

УДК 539.186.2

## Неполяризованное тормозное излучение заряженных частиц, проходящих через слой рассеивающих центров, находящихся в однородном электрическом поле

В. И. Крылов, Т. В. Бондарева

*Рассмотрено дифференциальное сечение неполяризованного тормозного излучения электронов в однородном электрическом поле и в поле  $N$  рассеивающих центров. Проведен анализ сечений численными методами. Показано, что сечение имеет сложную осциллирующую структуру, отличающуюся от структуры сечений, полученных ранее.*

PACS: 79.20.Rf

*Ключевые слова:* тормозное излучение, рассеяние, кулоновские центры, однородное электрическое поле, волновая функция ускоряемых частиц.

### Введение

Данная работа является продолжением работы [1], в которой было найдено поляризованное сечение подобной задачи, и основная цель ее заключалась в том, чтобы обратить внимание на эффекты, связанные с интерференцией двух движений: электронов в однородном поле и поле рассеивающих центров.

Так как в экспериментах обычно определяется интенсивность неполяризованного излучения, то результаты [1] представляют больше академический интерес, потому что анализировалось поляризованное излучение. Кроме того, из-за сложности аналитического выражения, определяющего такое сечение, и большого числа параметров анализ в [1] был не очень подробным.

В настоящей работе найдено и проанализировано сечение неполяризованного тормозного излучения электронов, ускоряемых однородным электрическим полем и проходящих через плоский слой кулоновских рассеивающих центров, находящихся в этом же поле.

Проведенный анализ близок к анализу ранних работ, что позволяет сделать сравнение случая для структур дифференциальных сечений тормозного излучения при ускорении электронов внешним однородным электрическим полем и их торможе-

нием, т. е. когда после эмиссии электронов источником они падают на потенциальный барьер этого поля.

### Постановка задачи

Пусть однородное электрическое поле с напряженностью  $\vec{\varepsilon}$  (нормальной к его границе) находится в полупространстве с  $z$ -координатами точек, удовлетворяющих неравенству  $z > -L_1$ , где  $L_1$  — расстояние от рассеивающего центра до границы внешнего поля, из-за которой поток электронов падает на такие центры.

Ось  $z$  декартовой системы координат  $xyz$  считаем направленной антипараллельно напряженности  $\vec{\varepsilon}$  однородного поля:  $\vec{\varepsilon} = (0, 0, -\varepsilon)$ . Взаимодействие проходящих через слой частиц с рассеивающими центрами рассматриваем как возмущение. Тогда, учитывая, что ускоряемые однородным полем электроны создают поток с ненулевой продольной (вдоль  $\vec{\varepsilon}$ ) составляющей его плотности, волновые функции нулевого приближения при  $z > -L_1$  выбираем в виде:

$$\Psi_{\vec{k}_{i,f}} = \frac{A_{i,f}}{\sqrt{L_x L_y S_{i,f}^{1/4}}} \exp \left[ i \left( \frac{2\chi_{zi,f}}{3|\chi_{zi,f}|} S_{i,f}^{3/2} + \vec{k}_{i,f\perp} \vec{r} \right) \right], \quad (1)$$

где  $\vec{\chi}_{i,f} = (\vec{k}_{i,f\perp}, \chi_{zi,f})$  — волновой вектор, определяющий импульс невозмущенного движения частиц на границе поля;

$i$  и  $f$  — индексы, обозначающие начальное и конечное состояния падающих на рассеивающий центр частиц;

**Крылов Владимир Иванович**, профессор.  
**Бондарева Татьяна Валерьевна**, аспирант.  
 Дальневосточный государственный гуманитарный университет.  
 Россия, 680000, г. Хабаровск, ул. К. Маркса, 68.  
 Тел. (4212) 30-45-04. Факс. (4212) 21-01-00.  
 E-mail: krylov\_vladimir@mail.ru

Статья поступила в редакцию 28 сентября 2009 г.

$$S_{i,f} = \frac{z}{l_e} + \frac{E_{z_{i,f}}}{|e\varepsilon|l_e}; \quad l_e = (\hbar^2 / 2m_e |e\varepsilon|)^{1/3};$$

$e, m_e$  — заряд и масса электрона, соответственно;

$A_f$  — нормировочная постоянная, выбираемая из условия нормировки  $\Psi_f$  на нормировочную длину  $L_1 + L_2$  вдоль оси  $z$ ;

$A_i$  — нормировочная постоянная, через которую определяется плотность потока падающих электронов;

$L_x$  и  $L_y$  — длины сторон нормировочного прямоугольника вдоль  $x$  и  $y$ ;

$E_{zf}, E_{zi}$  — энергии продольного (невозмущенного) движения электрона в однородном поле в конечном и начальном состояниях, соответственно;

$\vec{k}_{f\perp}$  и  $\vec{k}_{i\perp}$  — волновые векторы, определяющие поперечный (относительно  $\vec{\varepsilon}$ ) импульс электронов конечного и начального состояний, соответственно.

Функции  $S^{-1/4} \exp[i(2/3)S^{3/2}]$ , входящие в (1), являются асимптотами функций Эйри, когда  $S_f$  и  $S_i \gg 1$  в классически разрешенной области движения частицы, т. е. при  $z > -L_1$ , если  $E_{zf}$  и  $E_{zi} > |e|\varepsilon L_1$ .

Физически это означает, что такие частицы не отражаются от потенциального барьера внешнего поля. Поэтому в настоящей работе мы исключаем из рассмотрения рождение фотонов, происходящих при переходах рассеянных частиц в состояния, в которых они отражаются от потенциального барьера однородного поля.

В соответствии с общей формулой Борна [2]

$$dW = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{\Phi\hat{n}}|^2 \delta(E_f - E_i) dv \quad (2)$$

дифференциальное сечение тормозного поляризованного излучения фотонов было получено в [1], и после стандартной процедуры суммирования по поляризации [3] нетрудно получить следующее выражение для дифференциального сечения неполяризованного тормозного излучения (в атомных единицах, отнесенное к единице площади слоя рассеивающих центров):

$$d\sigma_{\omega 0} = \frac{\alpha^3 \chi_z}{\pi \chi} \omega \left\{ \frac{\pi}{4} \frac{1}{2\varepsilon} \frac{[\vec{n}\vec{k}_{i\perp}]^2}{|k_{\Phi z}|} \times \right. \quad (3)$$

$$\left. \times \left| \operatorname{erf} \left( R_2 \sqrt{\frac{|k_{\Phi z}|}{(2\varepsilon)^{1/3}}} e^{i\frac{\pi}{4} \frac{k_{\Phi z}}{|k_{\Phi z}|}} \right) - \operatorname{erf} \left( R_1 \sqrt{\frac{|k_{\Phi z}|}{(2\varepsilon)^{1/3}}} e^{i\frac{\pi}{4} \frac{k_{\Phi z}}{|k_{\Phi z}|}} \right) \right|^2 -$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{4k_{\Phi z}} \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon|k_{\Phi z}|}} [\vec{n}\vec{k}_{i\perp}] [\vec{n}\vec{k}] P_1 + \frac{[\vec{n}\vec{k}]^2}{4k_{\Phi z}^2} |B_1|^2 - \\ & - \pi\sqrt{2} \frac{Z}{[\vec{a}_1, \vec{a}_2] (E_i E_f)^{1/4} (k_{zf} - k_{zi} + k_{\Phi z})} \times \\ & \times \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon|k_{\Phi z}|}} [\vec{n}\vec{k}_{i\perp}] [\vec{n}\vec{k}] P_2 - \frac{[\vec{n}\vec{k}]^2}{2k_{\Phi z}} P_3 \right) + \\ & + \left( \frac{2\pi Z}{\omega [\vec{a}_1, \vec{a}_2]} \right)^2 \sum_{s_1} \sum_{s_2} \frac{q_{\Phi s_1 s_2}^2 - (n\vec{q}_{\Phi s_1 s_2})^2}{k_{zi} k_{zf} (\vec{q}_{\Phi s_1 s_2}^2)} \Big\} d\omega d\Omega, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры;

$$\vec{k} = [0, 0, 1];$$

$$\vec{k}_{i\perp} = [k_i \sin(\theta_i), 0, k_i \cos(\theta_i)];$$

$$\vec{n} = \vec{k}_{\Phi} / |k_{\Phi}|, \quad \vec{q}_{\Phi s_1 s_2} = [2\pi s_1, 2\pi s_2, k_f - k_i + k_{\Phi}];$$

$$\vec{n} = [\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta)];$$

$$\chi_z = \sqrt{2(E_{zi} - \varepsilon L_1)}; \quad \chi = \sqrt{k_{i\perp}^2 + 2(E_{zi} - \varepsilon L_1)};$$

$$R_1 = \frac{(2\varepsilon)^{1/3} \Delta E_z}{|\varepsilon|} \sqrt{\frac{(2\varepsilon)^{1/3} E_{zi}}{|\varepsilon|} - (2\varepsilon)^{1/3} L_1};$$

$$R_2 = \frac{(2\varepsilon)^{1/3} \Delta E_z}{|\varepsilon|} \sqrt{\frac{(2\varepsilon)^{1/3} E_{zi}}{|\varepsilon|} + (2\varepsilon)^{1/3} L_2};$$

$$\begin{aligned} B_1 = & \frac{(2\varepsilon)^{1/3} \Delta E_z}{|\varepsilon|} \sqrt{\frac{(2\varepsilon)^{1/3} \pi}{2|k_{\Phi z}|}} \left\{ \operatorname{erf} \left( R_2 \sqrt{\frac{|k_{\Phi z}|}{(2\varepsilon)^{1/3}}} e^{i\frac{\pi}{4} \frac{k_{\Phi z}}{|k_{\Phi z}|}} \right) - \right. \\ & - \operatorname{erf} \left( R_1 \sqrt{\frac{|k_{\Phi z}|}{(2\varepsilon)^{1/3}}} e^{i\frac{\pi}{4} \frac{k_{\Phi z}}{|k_{\Phi z}|}} \right) \Big\} e^{-i\frac{\pi}{4} \frac{k_{\Phi z}}{|k_{\Phi z}|}} - i \left( e^{-i\frac{k_{\Phi z}}{(2\varepsilon)^{1/3} R_2^2}} - \right. \\ & \left. - e^{-i\frac{k_{\Phi z}}{(2\varepsilon)^{1/3} R_1^2}} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 = & B_1^* \left\{ \operatorname{erf} \left( R_2 \sqrt{\frac{|k_{\Phi z}|}{(2\varepsilon)^{1/3}}} e^{i\frac{\pi}{4} \frac{k_{\Phi z}}{|k_{\Phi z}|}} \right) - \operatorname{erf} \left( R_1 \sqrt{\frac{|k_{\Phi z}|}{(2\varepsilon)^{1/3}}} \right) \right\} \times \\ & \times e^{i\frac{\pi}{4} \frac{k_{\Phi z}}{|k_{\Phi z}|}} \Big\} e^{-i\frac{\pi}{4} \frac{k_{\Phi z}}{|k_{\Phi z}|}} + B_1 \left\{ \operatorname{erf} \left( R_2^* \sqrt{\frac{|k_{\Phi z}|}{(2\varepsilon)^{1/3}}} e^{-i\frac{\pi}{4} \frac{k_{\Phi z}}{|k_{\Phi z}|}} \right) - \right. \\ & \left. - \operatorname{erf} \left( R_1^* \sqrt{\frac{|k_{\Phi z}|}{(2\varepsilon)^{1/3}}} \right) e^{-i\frac{\pi}{4} \frac{k_{\Phi z}}{|k_{\Phi z}|}} \right\} e^{i\frac{\pi}{4} \frac{k_{\Phi z}}{|k_{\Phi z}|}}; \end{aligned}$$

$$P_2 = \left\{ \operatorname{erf} \left( R_2 \sqrt{\frac{|k_{\Phi z}|}{(2\varepsilon)^{1/3}}} e^{i \frac{\pi k_{\Phi z}}{4|k_{\Phi z}|}} \right) - \operatorname{erf} \left( R_1 \sqrt{\frac{|k_{\Phi z}|}{(2\varepsilon)^{1/3}}} \right) \times \right. \\ \left. \times e^{i \frac{\pi k_{\Phi z}}{4|k_{\Phi z}|}} \right\} e^{-i \left( \frac{\pi k_{\Phi z}}{4|k_{\Phi z}|} + \alpha_2 - \frac{k_{\Phi z}}{(2\varepsilon)^{1/3}} \alpha_1 \right)} + \left\{ \operatorname{erf} \left( R_2^* \sqrt{\frac{|k_{\Phi z}|}{(2\varepsilon)^{1/3}}} \right) \times \right. \\ \left. \times e^{-i \frac{\pi k_{\Phi z}}{4|k_{\Phi z}|}} \right\} - \operatorname{erf} \left( R_1^* \sqrt{\frac{|k_{\Phi z}|}{(2\varepsilon)^{1/3}}} \right) e^{-i \frac{\pi k_{\Phi z}}{4|k_{\Phi z}|}} \left\{ e^{-i \left( \frac{\pi k_{\Phi z}}{4|k_{\Phi z}|} + \alpha_2 - \frac{k_{\Phi z}}{(2\varepsilon)^{1/3}} \alpha_1 \right)} \right\};$$

$$P_3 = B_1 e^{-i \left( \alpha_2 - \frac{k_{\Phi z}}{(2\varepsilon)^{1/3}} \alpha_1 \right)} + B_1^* e^{i \left( \alpha_2 - \frac{k_{\Phi z}}{(2\varepsilon)^{1/3}} \alpha_1 \right)};$$

$$\alpha_1 = \frac{(2\varepsilon)^{1/3} E_{zi}}{|\varepsilon|} + \frac{(2\varepsilon)^{1/3} \Delta E_z^2}{2|\varepsilon| k_{\Phi z}^2};$$

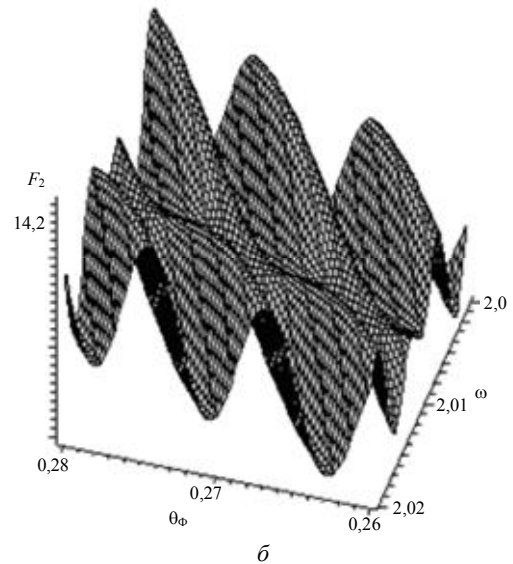
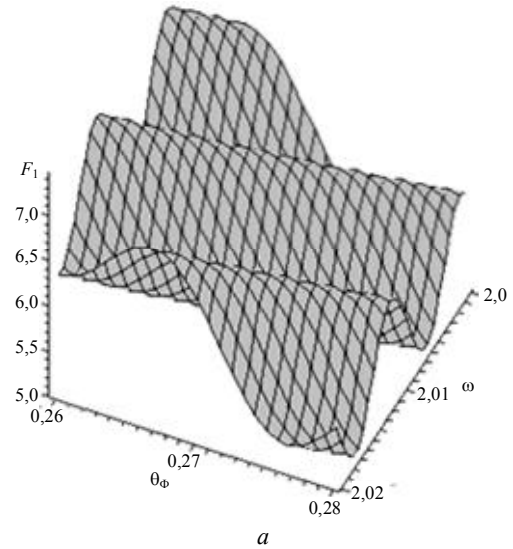
$$\alpha_2 = \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{(2\varepsilon)^{1/3} E_{zi}}{|\varepsilon|} \right)^{3/2} - \left( \frac{(2\varepsilon)^{1/3} E_{zf}}{|\varepsilon|} \right)^{3/2} \right],$$

$dO = \sin \theta_{\Phi} d\theta_{\Phi} d\varphi_{\Phi}$  — элемент телесного угла, в котором находится волновой вектор излучаемого фотона центров  $\vec{k}_{\Phi} = k_{\Phi} (\sin \theta_{\Phi} \times \cos \varphi_{\Phi}, \sin \theta_{\Phi} \sin \varphi_{\Phi}, \cos \theta_{\Phi})$ , где углы  $\theta_{\Phi}$ ,  $\varphi_{\Phi}$  — сферические координаты волнового вектора фотона.

### Анализ результатов

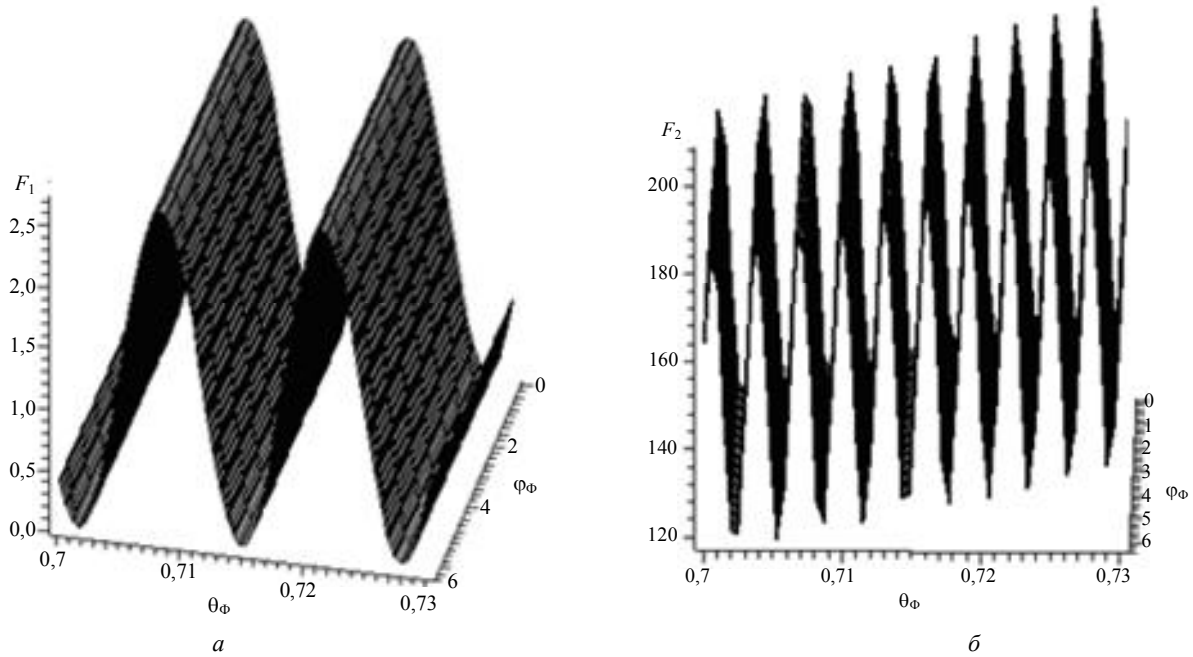
Анализ полученного сечения проведем численными методами, строя поверхности  $F = d\sigma_{\omega,0} / d\omega dO$  как функции от  $\theta_{\Phi}$ ,  $\omega$ , так и от  $\theta_{\Phi}$ ,  $\varphi_{\Phi}$  (единицы измерения углов выбираем в радианах). Остальные параметры, от которых зависит сечение, задаем следующими:  $\varepsilon = 0,001$ ;  $\omega = 0,01$ ;  $\varphi_i = 0$ ;  $k_i = 20$ ;  $Z = 1$ ;  $\vec{a}_1 = [1, 0, 0]$ ;  $\vec{a}_2 = [0, 1, 0]$ ;  $L_1 = 100$ ;  $L_2 = \infty$ .

На рис. 1, *a* изображена поверхность  $F_1(\theta_{\Phi}, \omega)$  на интервалах  $\theta_{\Phi} \in (0,26; 0,28)$ ;  $\omega \in (1,2 \cdot 10^{-2}; 9,2 \cdot 10^{-2})$  при параметрах  $\varphi_i = 0$ ;  $\theta_i = 3\pi/4$ ;  $k_i = 20$ ;  $\varepsilon = 0,001$ . Из этого рисунка видно, что сечение имеет осцилляционную структуру по  $\omega$ . На рис. 1, *б* при тех же параметрах показана функция  $F_2 = d\sigma_{2\omega,0} / d\omega dO$ , когда электроны отражаются от потенциального барьера. Сравнивая рис. 1, *a* и *б*, нетрудно заметить отличия между ними: в  $F_1$  амплитуда осцилляций, как и величина самого сечения, меньше  $F_2$ , а период же осцилляций  $F_1$  больше чем у  $F_2$  как по  $\omega$ , так и по  $\theta_{\Phi}$ .

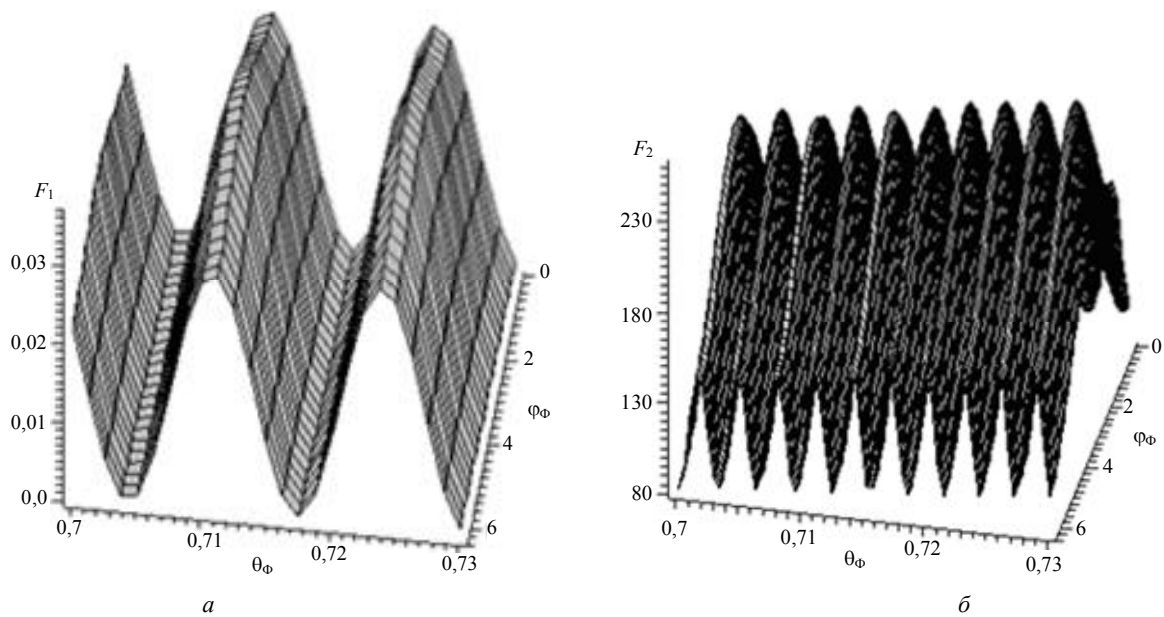


**Рис. 1. Поверхности:**  
*a* —  $F_1(\theta_{\Phi}, \omega)$ ;  $\omega \in (1,2 \cdot 10^{-2}; 9,2 \cdot 10^{-2})$ ; *б* —  $F_2(\theta_{\Phi}, \omega)$ ;  $\omega \in (2,0 \cdot 10^{-2}; 2,02 \cdot 10^{-2})$

На рис. 2, *a* и *б* и рис. 3, *a* и *б* рассмотрены поверхности  $F_1$ ,  $F_2$  как функции переменных  $\theta_{\Phi}$ ,  $\varphi_{\Phi}$  на интервалах  $\theta_{\Phi} \in (0,7; 0,73)$ ;  $\varphi_{\Phi} \in (0; 2\pi)$  и параметрах  $\varphi_i = 0$ ;  $k_i = 20$ ;  $\varepsilon = 0,001$ ;  $\omega = 0,01$ , но на рис. 2, *a*  $F_1$  взято при  $\theta_i = 0$ , а на рис. 2, *б*  $F_2$  при эквивалентном ему значению угла  $\theta_i = \pi$  (так как электроны, вылетая из источника, движутся антипараллельно оси  $z$ ), а на рис. 3, *a*  $F_1$  взят при значении  $\theta_i = 1,545$ , на рис. 3, *б*  $F_2$  — при  $\theta_i = 1,595$ , что также эквивалентно углу  $\theta_i = 1,545$  при ускорении электронов внешним полем. Нетрудно заметить, что как и в предыдущем случае имеются заметные отличия поведения сечений при ускорении электронов внешним полем и случаем, когда они падают на потенциальный барьер, отражаясь от него.



**Рис. 2. Поверхности:**  
 а —  $F_1(\theta_\Phi, \varphi_\Phi)$ ;  $\theta_i = 0$ ; б —  $F_2(\theta_\Phi, \varphi_\Phi)$ ;  $\theta_i = \pi$

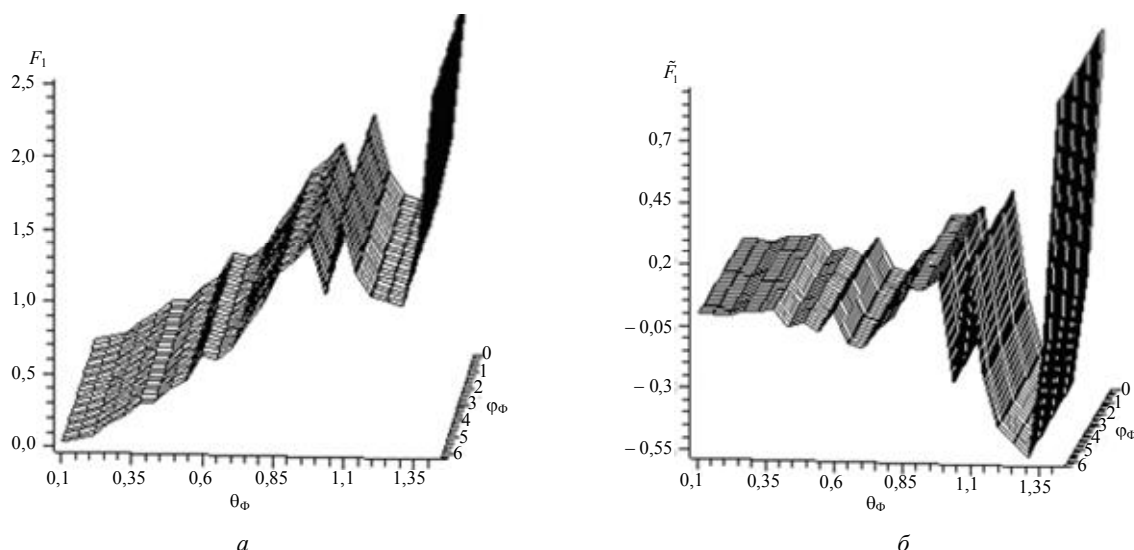


**Рис. 3. Поверхности:**  
 а —  $F_1(\theta_\Phi, \varphi_\Phi)$ ;  $\theta_i = 1,545$ ; б —  $F_2(\theta_\Phi, \varphi_\Phi)$ ;  $\theta_i = 1,595$

Рассмотрим предельный случай, когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Аналитический и численный анализы показывают, что слагаемые в выражении (3), содержащие  $\varepsilon$ , также стремятся к нулю (мы отвлекаемся от  $\chi$  и  $\chi_z$ ). Последнее же слагаемое выражения (3), содержащее двойные суммы и отвечающее за излучение при взаимодействии заряженных частиц с рассеивающими центрами, не содержит  $\varepsilon$  и при таком предельном переходе остается практически неизменным. На рис. 4, а показана поверхность  $F_1$  при

$\varepsilon = 0,00001$ , а на рис. 4, б — поверхность  $\tilde{F}_1$  при тех же параметрах:  $\varphi_1 = 0$ ;  $k_1 = 20$ ;  $\varepsilon = 0,00001$ ;  $\omega = 0,01$ ; на интервалах  $\theta_\Phi \in \left(0, 1; 0,9\frac{\pi}{2}\right)$ ;  $\varphi_\Phi \in (0; 2\pi)$ , но при разных значениях  $\theta_i$ : при  $F_1$  —  $\theta_i = 0$ , при  $\tilde{F}_1$  —  $\theta_i = \pi$ .

Из рис. 4, а и б видно, что действительно вклад излучения, вызванного взаимодействием электронов с внешним полем, становится исчезающе мал при стремлении  $\varepsilon$  к нулю.



**Рис. 4. Поверхности:**  
*a* —  $F_1(\theta_\phi, \phi_\phi); \theta_i = 0$ ; *б* —  $\tilde{F}_1(\theta_\phi, \phi_\phi); \theta_i = \pi$

**Заключение**

Из найденных результатов следует, что внешнее электрическое поле приводит к изменению не только сечений поляризованного тормозного излучения, вызванного ускоренными им электронами, рассеянными на плоском слое ионов, но и неполяризованного. Однако полученные сечения заметно отличаются от сечений, найденных в ранних работах, когда электроны, эмитированные источником, падали на потенциальный барьер внешнего однородного поля. Это связано с существованием в последнем случае интерференции отраженных от потенциального барьера внешнего поля электронов, а не только суперпозицией двух движений: ускоренного движения электронов во внешнем поле и столкновений их с рас-

сеивающими центрами, что имеет место в задаче, рассмотренной в данной работе.

Авторы выражают глубокую благодарность А. А. Рухадзе за внимание к работе.

**Литература**

1. Крылов В. И. Тормозное излучение заряженных частиц, проходящих через слой рассеивающих центров в однородном электрическом поле/ Крылов В. И.// Прикладная физика. 2007. № 1. С. 28—36.
2. Ландау Л. Д. Квантовая механика/ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: Наука, 1974. — 752 с.
3. Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика/ В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — М.: Наука, 1989. — 723 с.

**Unpolarized bremsstrahlung of the charge particles in a homogeneous electrical field which are passing through a layer, being in a field of the scattering centers**

*V. I. Krylov, T. V. Bondareva*

Far Eastern State University of Humanities, 68 K. Marx str., 680035, Khabarovsk, Russia  
 E-mail: krylov\_vladimir@mail.ru

*There was considered the differential unpolarized cross section for bremsstrahlung of the charge particles in a homogeneous electrical field and a field of the N scattering centers. The analysis of the found cross sections has made by numerical methods. The analysis of the found cross sections has shown that they have complex oscillation structure which differ from the cross sections which had been calculated earlier.*

PACS: 79.20.Rf

*Keywords:* bremsstrahlung, scattering, Coulombs centers, homogeneous electrical field, wave function of accelerated particles.

Bibliography — 3 references.

Received 28 September 2009