулы (1) для напряженности электрического и индукции магнитного полей. Здесь для каждой частицы пучка, кроме ее декартовых координат  $x(s), y(s), z(s)$ , определяемых по формулам (16), можно найти и время  $t(s)$ . Учитывая (13), получим

$$\begin{aligned} t(s) &= \int_0^s \frac{dl}{v(s)} = \\ &= \int_0^s \frac{\sqrt{(q_1' + k_2 q_2)^2 + (q_2' - k_2 q_1)^2 + (1 - k_1 q_1)^2}}{v(s)} ds. \end{aligned} \quad (19)$$

Входящая в формулу (19) скорость частицы  $v(s)$  вычисляется по формуле:

в нерелятивистском случае

$$v(s) = \frac{c}{\sqrt{1 + \gamma}} \sqrt{2(\Phi + \varepsilon \Phi_0)}; \quad (20)$$

в релятивистском случае

$$v(s) = \frac{c}{\sqrt{1 + \gamma}} \frac{\sqrt{2\Phi_R}}{1 + \frac{\Phi + \varepsilon \Phi_0}{1 + \gamma}},$$

где релятивистский потенциал  $\Phi_R$  определяется выражением (6).

### Линейные уравнения

Найдем приближенные уравнения траектории заряженной частицы, ограничившись учетом членов первого порядка малости относительно величин  $q_1, q_1', q_2, q_2', \varepsilon, \gamma$  в уравнениях (17), (18).

Запишем первые члены разложения потенциала  $\Phi(x, y, z)$  вблизи осевой траектории, определяемой радиусом-вектором  $\vec{r}(s) = \vec{i} x_c(s) + \vec{j} y_c(s) + \vec{k} z_c(s)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = & f + f_x(x - x_c) + f_y(y - y_c) + \\ & + f_z(z - z_c) + \frac{1}{2} [f_{xx}(x - x_c)^2 + f_{yy}(y - y_c)^2 + \\ & + f_{zz}(z - z_c)^2 + 2f_{xy}(x - x_c)(y - y_c) + \\ & + 2f_{xz}(x - x_c)(z - z_c) + 2f_{yz}(y - y_c)(z - z_c)], \end{aligned} \quad (21)$$

где  $f \equiv f(s) = \Phi(x_c, y_c, z_c)$  — распределение потенциала на осевой траектории;

$f_x, f_y, f_z, f_{xy}, f_{xz}, f_{yz}$  — частные производные потенциала по соответствующим декартовым координатам, определенные также на осевой траектории (например,  $f_x \equiv f_x(s) = \Phi_x(x_c, y_c, z_c)$ ).

Используя для разностей  $x - x_c, y - y_c, z - z_c$  выражения, получаемые из (16), представим разложение потенциала (21) в виде функции криволинейных координат  $q_1, q_2, s$ :

$$\begin{aligned} \Phi(q_1, q_2, s) = & f + q_1 f_{q_1} + q_2 f_{q_2} + \\ & + \frac{1}{2} (q_1^2 f_{q_1 q_1} + 2q_1 q_2 f_{q_1 q_2} + q_2^2 f_{q_2 q_2}), \end{aligned}$$

где частные производные потенциала по криволинейным координатам определяются следующими выражениями:

$$f_{q_1} \equiv f_{q_1}(s) = \frac{1}{k_1} (f_x x_c'' + f_y y_c'' + f_z z_c''); \quad (22)$$

$$\begin{aligned} f_{q_2} \equiv f_{q_2}(s) = & \frac{1}{k_1} [f_x (y_c' z_c'' - y_c'' z_c') + \\ & + f_y (x_c' z_c'' - x_c'' z_c') + f_z (x_c' y_c'' - x_c'' y_c')]; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} f_{q_1 q_1} \equiv f_{q_1 q_1}(s) = & \frac{1}{k_1^2} (f_{xx} x_c''^2 + f_{yy} y_c''^2 + f_{zz} z_c''^2 + \\ & + 2f_{xy} x_c'' y_c'' + 2f_{xz} x_c'' z_c'' + 2f_{yz} y_c'' z_c''); \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} f_{q_1 q_2} \equiv f_{q_1 q_2}(s) = & \frac{1}{k_1^2} \{ f_{xx} x_c'' (y_c' z_c'' - y_c'' z_c') + \\ & + f_{yy} y_c'' (x_c' z_c'' - x_c'' z_c') + f_{zz} z_c'' (x_c' y_c'' - x_c'' y_c') + \\ & + f_{xy} [y_c'' (y_c' z_c'' - y_c'' z_c') + x_c'' (x_c' z_c'' - x_c'' z_c')] + \\ & + f_{xz} [z_c'' (y_c' z_c'' - y_c'' z_c') + x_c'' (x_c' y_c'' - x_c'' y_c')] + \\ & + f_{yz} [z_c'' (x_c' z_c'' - x_c'' z_c') + y_c'' (x_c' y_c'' - x_c'' y_c')] \}; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} f_{q_2 q_2} \equiv f_{q_2 q_2}(s) = & \frac{1}{k_1^2} [f_{xx} (y_c' z_c'' - y_c'' z_c')^2 + \\ & + f_{yy} (x_c' z_c'' - x_c'' z_c')^2 + f_{zz} (x_c' y_c'' - x_c'' y_c')^2 + \\ & + 2f_{xy} (y_c' z_c'' - y_c'' z_c') (x_c' z_c'' - x_c'' z_c') + \\ & + 2f_{xz} (y_c' z_c'' - y_c'' z_c') (x_c' y_c'' - x_c'' y_c') + \\ & + 2f_{yz} (x_c' z_c'' - x_c'' z_c') (x_c' y_c'' - x_c'' y_c')]. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогичным образом запишем разложение магнитостатического потенциала  $\Omega(x, y, z)$  вблизи осевой траектории в виде функции криволинейных координат  $q_1, q_2, s$ :

$$\begin{aligned} \Omega(q_1, q_2, s) = & h + q_1 h_{q_1} + q_2 h_{q_2} + \\ & + \frac{1}{2} (q_1^2 h_{q_1 q_1} + 2q_1 q_2 h_{q_1 q_2} + q_2^2 h_{q_2 q_2}), \end{aligned}$$

где  $h \equiv h(s) = \Omega(x_c, y_c, z_c)$  — распределение магнитостатического потенциала на осевой траектории;

$h_{q_1}, h_{q_2}, h_{q_1 q_1}, h_{q_1 q_2}, h_{q_2 q_2}$  — частные производные потенциала по соответствующим криволинейным координатам, взятые также на осевой траектории.

Они выражаются через частные производные потенциала по декартовым координатам на осевой траектории с помощью соотношений, аналогичных (22)—(26).

Найдем в линейном приближении компоненты градиента потенциала  $(\vec{\nabla} \Phi)_{q_1}, (\vec{\nabla} \Phi)_{q_2}, (\vec{\nabla} \Phi)_s$ , входящие в уравнения (17) и (18). Используя выражения (21), запишем  $\vec{\nabla} \Phi$  в виде

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \Phi = & \vec{i} [f_x + f_{xx}(x - x_c) + f_{xy}(y - y_c) + f_{xz}(z - z_c)] + \\ & + \vec{j} [f_y + f_{yy}(y - y_c) + f_{xy}(x - x_c) + f_{yz}(z - z_c)] + \\ & + \vec{k} [f_z + f_{zz}(z - z_c) + f_{xz}(x - x_c) + f_{yz}(y - y_c)]. \end{aligned} \quad (27)$$

Применяя формулы (27) и (15), получим выражения для составляющих градиента потенциала:

$$\begin{aligned}
 (\vec{\nabla} \Phi)_{q_1} &= \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{e}_i = \frac{x_c''}{k_1} \times \\
 &\times [f_x + f_{xx}(x-x_c) + f_{xy}(y-y_c) + f_{xz}(z-z_c)] + \\
 &+ \frac{y''}{k_1} [f_y + f_{yy}(y-y_c) + f_{xy}(x-x_c) + f_{yz}(z-z_c)] + \\
 &+ \frac{z''}{k_1} [f_z + f_{zz}(z-z_c) + f_{xz}(x-x_c) + f_{yz}(y-y_c)]; \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{\nabla} \Phi)_{q_2} &= \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{e}_2 = \frac{y'_c z''_c - y''_c z'_c}{k_1} \times \\
 &\times [f_x + f_{xx}(x-x_c) + f_{xy}(y-y_c) + f_{xz}(z-z_c)] + \\
 &+ \frac{x''_c z'_c - x'_c z''_c}{k_1} [f_y + f_{yy}(y-y_c) + \\
 &+ f_{xy}(x-x_c) + f_{yz}(z-z_c)] + \frac{x'_c y''_c - x''_c y'_c}{k_1} \times \\
 &\times [f_z + f_{zz}(z-z_c) + f_{xz}(x-x_c) + f_{yz}(y-y_c)]; \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{\nabla} \Phi)_s &= \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{e}_s = x'_c [f_x + f_{xx}(x-x_c) + \\
 &+ f_{xy}(y-y_c) + f_{xz}(z-z_c)] + y'_c [f_y + \\
 &+ f_{yy}(y-y_c) + f_{xy}(x-x_c) + f_{yz}(z-z_c)] + \\
 &+ z'_c [f_z + f_{zz}(z-z_c) + f_{xz}(x-x_c) + f_{yz}(y-y_c)]. \quad (30)
 \end{aligned}$$

Подставляя в (28)—(30) для разностей  $x-x_c$ ,  $y-y_c$ ,  $z-z_c$  выражения, получаемые из (16), найдем

$$(\vec{\nabla} \Phi)_{q_1} = f_{q_1} + q_1 f_{q_1 q_1} + q_2 f_{q_1 q_2}; \quad (31)$$

$$(\vec{\nabla} \Phi)_{q_2} = f_{q_2} + q_1 f_{q_1 q_2} + q_2 f_{q_2 q_2}; \quad (32)$$

$$(\vec{\nabla} \Phi)_s = f'. \quad (33)$$

В последних уравнениях используются частные производные потенциала по криволинейным координатам на осевой траектории, определенные выражениями (22)—(26). Формулы, аналогичные (31)—(33), можно записать и для компонент градиента магнитостатического потенциала  $(\vec{\nabla} \Omega)_{q_1}$ ,  $(\vec{\nabla} \Omega)_{q_2}$ ,  $(\vec{\nabla} \Omega)_s$ .

В линейном приближении из формулы (13) найдем

$$r' = 1 - k_1 q_1, \quad (34)$$

а используя формулу (20), в линейном приближении получим также следующие выражения:

$$\frac{1}{2(\Phi + \varepsilon \Phi_0)} = \frac{1}{2f} \left( 1 - q_1 \frac{f_{q_1}}{f} - q_2 \frac{f_{q_2}}{f} - \varepsilon \frac{f_0}{f} \right); \quad (35)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2(\Phi + \varepsilon \Phi_0)}} = \frac{1}{\sqrt{2f}} \left( 1 - q_1 \frac{f_{q_1}}{2f} - q_2 \frac{f_{q_2}}{2f} - \varepsilon \frac{f_0}{2f} \right). \quad (36)$$

Подставляя формулы (31)—(36) в точные уравнения траектории (17), (18) и удерживая в них только члены первого порядка малости по  $q_1$ ,  $q'_1$ ,  $q_2$ ,  $q'_2$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ , получим уравнения траектории заряженной частицы в линейном приближении:

$$\begin{aligned}
 &q''_1 + q'_1 \frac{f'}{2f} + q'_2 \left( 2k_2 - \frac{h'}{\sqrt{2f}} \right) + \\
 &+ q_1 \left[ - (k_1^2 + k_2^2) + \frac{f_{q_1}^2}{2f^2} - \frac{f_{q_1 q_1}}{2f} + 2k_1 \frac{f_{q_1}}{2f} + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{\sqrt{2f}} \left( k_2 h' - 2k_1 h_{q_2} - \frac{f_{q_1} h_{q_2}}{2f} + h_{q_1 q_2} \right) \right] + \\
 &+ q_2 \left[ k_2' + \frac{f_{q_1} f_{q_2}}{2f^2} - \frac{f_{q_1 q_2}}{2f} + k_2 \frac{f'}{2f} + \frac{1}{\sqrt{2f}} \times \right. \\
 &\times \left. \left( - \frac{f_{q_2} h_{q_2}}{2f} + h_{q_2 q_2} \right) \right] = \frac{f_0}{2f} \left( \frac{h_{q_2}}{\sqrt{2f}} - \frac{f_{q_1}}{f} \right) \varepsilon + \frac{h_{q_2}}{2\sqrt{2f}} \gamma;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &q''_2 + q'_1 \left( \frac{h'}{\sqrt{2f}} - 2k_2 \right) + q'_2 \frac{f'}{2f} + \\
 &+ q_1 \left[ -k_2' + \frac{f_{q_1} f_{q_2}}{2f^2} - \frac{f_{q_1 q_2}}{2f} - k_2 \frac{f'}{2f} + k_1 \frac{f_{q_2}}{2f} + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{\sqrt{2f}} \left( - \frac{f_{q_1} h_{q_1}}{2f} + 2k_1 h_{q_1} - h_{q_1 q_1} \right) \right] + \\
 &+ q_2 \left[ -k_2^2 + \frac{f_{q_1}^2}{2f} - \frac{f_{q_2 q_2}}{2f} + \frac{1}{\sqrt{2f}} \times \right. \\
 &\times \left. \left( k_2 h' + \frac{f_{q_2} h_{q_1}}{2f \sqrt{2f}} + h_{q_1 q_2} \right) \right] = \\
 &= \frac{f_0}{2f} \left( - \frac{h_{q_1}}{\sqrt{2f}} - \frac{f_{q_2}}{f} \right) \varepsilon - \frac{h_{q_1}}{2\sqrt{2f}} \gamma.
 \end{aligned}$$

При этом выполняются следующие соотношения:

$$k_1 = \frac{f_{q_1}}{2f} - \frac{h_{q_2}}{\sqrt{2f}};$$

$$\frac{f_{q_2}}{2f} - \frac{h_{q_1}}{\sqrt{2f}} = 0.$$

### Заклучение

Получены точные дифференциальные уравнения, определяющие отклонения траекторий заряженных частиц от осевой траектории, в криволинейных координатах, связанных с осевой траекторией пучка, в виде, удобном для проведения численных расчетов динамики пучков заряженных частиц, в том числе с учетом релятивизма. Эти уравнения записаны также в линейном приближении.

Уравнения могут быть использованы для расчета поведения пучков заряженных частиц в произвольных электрических и магнитных полях и исследования свойств широкого класса корпускулярно-оптических систем.

Основной особенностью полученных точных уравнений траекторий (17), (18) является то, что при их интегрировании сразу вычисляются отклонения  $q_1(s)$  и  $q_2(s)$  произвольной частицы пучка от осевой траектории. Это значительно повышает точность расчетов по сравнению с обычным подходом в случае, когда отклонение вычисляется как разность больших чисел, обычных координат частиц.

Уравнения позволяют также:

- с высокой точностью получать сечения пучков в плоскостях  $s = \text{const}$ , перпендикулярных осевой траектории, не ограничиваясь требованием малости  $q_1, q_1', q_2, q_2', \varepsilon, \gamma$ . Условием, ограничивающим применение этих уравнений, является требование однозначности определения координат, которое выполняется, если значения координат  $q_1$  и  $q_2$  не превосходят радиусов кривизны и кручения;
- найти предельные значения начальных значений  $q_{10}, q'_{10}, q_{20}, q'_{20}, \varepsilon, \gamma$ , при которых с заданной точностью справедливы линейное приближение и абберационные теории.

Численно решая эти уравнения при различных значениях  $q_{10}, q'_{10}, q_{20}, q'_{20}, \varepsilon, \gamma$ , можно просто найти как параксиальные характеристики корпускулярно-оптических систем, так и абберационные коэффициенты различного порядка.

Полученные уравнения являются удобной тематической базой для исследования поведения пучков заряженных частиц в электромагнитных полях методом Монте-Карло.

### Литература

1. Cotte M. // Annal. de Phys. 1938. V. 10. P. 333.
2. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. — М.—Л.: Изд. АН СССР, 1948.
3. Стэррок П. А. Статическая и динамическая электронная оптика. — М.: ИЛ, 1958.
4. Касьянков П. П. Теория электромагнитных систем с криволинейной осью. — Л.: Изд. Ленингр. ун-та, 1956.
5. Вандакуров Ю. В. // ЖТФ. 1957. Т. 27. № 8. С. 1850.
6. Адилова З. Т., Якушев Е. М. // Известия Академии наук Казахской ССР. Сер. Физико-математическая. 1987. Вып. 2. С. 69.
7. Гликман Л. Г., Спивак-Лавров И. Ф. // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. Вып. 13. С. 26.
8. Baisanov O. A., Glikman L. G., Doskeev G. A., Sagitova A. T., Spivak-Lavrov I. F. Proceedings of the Seventh International Conference on Charged Particle Optics // Physics Procedia 2008. № 1. P. 435.
9. Спивак-Лавров И. Ф. // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 11. С. 140—148.
10. Spivak-Lavrov I. F. // Nucl. Instr. & Meth. In Phys. Res. 1995. V. A 363. No. 1, 2. P. 485.
11. Baisanov O. A., Doskeev G. A., Spivak-Lavrov I. F. Proceedings of the Seventh International Conference on Charged Particle Optics // Physics Procedia. 2008. № 1. P. 425.
12. Байсанов О. А., Доскеев Г. А., Спивак-Лавров И. Ф. // Прикладная физика. 2008. № 4. С. 100.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1973.
14. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. II. — М.: Наука, 1974.

## Differential equations determining a deflection of particles of the ion beam from an axis trajectory in electric and magnetic fields

O. A. Baisanov

Military Institute of Air Defense Force, 16 Moldagulova av., Aktobe, 030000, Kazakhstan

G. A. Doskeev, Z. G. Zaripova, I. F. Spivak-Lavrov

Aktubinsk State University 236, Zhubanovs Brothers str., Aktobe, 030000, Kazakhstan

E-mail: spivakif@rambler.ru

*The correct differential equations determining deflections of particle trajectories from the axis trajectory are deduced in curvilinear coordinates. Relativity is taken into account.*

PACS: 41.85.-i

*Keywords:* differential equations, axis trajectory, beam, relativity.

Bibliography — 14 references.

Received 18 November 2009

\* \* \*