УДК 533.9:537.533

Численное моделирование различных механизмов стабилизации неустойчивости релятивистского электронного пучка в плотной плазме

Ю. В. Бобылёв, В. А. Панин, М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе

Методами численного моделирования исследована зависимость нелинейной динамики неустойчивости, развивающейся при взаимодействии релятивистского электронного пучка с плотной плазмой от плотности пучка. Получены и проанализированы соответствующие решения.

PACS: 52.35.-g

Ключевые слова: моделирование, пучок, электрон, плазма, нестабильность.

Введение

Наиболее важными, с точки зрения приложений, для плазменной СВЧ-электроники являются эффекты Черенкова, поскольку они связаны с излучением плазменных волн, а значит, с преобразованием кинетической энергии электронного пучка в энергию СВЧ-излучения. Основное различие между механизмами возбуждения излучения заключается в том, что коллективный эффект Черенкова реализуется только в случае слабой связи пучковой и плазменной волн, когда поперечнонеоднородные (трубчатые) плазма и пучок достаточно далеко разнесены друг от друга в пространстве, что и обуславливает малость перекрытия порождаемых ими полей [1, 2]. При этом плотность пучка может быть как меньшей, так и сравнимой с плотностью плазмы.

Одночастичный же эффект Черенкова реализуется в случае сильной связи пучковой и плазменной подсистем, что в свою очередь имеет место при сближении или даже при взаимном проникновении пучка и плазмы. При этом плотность пучка должна быть мала по сравнению с плотностью плазмы [1, 2]. Отметим, что если пучок достаточно плотный, то в последнем случае в системе развивается апериодическая неустойчивость типа “отрицательной массы” [1, 2].

Бобылёв Юрии Владимирович, профессор.
Панин Владимир Алексеевич, проректор, профессор.
Тульский педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
Россия, 300026, Тула, пр. Ленина, 125.
E-mail: tapu@tula.net
Кузелев Михаил Викторович, профессор.
Московский государственный университет.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1.
Рухадзе Анри Амвросьевич, профессор, главный научный сотрудник.
Институт общей физики им. А. М. Прохорова.
Россия, 119991, Москва, ул. Вавилова, 38.
Тел.: (499) 135-02-47. E-mail: rukh@fpl.gpi.ru

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2009 г.

Стабилизация неустойчивости, развивающейся в режимах одночастичного и коллективного эффектов Черенкова, также обусловлена различными причинами. Так, в случае одночастичного эффекта Черенкова неустойчивость насыщается вследствие захвата электронов пучка плазменной волной, в случае же коллективного эффекта Черенкова в зависимости от плотности пучка возможны два механизма нелинейной стабилизации неустойчивости.

При сравнительно малой плотности пучка его электроны также захватываются, но уже не полем излучения, а полем медленной пучковой волны (самозахват). В результате в пучке возникает многопотоковое течение, и он хаотизируется [1, 2]. Если же плотность пучка достаточно велика, то механизмом насыщения неустойчивости является нелинейный сдвиг частот пучковой и плазменной волн, приводящий к нарушению их синхронизма раньше, чем в пучке успевают развиться интенсивные ленгмюровские колебания [1, 2]. Данный механизм стабилизации неустойчивости интересен тем, что его реализация не сопровождается хаотизацией пучка и определяется фактически кубическими нелинейностями, что позволяет применить для его описания аналитические методы разложения траекторий и импульсов [1, 2].

Как одночастичный, так и коллективный эффект Черенкова достаточно хорошо изучены, и им посвящена весьма обширная литература. Вместе с тем определенный интерес представляет более детальный анализ указанных выше механизмов стабилизации неустойчивости, развивающейся в различных режимах; исходя из более общей модели интересно также более строго описать нелинейную динамику электронов и полей, когда данные механизмы стабилизации неустойчивости реализуются в возможно более “чистом” виде.

© Бобылёв Ю. В., Панин В. А., Кузелев М. В., Рухадзе А. А., 2010

Анализ расширенной модели

Будем исходить из математической модели пучково-плазменной системы, которой присущи все наиболее характерные черты явления пучковой неустойчивости в плазме и наиболее существенные особенности систем, изучаемых в плазменной СВЧ-электронике.

Рассмотрим цилиндрический металлический волновод с произвольным односвязным поперечным сечением, в котором находятся бесконечно тонкие в поперечном сечении релятивистский электронный пучок и плазма. Волновод помещен в продольное сильное внешнее магнитное поле, препятствующее поперечным движениям электронов пучка и плазмы (движение тяжелых ионов вообще не учитываем). И пучок, и плазма в начальном состоянии являются моноскоростными.

Эволюция непотенциальных возмущений в такой системе может быть описана с помощью уравнений для поляризационного потенциала волн E-типа и кинетического уравнения Власова [1—3]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta_\perp+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi= \\ =4\pi e\sum_\alpha S_\alpha\delta\left(\vec r_\perp-\vec r_\alpha\right)\int f_\alpha\left(t,z,p\right)dp; \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}+v\frac{\partial f_\alpha}{\partial z}+eE_z\frac{\partial f_\alpha}{\partial p_\alpha}=0; \\ E_z=\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi.\end{gathered} \tag{1}$$

Считаем, что в начальный момент времени функции распределения

$$f_\alpha\left(0,z,p\right)\equiv f_{0\alpha}\left(p\right)=n_{0\alpha}\delta\left(p-p_{0\alpha}\right), \tag{2}$$

где $n_{0\alpha}$ — невозмущенные плотности частиц сорта α;

$p_{0\alpha}$ — невозмущенные импульсы частиц: $p_{0p}=0;\ \ p_{0b}=mu\left(1-u^2/c^2\right)^{-1/2}$;

u — невозмущенная скорость электронов пучка.

Следуя методу интегрирования по начальным данным [1—3], общее решение уравнения Власова для функций распределения f_α запишем в виде

$$\begin{gathered}f_\alpha\left(t,z,p\right)=\iint dz_0dp_0f_{0\alpha}\left(p_0\right)\times \\ \times\delta\left(z-z_\alpha\left(t,z_0,p_0\right)\right)\delta\left(p-p_\alpha\left(t,z_0,p_0\right)\right).\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $z_\alpha\left(t,z_0,p_0\right)$ и $p_\alpha\left(t,z_0,p_0\right)$ — решения релятивистской характеристической системы

$$\frac{dz_\alpha}{dt}=v_\alpha;\quad \frac{dp_\alpha}{dt}=eE_z, \tag{4}$$

где скорости электронов пучка и плазмы определяются выражениями:

$$v_b=\frac{cp_b}{\sqrt{m^2c^2+p_b^2}};\quad v_p=\frac{p_p}{m}. \tag{5}$$

Система (4) дополняется следующими очевидными условиями:

$$z_\alpha\big|_{t=0}=z_0;\quad p_\alpha\big|_{t=0}=p_0. \tag{6}$$

Предположим, что начальное возмущение в рассматриваемой системе имеет характерный продольный размер L, кроме того, считаем, что известны собственные функции φ_m и собственные значения $k_{\perp m}$ поперечного сечения волновода. Тогда все возмущенные величины, в том числе и поляризационный потенциал ψ, можно представить в виде двойного ряда

$$\begin{gathered}\psi\left(t,z,\vec r_\perp\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m\left(\vec r_\perp\right)\times \\ \times\left(\psi_{nm}\left(t\right)\exp\left(ink_zz\right)+\text{к.с.}\right),\end{gathered} \tag{7}$$

где $k_z=2\pi/L$ — основное продольное волновое число.

Дальнейшие преобразования [3] заключаются в подстановке (7) и (3) в (1) с учетом (2) и выполнении интегрирования по импульсам p_0 (6) и p. При этом для коэффициентов разложения $\psi_{nm}(t)$ в (7) получаются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, интегрирование которых методом вариации постоянных позволяет выразить данные коэффициенты в виде некоторых интегральных соотношений.

Подстановка (7) с учетом выражений для коэффициентов $\psi_{nm}(t)$ в формулу для E_z в (1) определяет правые части уравнений (4). Применяя к ним последовательно процедуру интегрирования по частям бесконечное число раз, можно освободиться от интегрирования по времени, заменив его сходящимся рядом, формальное суммирование которого можно осуществить с помощью формулы суммы геометрической прогрессии.

Опуская промежуточные, достаточно громоздкие выкладки описанной процедуры вывода, приведем окончательный вид получаемых из (4) уравнений движения электронов пучка и плазмы:

$$\begin{aligned}\frac{dp_p}{dt}&=-\frac{i}{2}m\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\exp(iny_p)}{nk_z}\left[\tilde\omega_p^2\hat G_{pn}\rho_{pn}+\tilde\omega_b^2\hat Q_n\rho_{bn}\right]-\text{к.с.}\right\}, \\ \frac{dp_b}{dt}&=-\frac{i}{2}m\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\exp(iny_b)}{nk_z}\left[\tilde\omega_b^2\hat G_{bn}\rho_{bn}+\tilde\omega_p^2\hat Q_n\rho_{pn}\right]-\text{к.с.}\right\}.\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь

$$\rho_{\alpha n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left(-iny_\alpha\right) dy_0; \qquad y_\alpha = k_z z_\alpha \quad — \qquad (9)$$

безразмерные амплитуды гармоник плотностей пучка и плазмы,

$$\hat{G}_{\alpha n} = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{s}_{nm} \frac{\phi_m^2\left(\vec{r}_\alpha\right)}{\left\|\phi_m\right\|^2}, \ (\alpha = p,b);$$
$$\hat{Q}_n = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{s}_{nm} \frac{\phi_m\left(\vec{r}_p\right)\phi_m\left(\vec{r}_b\right)}{\left\|\phi_m\right\|^2}; \qquad (10)$$

$$\hat{s}_{nm} = \frac{n^2k_z^2 - \hat{\omega}^2/c^2}{n^2k_z^2 + k_{\perp m}^2 - \hat{\omega}^2/c^2}; \qquad \hat{\omega} = i\frac{d}{dt}, \qquad (11)$$

$$\tilde{\omega}_\alpha^2 = S_\alpha \omega_\alpha^2, \ \text{см}^2 \cdot \text{рад}^2 \cdot \text{с}^{-2},$$

где $\alpha = p,b$ — величины, пропорциональные погонным плотностям электронов пучка и плазмы ($S_{b,p}$ – площади поперечных сечений пучков).

Систему (8) с учетом (9), исключая с помощью (5) импульсы, удобно записать в форме двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2y_p}{dt^2} = -\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\exp(iny_p)}{n}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\tilde{\omega}_p^2\hat{G}_{pn}\rho_{pn} + \tilde{\omega}_b^2\hat{Q}_n\rho_{bn}\right] - \text{к.с}\right\};$$
$$\frac{d^2y_b}{dt^2} = -\frac{i}{2}\left(1 - \frac{1}{k_z^2c^2}\left(\frac{dy_b}{dt}\right)^2\right)^{3/2}\times \qquad (12)$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\exp(iny_b)}{n}\left[\tilde{\omega}_b^2\hat{G}_{bn}\rho_{bn} + \tilde{\omega}_p^2\hat{Q}_n\rho_{pn}\right] - \text{к.с.}\right\}.$$

Уравнения (12), дополненные начальными условиями

$$y_\alpha\big|_{t=0} = k_z z_0; \quad \left.\frac{dy_\alpha}{dt}\right|_{t=0} = k_z v_{0\alpha}; \quad \alpha = p,b, \qquad (13)$$

представляют собой нелинейные уравнения пучково-плазменного взаимодействия в релятивистском непотенциальном случае. Эти уравнения отличаются большой общностью, поскольку при их выводе никакие ограничения на динамику рассматриваемых электродинамических процессов не накладывались. (Предполагалось, что при пучковой неустойчивости частота гармоники с номером n близка к nk_zu.) Это отразилось в псевдодифференциальном характере операторов в коэффициентах (10), (11) и бесконечном суммировании по всем гармоникам плотности пучка и плазмы, что в свою очередь приводит к практической невозможности численного решения данных уравнений.

Для упрощения уравнений (12) будем считать, что плотность плазмы много больше плотности пучка, что дает возможность описывать электроны плазмы в линейном приближении. Стоящие же в правых частях уравнений (12) псевдодифференциальные операторы преобразуем следующим образом. Представим

$$y_b = k_z ut + y, \qquad (14)$$

где y — обезразмерная на k_z координата электрона пучка в системе координат, движущейся со скоростью u.

Введем медленные амплитуды гармоник плотности пучка $\tilde{\rho}_{bn}(t)$ и плазмы $\tilde{\rho}_{pn}(t)$, положив

$$\rho_{bn} = \tilde{\rho}_{bn}(t)\exp(-ink_zut);$$
$$\tilde{\rho}_{bn} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left(-iny\right)dy_0; \qquad (15)$$
$$\rho_{pn} = \tilde{\rho}_{pn}(t)\exp(-ink_zut),$$

тогда при выполнении неравенства

$$k_{\perp 1}^2 + n^2k_z^2\gamma^{-2} >> 2n\frac{k_zu}{c^2}\hat{\tilde{\omega}}, \qquad (16)$$

понимаемого в операторном смысле (где $\hat{\tilde{\omega}} = id/dt$ — оператор, действующий только на медленные амплитуды), выражения для коэффициентов (10), можно привести к виду:

$$\hat{G}_{\alpha n} = k_{\perp\alpha n}^{-2}\left[n^2k_z^2\gamma^{-2} - 2\frac{nk_zu}{c^2}\left(1 + \frac{k_z}{2}\frac{d\ln k_{\perp\alpha n}^{-2}}{dk_z}\right)\hat{\tilde{\omega}}\right]$$
$$(\alpha = p,b); \qquad (17)$$
$$\hat{Q}_n = G_n\left[n^2k_z^2\gamma^{-2} - 2\frac{nk_zu}{c^2}\left(1 + \frac{k_z}{2}\frac{d\ln G_n}{dk_z}\right)\hat{\tilde{\omega}}\right],$$

а сами уравнения (12) с учетом (13)—(17) записать следующим образом:

$$\frac{d\varepsilon_n}{d\tau} = -i\frac{n}{\sqrt{\alpha_{b1}}}\left(\eta'_{0n}\varepsilon_n + \sqrt{\tilde{\alpha}'_n}\left(1 - \frac{i}{n}\sqrt{\alpha_{b1}}\sigma\tilde{G}_n\frac{d}{d\tau}\right)\tilde{\rho}_{bn}\right),$$
$$n = 1;\ 2;\ \ldots$$
$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{i}{2}\left(1 - \sigma\sqrt{\alpha_{b1}}\frac{dy}{d\tau}\left(1 + \frac{\sqrt{\alpha_{b1}}}{2}\frac{dy}{d\tau}\right)^2\right)^{3/2}\times \qquad (18)$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\exp(iny)\frac{\alpha_{bn}}{\alpha_{b1}}\left[\sqrt{\tilde{\alpha}'_n}\left(1 - \sigma\tilde{G}_n\eta'_{0n}\right)\varepsilon_n + \right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(1 - \frac{i}{n}\sigma\sqrt{\tilde{\alpha}'_n}\left(\sqrt{\tilde{\alpha}'_n}\tilde{G}_n\left(1 - \sigma\sqrt{\tilde{\alpha}'_n}\tilde{G}_n\right) + \tilde{k}_{bn}\right)\frac{d}{d\tau}\right)\tilde{\rho}_{bn}\right] - \text{к.с.}\right\}.$$

Здесь определены безразмерные переменные и параметры:

$$\tau = \sqrt{\alpha_{b1}} k_z u t; \quad \varepsilon_n = \frac{\sqrt{\tilde{\alpha}_n \sigma \tilde{\sigma}_n}}{S_b k_{\perp pn}^2 G} \frac{\omega_p^2}{{}_n\omega_b^2} \tilde{\rho}_{pn};$$

$$\alpha_{pn} = \frac{\omega_p^2}{k_{\perp pn}^2 u^2 \gamma^2}; \quad \alpha_{bn} = \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{k_{\perp bn}^2 u^2 \gamma^2};$$

$$\eta_{0n} = \frac{1}{\sigma}\left(1 - \frac{1}{\alpha_{pn}}\right); \quad \eta'_{0n} = \frac{\eta_{0n}}{\tilde{\sigma}_n}; \quad \tilde{\alpha}'_n = \frac{\tilde{\alpha}_n}{\sigma \tilde{\sigma}_n};$$

$$\tilde{\sigma}_n = \frac{2}{\sigma \alpha_{pn}} + \tilde{k}_{pn}; \quad \sigma = 2\frac{u^2}{c^2}\gamma^2;$$

$$\tilde{\alpha}_n = k_{\perp pn}^2 k_{\perp bn}^2 S_p S_b G_n^2; \quad \tilde{k}_{\alpha n} = 1 + \frac{k_z}{2}\frac{d \ln k_{\perp \alpha n}^{-2}}{dk_z};$$

$$G_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k_{\perp m}^2 + n^2 k_z^2 \gamma^{-2}} \frac{\varphi_m(\vec{r}_b)\varphi_m(\vec{r}_p)}{\|\varphi_m\|^2}; \qquad (19)$$

$$k_{\perp \alpha n}^{-2} = S_\alpha \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k_{\perp m}^2 + n^2 k_z^2 \gamma^{-2}} \frac{\varphi_m^2(\vec{r}_\alpha)}{\|\varphi_m\|^2}; \quad \alpha = b, p;$$

$$\tilde{G}_n = 1 + \frac{k_z}{2}\frac{d \ln G_n}{dk_z}; \quad \gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2},$$

где $\vec{r}_{b,p}$ — координаты электронного пучка и плазмы в поперечном сечении волновода;

ε_n — медленные амплитуды гармоник плотности плазмы (12).

Уравнения (18) удобны тем, что в них, помимо геометрических факторов и параметров связи, явно входит параметр $\sqrt{\alpha_{b1}}\sigma$ (или $\alpha_{b1}\sigma^2$), определяющий сильноточность пучка [1, 2]. В настоящей работе данный параметр считается малым. Система (18) дополняется стандартными начальными условиями:

$$y_b\big|_{\tau=0} = y_0 + a_0 \cos y_0; \quad \left.\frac{dy_b}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0; \qquad (20)$$

$$\varepsilon_n\big|_{\tau=0} = 0.$$

Результаты анализа

Проводя линеаризацию уравнений (19) и считая, что черенковский резонанс пучка с плазменной волной имеет место на первой пространственной гармонике $n = 1$, можно получить следующее дисперсионное уравнение линейной теории:

$$\left(\eta_{01} - \left(\frac{2}{\sigma\alpha_{p1}} + \tilde{\kappa}_{p1}\right)\frac{\delta\omega}{k_z u}\right)\left(\left(\frac{\delta\omega}{k_z u}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \alpha_{b1}\left(1 - \sigma\tilde{\kappa}_{b1}\frac{\delta\omega}{k_z u}\right)\right) = -\frac{\tilde{\alpha}_1 \alpha_{b1}}{\sigma}\left(1 - \sigma\tilde{G}_1\frac{\delta\omega}{k_z u}\right)^2, \qquad (21)$$

где $\delta\omega$ — комплексный инкремент, причем $\frac{|\delta\omega|}{k_z u} << 1$.

Уравнение (21) подробно проанализировано в работе [4], где были определены различные режимы развития пучковой неустойчивости и получены соответствующие инкременты. В настоящей работе авторы в дальнейшем используют это уравнение при численном интегрировании системы (18) с учетом (20).

Из параметров, определенных в (19), выделим два:

- $\tilde{\alpha}_n$, поскольку именно этот параметр определяет режим развития неустойчивости. Действительно, если плазма и пучок совпадают в поперечном сечении волновода ($\vec{r}_b = \vec{r}_p$), то $\tilde{\alpha}_n = 1$ (19), и в системе реализуется одночастичный эффект Черенкова [1, 2]. Если же $\vec{r}_b \neq \vec{r}_p$ — пучок и плазма разнесены (причем весьма значительно) в пространстве, то $\tilde{\alpha}_n << 1$, и неустойчивость развивается в режиме коллективного эффекта Черенкова [1, 2];
- $\sqrt{\alpha_{b1}}\sigma$ (или $\alpha_{b1}\sigma^2$), определяющий сильноточность пучка [1, 2, 4]. (Поскольку, как видно из (19), за зависимость от плотности пучка в уравнениях (18) отвечают параметры α_{bn} (в частности, α_{b1})).
- Считая, что плазма и пучок представляют собой трубки с толщинами $\Delta_p << r_p$ и $\Delta_b << R_b$ и средними радиусами $r_p < R$ и $r_b < R$, для проведения расчетов зафиксируем следующие значения основных параметров, входящих в уравнения (18) и характеризующих релятивизм пучка, плотность плазмы, а также геометрию системы и начальные условия:

$$R = 1{,}8 \text{ см}, \ r_b = 0{,}65 \text{ см}, \ \Delta_p = \Delta_b = 0{,}1 \text{ см},$$
$$\omega_b = 50 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}, \ \gamma = 2, \ a_0 = 10^{-6}, \qquad (22)$$

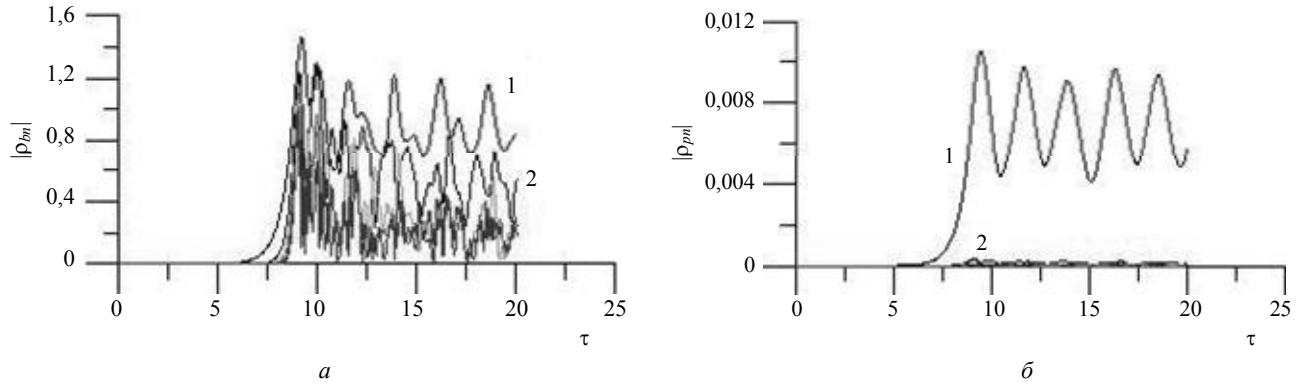
и будем варьировать два параметра: ω_b и r_p, характеризующих плотность плазмы и взаимное расположение плазмы и пучка (их взаимную близость) в волноводе.

Отметим, что геометрические факторы, содержащиеся в коэффициентах уравнений (18) (см. обозначения (19)), вычислялись в цилиндрической системе координат по формулам, приведенным, например, в [1], причем для расчетов использовалось волновое число k_z, соответствующее максимуму инкремента, получаемого в результате численного решения дисперсионного уравнения (21).

Рассмотрим вначале нелинейную динамику пучковой неустойчивости, развивающейся при сильном взаимодействии плазменной и пучковой

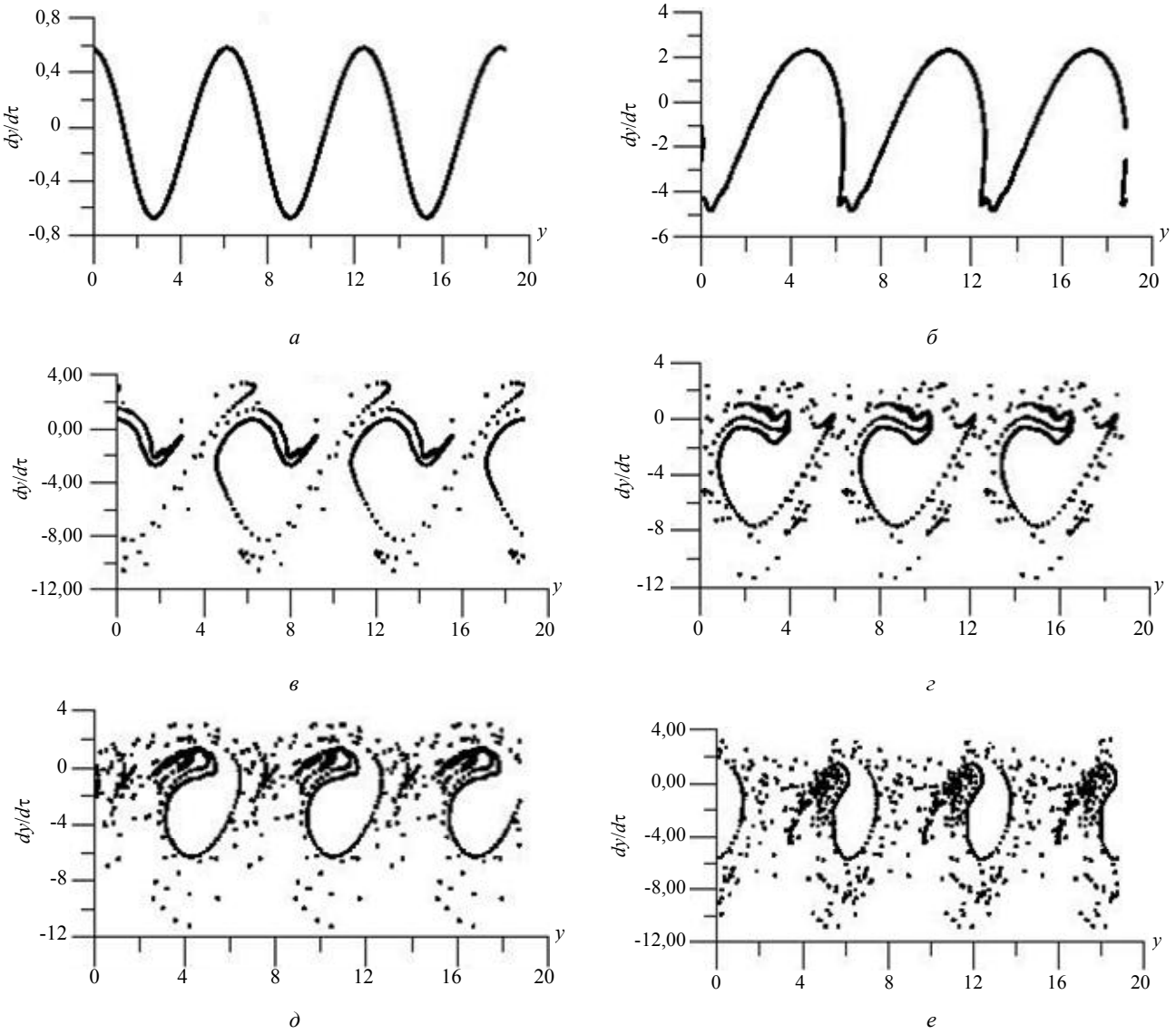
подсистем. Для этого положим r_p = 0,7 см (при этом $\tilde{\alpha}_1 \approx 0,7$) и отдельно проанализируем два предельных случая пучка сравнительно малой и большой плотности.

Результаты расчетов для пучка малой плотности (положим $\omega_b = 1 \cdot 10^{10}$ рад/с) представлены на рис. 1—4.



а *б*

Рис. 1. Зависимости амплитуд волн плотности:
а — пучка; *б* — плазмы от времени при r_p = 0,7 см и $\omega_b = 1 \cdot 10^{10}$ рад/с:
1 — 1-я гармоника; 2 — высшие гармоники



а *б*

в *г*

д *е*

Рис. 2. Фазовые плоскости электронов пучка для шести моментов времени при r_p = 0,7 см и $\omega_b = 1 \cdot 10^{10}$ рад/с:
а — τ = 8; *б* — τ = 9; *в* — τ = 11; *г* — τ = 13; *д* — τ = 15; *е* — τ = 17

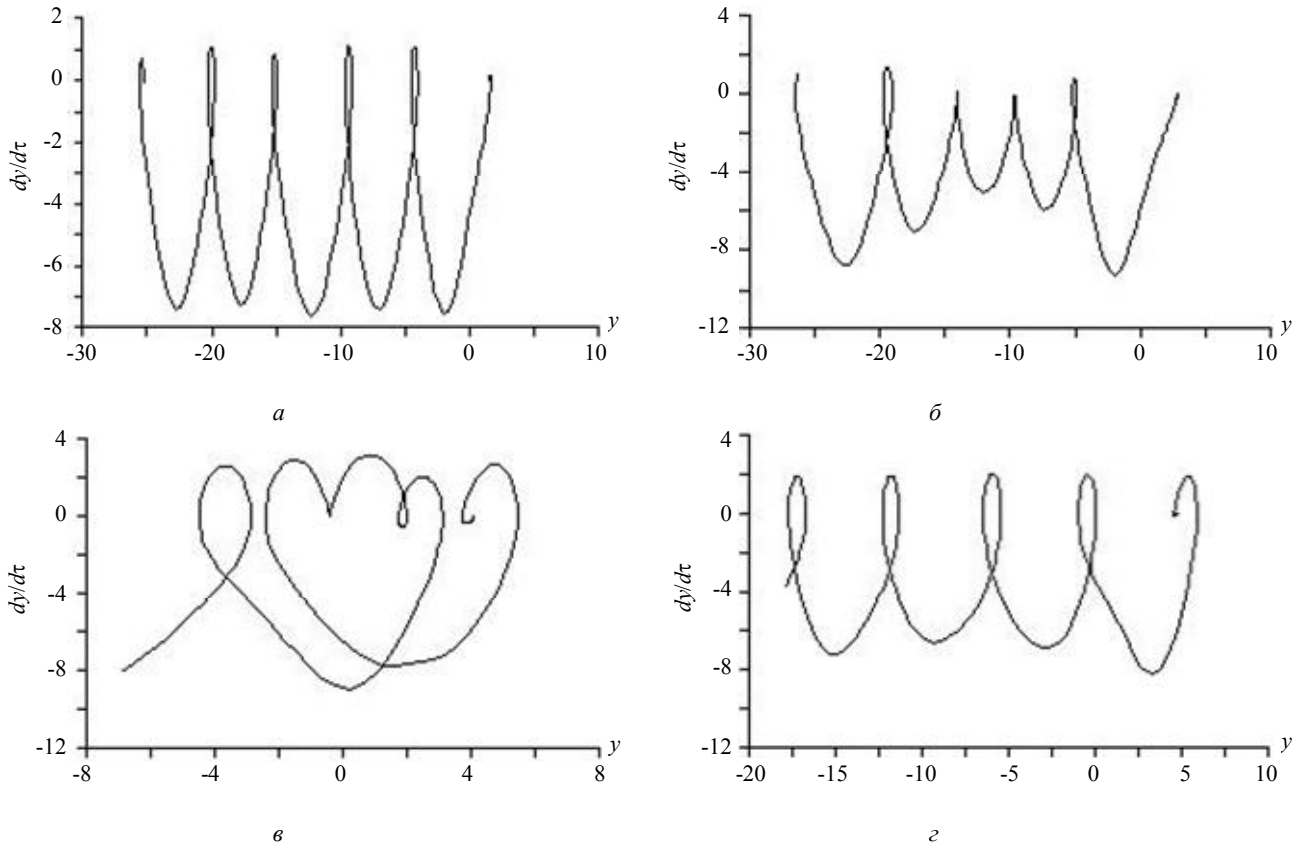


Рис. 3. Фазовые траектории четырех электронов пучка при $r_p = 0{,}7$ см и $\omega_b = 1 \cdot 10^{10}$ рад/с

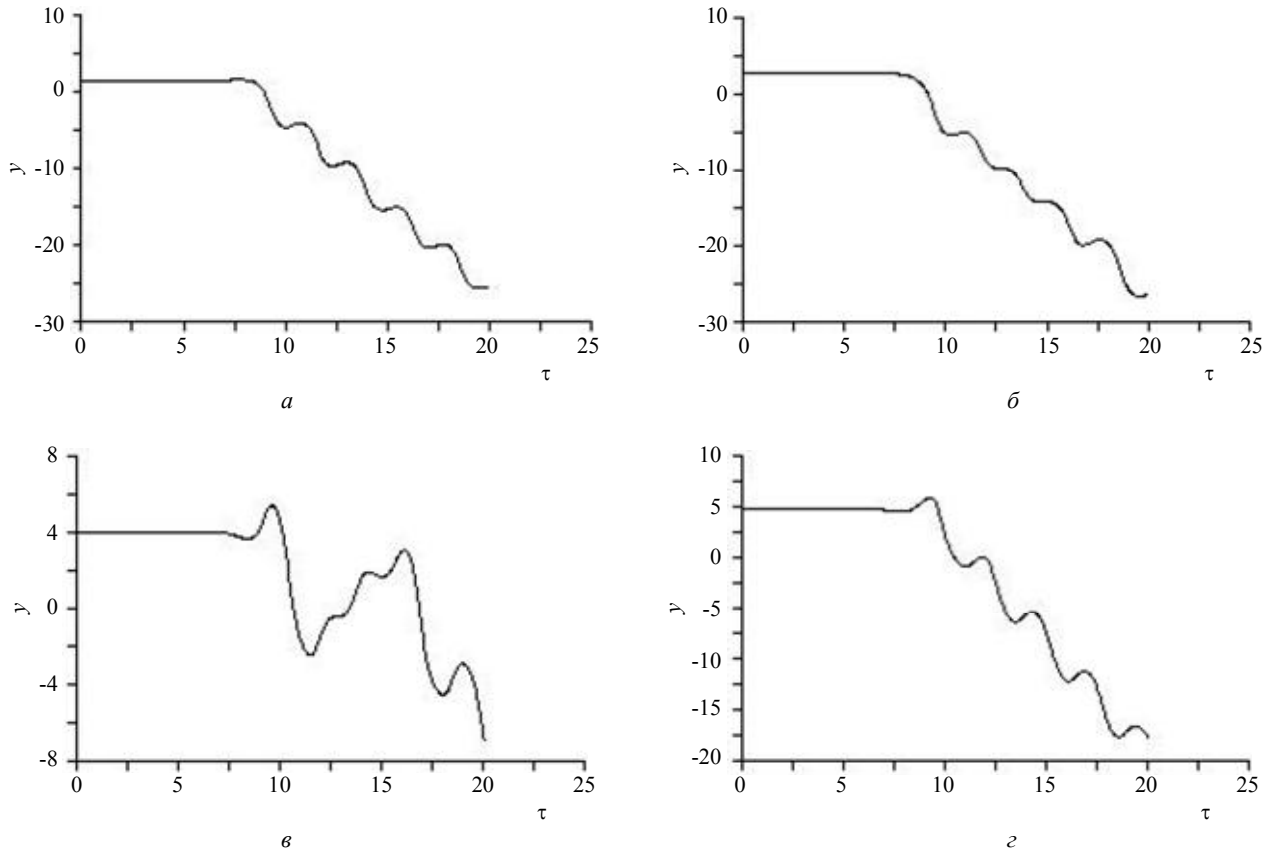


Рис. 4. Зависимости координат четырех электронов (фазовые траектории которых представлены на рис. 3) от времени

На рис. 1, *а*, *б* изображена временная динамика амплитуд первых пяти гармоник плотности электронов пучка $\left|\tilde{\rho}_{bn}(\tau)\right|$ и плазмы $\left|\tilde{\rho}_{pn}(\tau)\right|$, соответственно, на рис. 2, *а*—*е* — фазовые плоскости электронов пучка для шести моментов времени; на рис. 3, *а*—*г* — наиболее характерные фазовые траектории четырех электронов пучка; на рис. 4, *а*—*г* — временная динамика координат $y = y(\tau)$ этих четырех электронов.

Следует отметить, что для большей наглядности на рис. 3 и 4 использована координата электрона $y(\tau)$, являющаяся непосредственным решением уравнений (1) (более точно — по горизонтальной оси на рис. 3 и по вертикальной оси на рис. 4 отложена координата y_j, где j — номер, моделирующий электрон крупной частицы).

Для построения же фазовых плоскостей на рис. 2 использовано значение этой координаты, приведенное к интервалу $[0;2\pi]$ посредством выделения из $y(\tau)$ максимально возможного интервала, кратного целому числу 2π.

Из рис. 1—4 видно, что пучок модулируется полностью ($\left|\tilde{\rho}_{bn}\right| \sim 1$) и в нем интенсивно возбуждаются все гармоники рис. 1, *а*, а стабилизация неустойчивости обусловлена захватом электронов пучка полем плазменной волны. А именно, на каждой длине основной гармоники плазменной волны электроны пучка формируют сгустки, которые совершают колебания между горбами потенциала плазменной волны, то отдавая ей энергию, то отбирая обратно. Поскольку за одно колебание сгусток дважды сталкивается с потенциальными горбами (один раз с передним, другой раз с задним), то осцилляции амплитуды $\left|\tilde{\rho}_{b1}\right|$ происходят вдвое чаще, чем у $\left|\tilde{\rho}_{p1}\right|$, что видно из сравнения рис. 1, *а* и 1, *б*.

Фазовые плоскости электронов пучка на рис. 2 представлены для следующих моментов времени: рис. 2, *а* — $\tau = 8$ — начальный этап развития неустойчивости, когда амплитуды волн растут фактически по экспоненте; *б* — $\tau = 9$ — насыщение неустойчивости; рис. 2 *в*—*е* — $\tau = 11$, 13, 15 и 17, соответственно, — моменты времени, приближенно соответствующие минимумам осцилляций амплитуды $\left|\tilde{\rho}_{p1}\right|$, потому отвечающие полным колебаниям сгустка, т. е. одному, двум, трем и четырем.

Из этих рисунков следует, что на каждом периоде колебаний сгустка с его фронта выделяется группа "отстающих" электронов (от основного потока электронов отделяется их очередной малый поток, аналогично образованию "барашков" на поверхности моря при сильном разгоне волн ветром), что приводит к появлению многопотокового движения.

Более детально различие в поведении электронов на нелинейной стадии развития неустойчивости можно наблюдать на рис. 3 и 4, где представлены фазовые траектории и временная динамика четырех электронов, имеющих в начальный момент времени различные начальные условия $y_0 \in [0;2\pi]$, т. е. располагающихся на длине волны первоначального возмущения в различных точках и попадающих тем самым изначально в различные фазы поля плазменной и пучковой волн и их гармоник.

Из данных рисунков видно, что движение электронов (в системе координат, движущейся с невозмущенной скоростью пучка u) складывается из поступательного (торможение) и колебательного движений (см. рис. 4, *а*, *б*, *г*). Фазовые траектории, соответствующие такому движению, представляют собой кривые "циклоидного" типа (см. рис. 3, *а*, *б*, *г*). Однако возможны более сложные ситуации, когда электроны в некоторые промежутки времени испытывают весьма значительное ускорение, и их замедленное поступательное движение в среднем оказывается незначительным (см. рис. 4, *в* и 3, *в*).

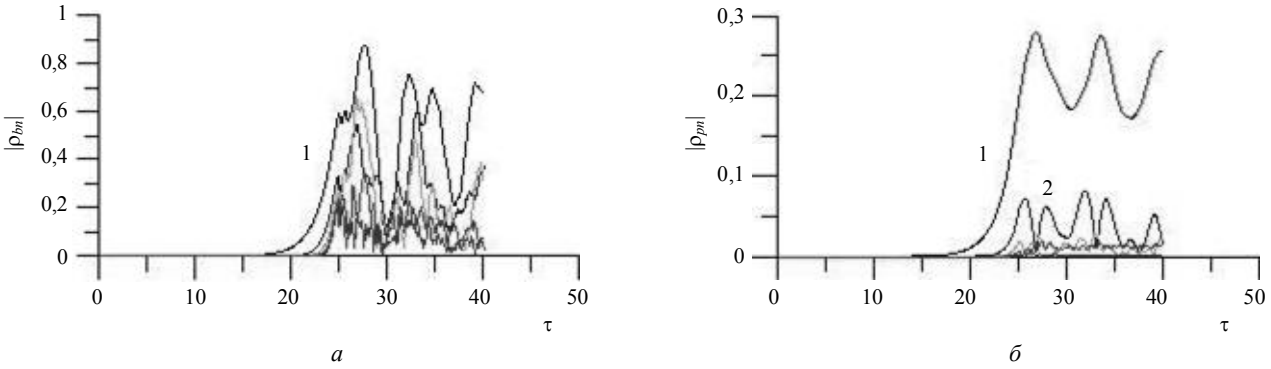
Отметим, что различие в среднем замедленном поступательном движении электронов, имеющих различные начальные условия, видно и из рис. 4, *г,* и 3, *г*, который соответствует промежуточному случаю между рис. 4, *а*, *б*; 3, *а*, *б* и 4, *в*; 3, *в*.

Приведенные выше закономерности нелинейной динамики неустойчивости соответствуют режиму одночастичного эффекта Черенкова, когда плотность пучка сравнительно невелика, и силами высокочастотного пространственного заряда пучка можно пренебречь [1—3].

Рассмотрим теперь противоположный предел пучка сравнительно большой плотности, положим что $\omega_b = 20 \cdot 10^{10}$ рад/с.

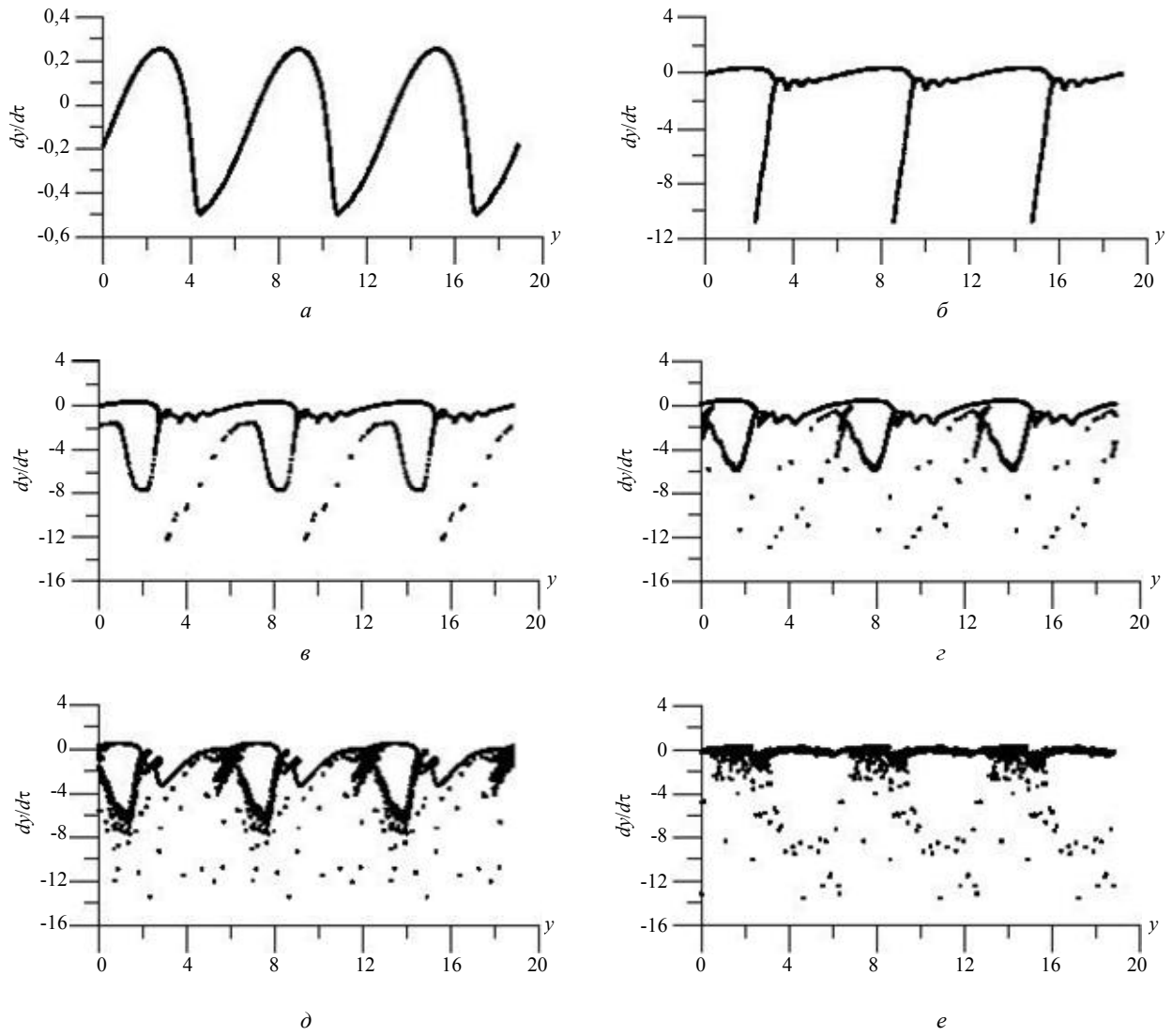
На рис. 5—8 изображено то же, что и на рис. 1—4. Из рис. 5, *а* видно, что пучок также полностью модулируется по плотности, и в нем возбуждаются все гармоники, хотя наиболее интенсивной по-прежнему является первая гармоника. Как следует из рис. 5, *б,* амплитуда насыщения первой гармоники плазменной волны $\left|\tilde{\rho}_{p1}\right| \sim 0{,}28$, что находится уже на грани возможности использования для описания динамики электронов плазмы линейного приближения — системы (18). (Ясно, что дальнейшее увеличение плотности пучка, т. е. большее ее приближение к плотности плазмы, приводит к развитию в системе двухпучковой неустойчивости, которая в данной работе не рассматривается.) Из этого же рисунка видно, что ос-

цилляции первой гармоники на стадии после насыщения неустойчивости являются менее регулярными по сравнению с изображенными на рис. 1, *б*, и, кроме того, начинают возбуждаться кратные гармоники плазменной волны, наиболее интенсивной из которых является вторая.



а *б*

Рис. 5. Зависимости амплитуд волн плотности от времени при r_p = 0,7 см и $\omega_b = 20 \cdot 10^{10}$ рад/с:
а — пучка; *б* — плазмы;
1 — 1-я гармоника; 2 — высшие гармоники



а *б* *в* *г* *д* *е*

Рис. 6. Фазовые плоскости электронов пучка для шести моментов времени при r_p = 0,7 см и $\omega_b = 20 \cdot 10^{10}$ рад/с:
а — τ = 24; *б* — τ = 25; *в* — τ = 25,5; *г* — τ = 26; *д* — τ = 27; *е* — τ = 30

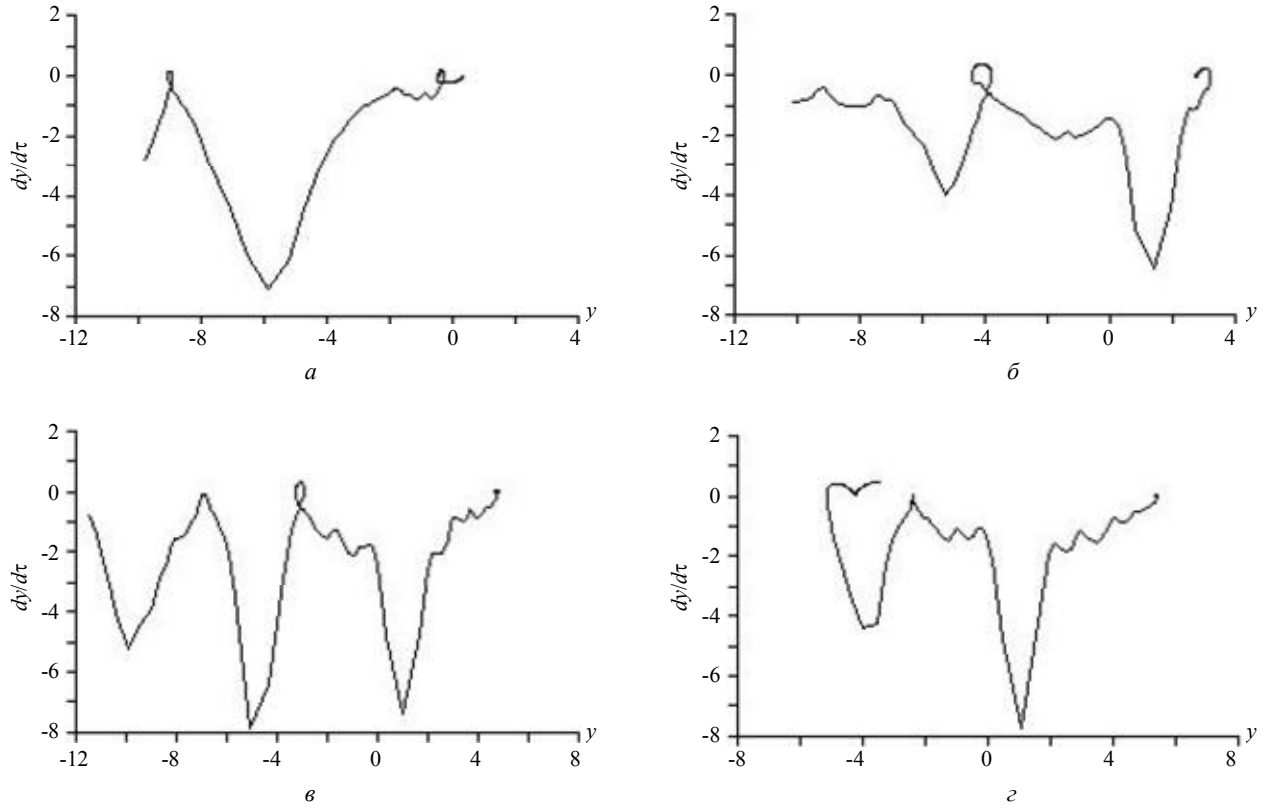


Рис. 7. Фазовые траектории четырех электронов пучка при r_p = 0,7 см и $\omega_b = 20 \cdot 10^{10}$ рад/с

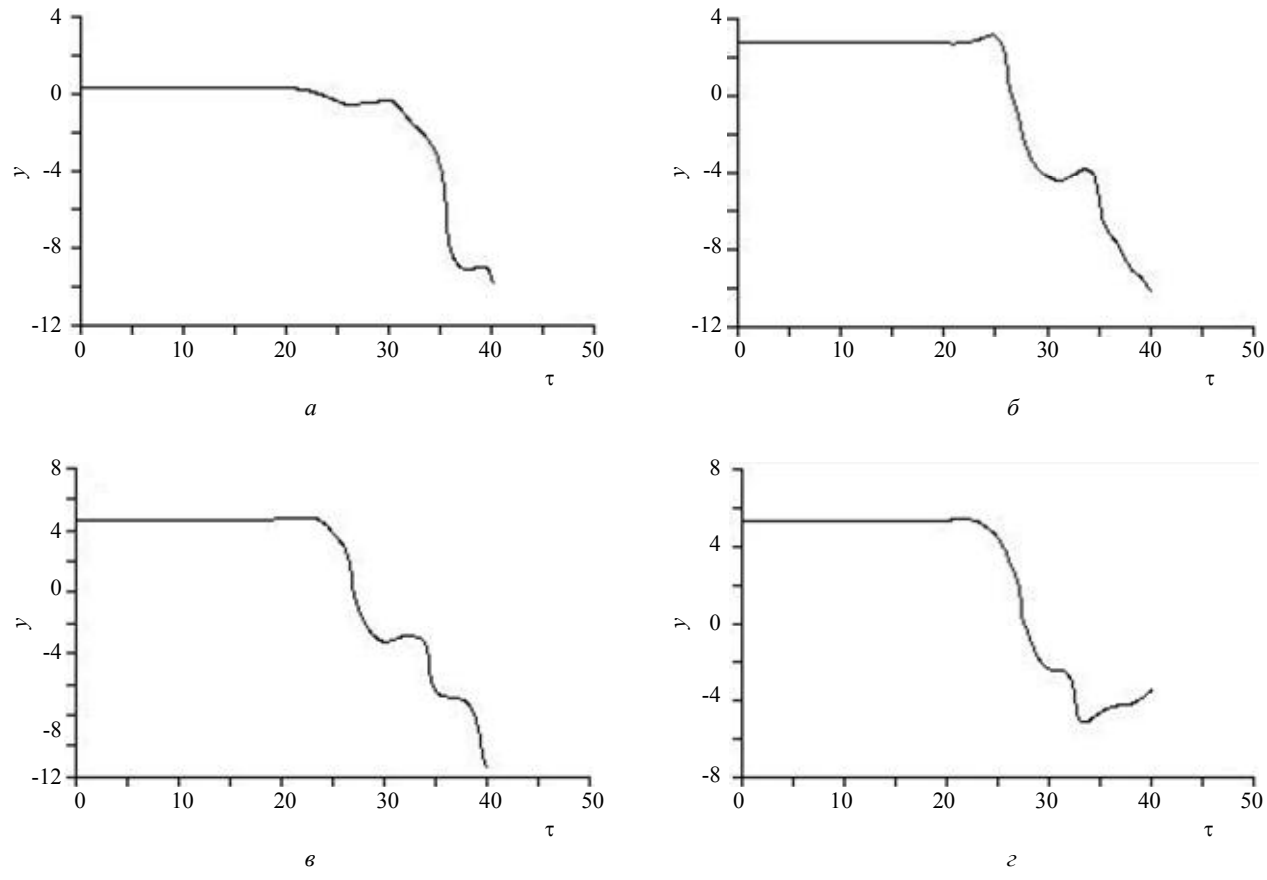


Рис. 8. Зависимости координат четырех электронов (фазовые траектории которых представлены на рис. 7) от времени

На рис. 6 даны фазовые плоскости электронов пучка для моментов времени от $\tau = 24$ до $\tau = 30$.

Из них видно, что в отличие от предыдущего случая насыщение не обусловлено захватом электронов пучка полем плазменной волны. Сгусток образуется чрезвычайно резко, поскольку электроны в тормозящих фазах поля из-за релятивистского увеличения массы, интенсивно теряя скорость, устремляются к центру будущего сгустка, не успевая при этом заметно сместиться (см. рис. 6, *б*). В последующие моменты времени часть электронов вблизи центра сгустка, имеющих наибольшие относительные отрицательные скорости, попадают в ускоряющую фазу поля, но поскольку силы высокочастотного пространственного заряда пучка уже весьма значительны, эти электроны не успевают приобрести положительные скорости, и происходит их отражение (см. рис. 6, *в*). В дальнейшем образуется все больше групп отраженных электронов, что приводит к появлению многопотоковости (см. рис. 6, *г*, *д*), и к моменту времени, соответствующему минимуму пучковых и плазменных волн ($\tau \sim 30$) — фактически к развалу сгустка (см. рис. 6, *е*).

В дальнейшем ($30 < \tau < 37$) процесс формирования сгустка многопотоковой структуры (см. рис. 6, *д*) и последующий ее развал повторяются. Все это характерно для развития неустойчивости в апериодическом режиме [1, 2]. Иллюстрацией данного утверждения являются также изображения на рис. 7 и 8 в их сравнении с рис. 3 и 4.

Так, например, в отличие от рис. 4 на рис. 8 видно практически непрерывное, монотонное уменьшение координаты электронов пучка (до $\tau \sim 30$), что в свою очередь свидетельствует о совершении электронами лишь поступательного движения, обусловленного их резким (апериодическим) торможением.

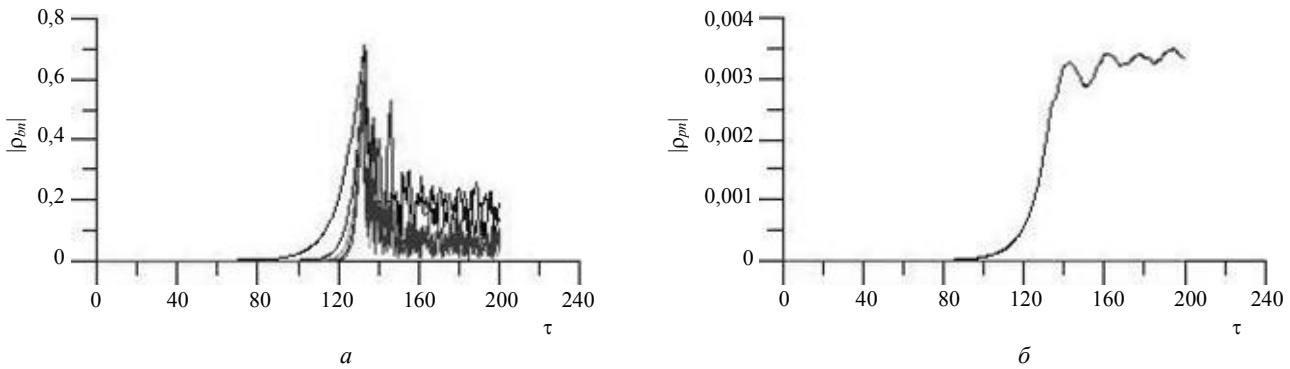
Пусть теперь связь плазменной и пучковой подсистем является слабой. Известно, что неустойчивость при этом будет развиваться в режиме коллективного эффекта Черенкова [1, 2]. Рассмотрим, как изменяется нелинейная динамика неустойчивости при увеличении плотности пучка.

В случае пучка малой плотности положим $\omega_b = 1 \cdot 10^{10}$ рад/с, r_p = 1,3 см, $\tilde{\alpha}_1 \approx 2{,}2 \cdot 10^{-3}$. Результаты расчетов для пучка малой плотности представлены на рис. 9—12.

Из рис. 9, *б* видно, что на стадии после насыщения амплитуда плазменной волны изменяется нерегулярно, и ее осцилляции затухают. Модуляция же пучка при этом сильно падает (см. рис. 9, *а*). Такое поведение амплитуд волн обусловлено хаотизацией пучка, которую можно наблюдать на фазовых плоскостях (см. рис. 10, *г*—*е*). Предшествующее данной хаотизации появление групп отраженных электронов и возникновение многопотокового движения изображены на рис. 10, *б*, *в*.

В данном случае механизмом насыщения неустойчивости является самозахват или отражение электронов от "горбов" потенциала пучковой волны, после которого в пучке возникает многопотоковое течение, и он хаотизируется [1, 2].

Здесь следует дать следующее пояснение. Как известно, самозахват электронов реализуется в пучках достаточно большой плотности [1, 2]. Авторы же для удобства сравнения с рассмотренным ранее случаем сильной связи использовали пучок весьма малой плотности. Однако второй параметр задачи, определяющий связь плазмы и пучка, в свою очередь, был выбран столь малым, что в таких условиях плазменная волна также не успевает вырасти до необходимой величины для захвата ею электронов пучка. Пучковая же волна, как и ранее, вырастая до значительных амплитуд, имеет возможность захватить электроны пучка собственным полем. Но в данном случае все же имеет место некоторая комбинация двух механизмов насыщения — захвата и самозахвата.



а *б*

Рис. 9. Зависимости амплитуд волн плотности от времени при r_p = 1,3 см и $\omega_b = 1 \cdot 10^{10}$ рад/с:
а — пучка; *б* — плазмы

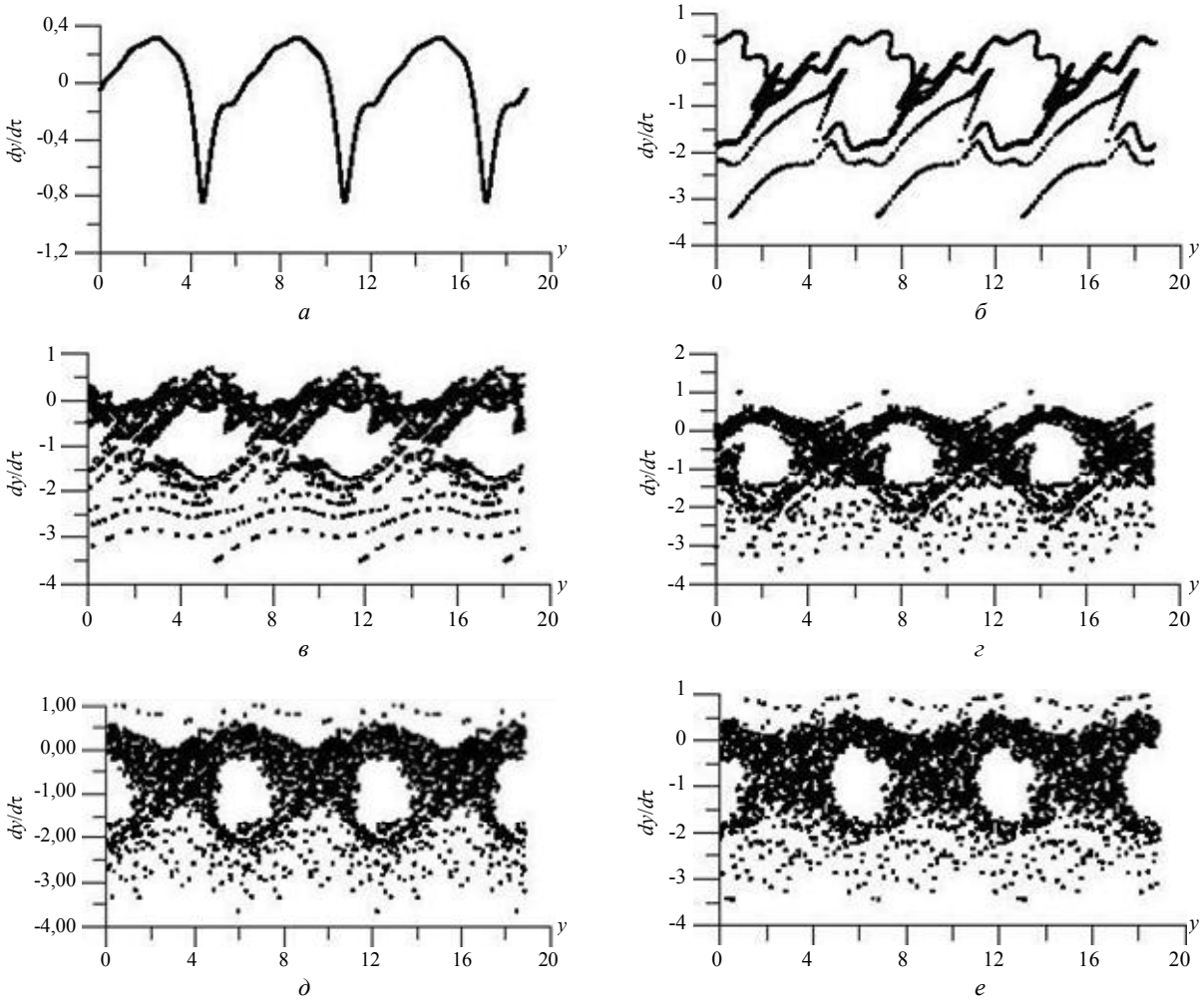


Рис. 10. Фазовые плоскости электронов пучка для шести моментов времени при r_p = 1,3 см и $\omega_b = 1 \cdot 10^{10}$ рад/с:
а — τ = 130; *б* — τ = 140; *в* — τ = 150; *г* — τ = 160; *д* — τ = 170; *е* — τ = 200

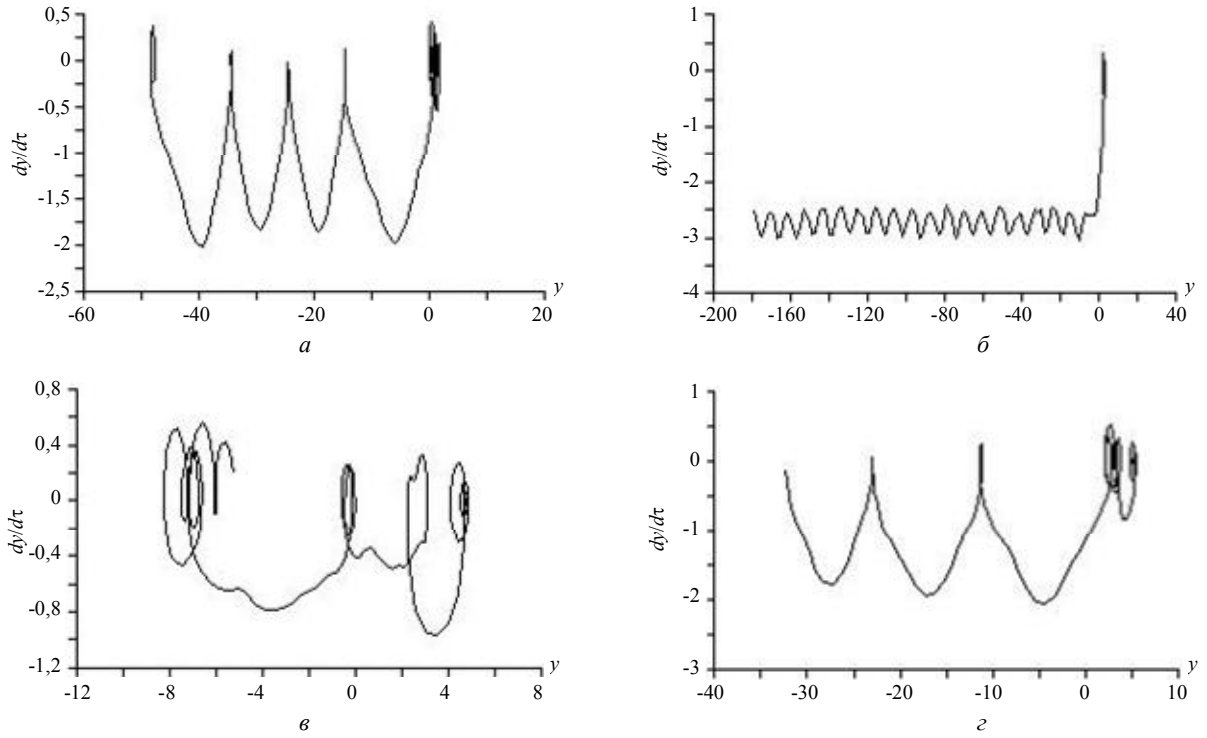


Рис. 11. Фазовые траектории четырех электронов пучка при r_p = 1,3 см и $\omega_b = 1 \cdot 10^{10}$ рад/с

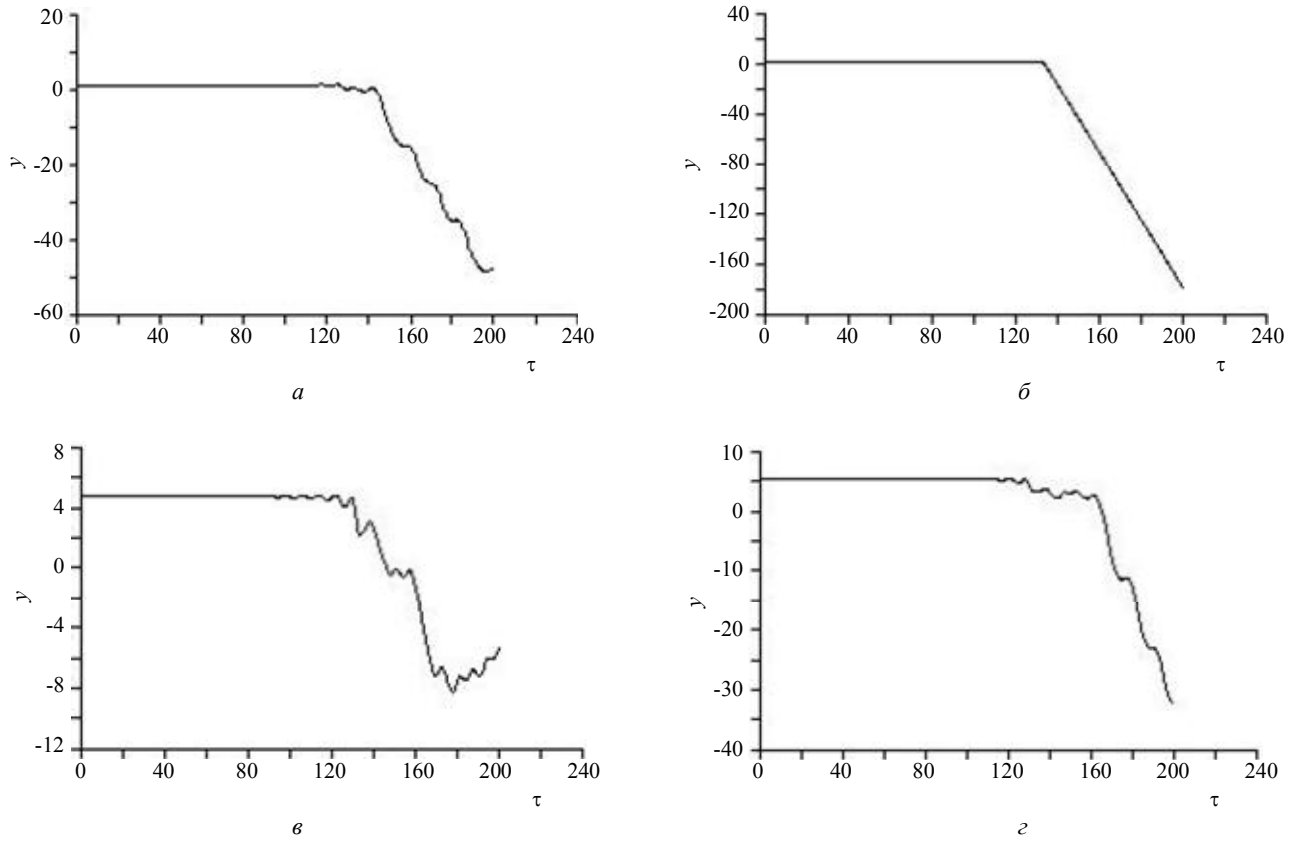


Рис. 12. Зависимости координат четырех электронов (фазовые траектории которых представлены на рис. 11) от времени

Несмотря на то, что сгусток (см. рис. 2) явно не образуется, некоторые электроны, как видно из рис. 11, *а*, *в*, *г* и 12, *а*, *в*, *г,* совершают движения, аналогичные изображенным на рис. 3 и 4. Вместе с тем в отличие от случая сильной связи появляются "пролетные" электроны (см. рис. 11, *б* и 12, *б*). Как видно из рис. 10, *д*, *е*, таких сильно заторможенных электронов достаточно много (в нижней части данных фазовых плоскостей). Из этих же рисунков следует, что помимо заторможенных имеется еще и некоторое число ускоренных электронов. Все это позволяет рассматривать структуру, изображенную на рис. 10, *е*, как стохастический слой, образованный в окрестности сепаратрисы, и объяснить наблюдаемую хаотизацию пучка известным сценарием возникновения хаоса в гамильтоновских системах вследствие разрушения сепаратрисы под действием некоторого периодического нетривиального возмущения (которое может быть сколь угодно малым) [5].

Рассмотрим теперь предельный случай пучка большой плотности. Положим, что $\omega_b = 30 \cdot 10^{10}$ рад/с, $r_p = 1$ см, $\tilde{\alpha}_1 \approx 2{,}3 \cdot 10^{-3}$. Результаты расчетов представлены на рис. 13—16.

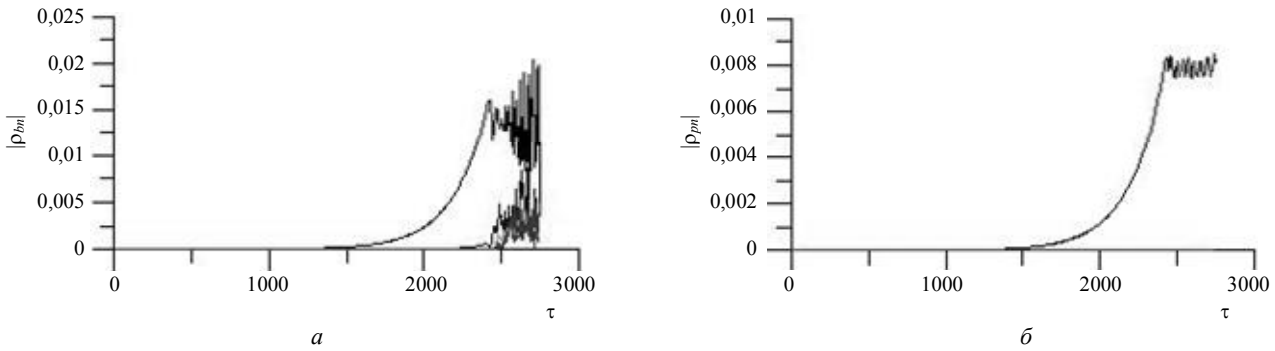


Рис. 13. Зависимости амплитуд волн плотности от времени при $r_p = 1$ см и $\omega_b = 30 \cdot 10^{10}$ рад/с:
а — пучка; *б* — плазмы

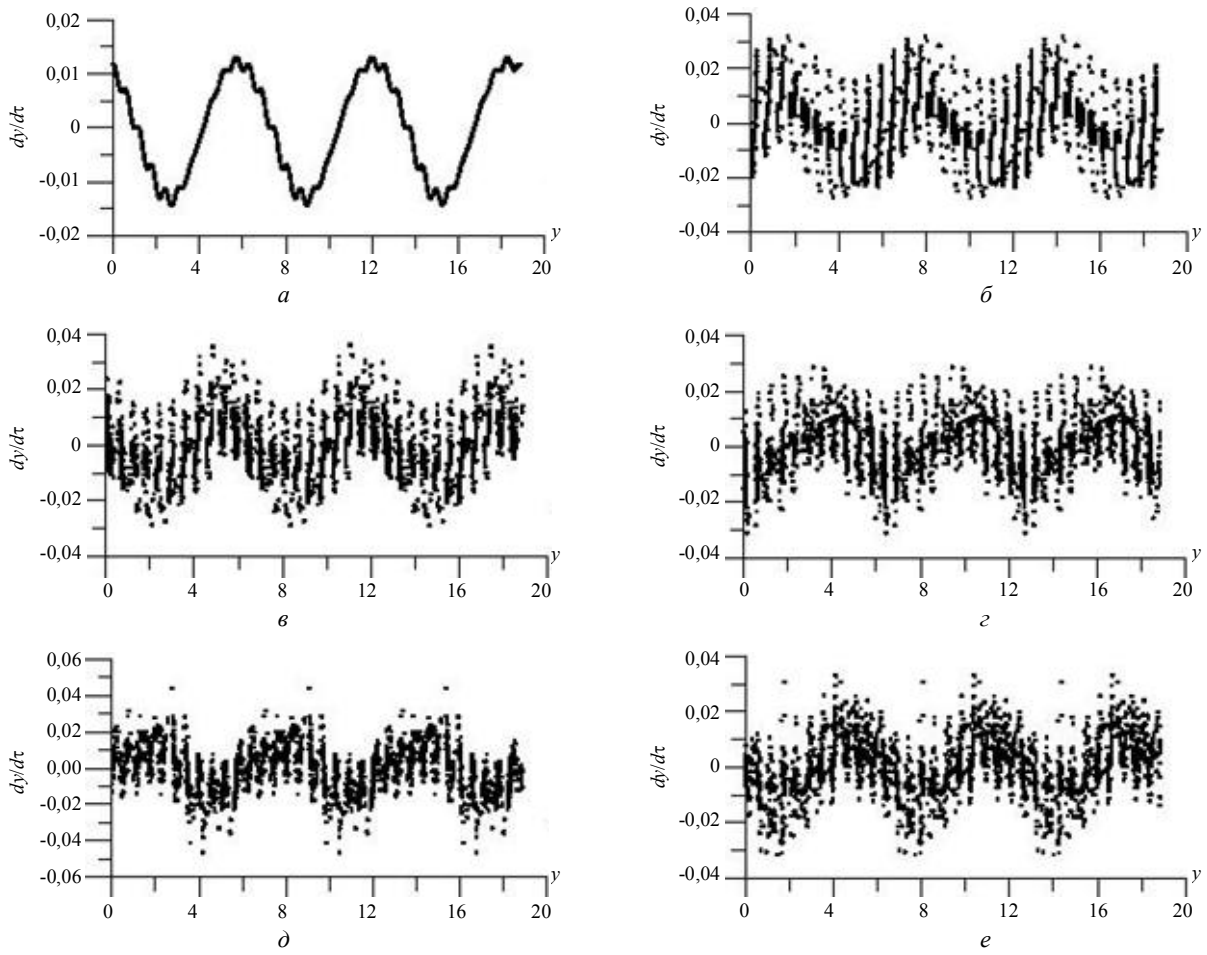


Рис. 14. Фазовые плоскости электронов пучка для шести моментов времени при r_p = 1 см и $\omega_b = 30 \cdot 10^{10}$ рад/с:
а — τ = 2400; *б* — τ = 2450; *в* — τ = 2500; *г* — τ = 2550; *д* — τ = 2600; *е* — τ = 2650

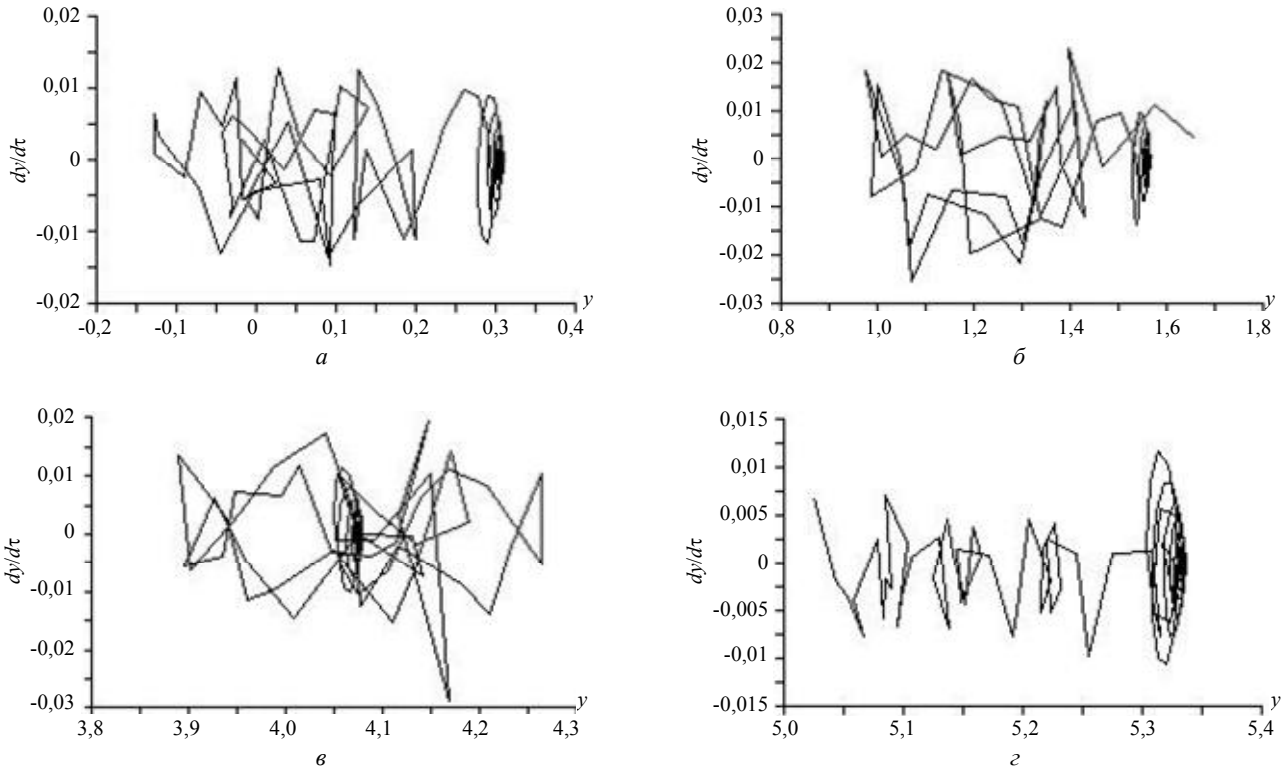


Рис. 15. Фазовые траектории четырех электронов пучка при r_p = 1 см и $\omega_b = 30 \cdot 10^{10}$ рад/с

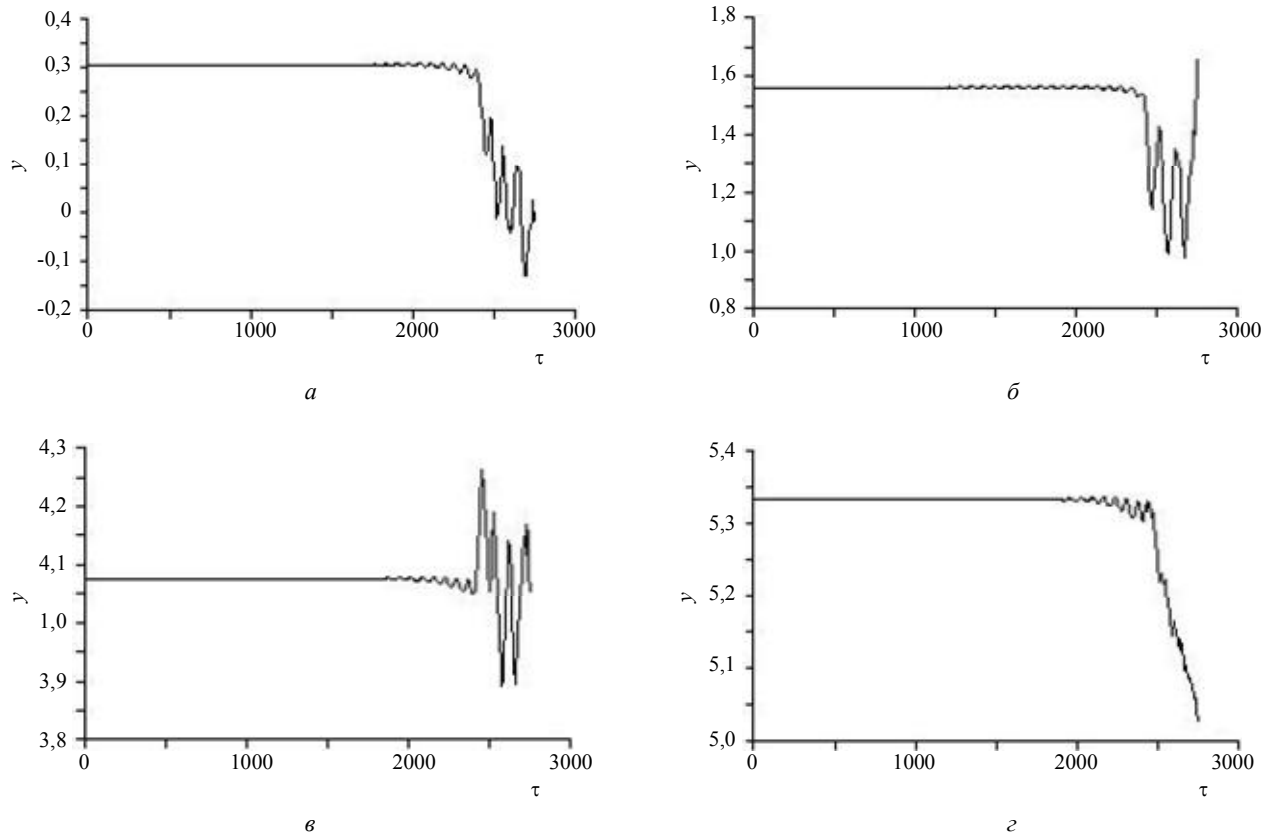


Рис. 16. Зависимости координат четырех электронов (фазовые плоскости которых представлены на рис. 15) от времени

Как видно из рис. 13, *б*, после насыщения амплитуда плазменной волны остается практически постоянной, испытывая весьма незначительные осцилляции. Как уже говорилось ранее, это характерно для развития неустойчивости в режиме коллективного эффекта Черенкова [1, 2].

Динамика электронов для шести моментов времени, соответствующих различным стадиям развития неустойчивости, представлена на рис. 14. Вплоть до момента времени $\tau = 2400$ (см. рис. 14, *а*), уже весьма близкого ко времени насыщения, расположение электронов на фазовой плоскости остается с хорошей степенью точности регулярным и соответствует начальной модуляции пучка на первой гармонике.

Кратные гармоники еще практически не возбуждены и вносят в гармоническое движение электронов лишь слабые возмущения, проявляющиеся в том, что на начальную (длинноволновую) модуляцию накладывается пока еще очень малая модуляция с мéньшим пространственным масштабом (см. рис. 14, *а*).

С ростом времени генерация высших гармоник плотности пучка усиливается (см. рис. 13, *а*). Но даже спустя некоторое время после стабилизации неустойчивости в пучке по-прежнему хорошо заметна крупномасштабная модуляция на первой гармонике, поверх которой образовалась существенно более мелкомасштабная структура, являющаяся, очевидно, результатом наложения всех кратных гармоник плотности пучка (см. рис. 14, *б—е*). Как следует из рис. 14—16, в результате развития неустойчивости фактически не происходит ни крупномасштабного многопотокового движения частиц, ни их хаотизации. Так, из рис. 15 и 16 видно, что в процессе развития неустойчивости все движение электронов локализовано в сравнительно малом интервале значений координат (~0,4). Такое незначительное изменение начальных координат говорит о том, что движение электрона носит в основном колебательный характер, среднее же движение электронов, проявляющееся ранее в их сильном торможении, в данном случае отсутствует. На рис. 15 и 16 хорошо видно, что все электроны совершают, практически вплоть до момента насыщения, гармонические колебания с увеличивающейся амплитудой относительно своих начальных положений. (Начальные участки фазовых траекторий см. на рис. 15.)

Таким образом, насыщение неустойчивости, как видно из анализа нелинейной динамики электронов, не обусловлено описанными ранее явле-

ниями захвата или самозахвата. Неустойчивость стабилизируется прежде чем амплитуды волн вырастут до необходимого для захвата электронов уровня вследствие выхода пучка из резонанса с плазменной волной. Такое же быстрое нарушение синхронизма связано с тем, что интервал волновых чисел k_z, при которых имеет место неустойчивость, в случае очень плотного пучка весьма узок [1, 2]. Данный механизм стабилизации неустойчивости называется нелинейным сдвигом частоты [1, 2].

Среди факторов, определяющих насыщение неустойчивости, выделяют нелинейные сдвиги частот, связанные с торможением пучка, релятивизмом, а также с генерацией высших гармоник его плотности. Причем в зависимости от плотности пучка и степени его релятивизма могут реализовываться режимы, при которых определяющую роль будет играть каждый из трех перечисленных выше факторов.

В частности, в случае, представленном на рис. 13—16, несущественным оказывается нелинейный сдвиг частоты, связанный с торможением пучка.

Это обусловлено тем, что в расчетах был использован фактически сверхплотный релятивистский пучок, который можно считать сильноточным, так как для него параметр сильноточности $\sqrt{\alpha_{b1}}\sigma = 0{,}92 \sim 1$.

Если же использовать менее сильноточные пучки, то начинают увеличиваться, а со временем сделаются определяющими нелинейные сдвиги частот, связанные с торможением пучка.

Для примера на рис. 17, *а*, *б* представлены фазовые траектории двух электронов пучка, для которого $\omega_b = 20 \cdot 10^{10}$ рад/с. (Остальные параметры те же, что и на рис. 13—16.)

В отличие от рис. 15 среднее смещение электронов из начального положения становится уже более заметным и составляет порядка нескольких единиц. Данный случай является промежуточным между случаями, изображенными на рис. 9—12 и рис. 13—16 (хотя, ближе, конечно, к последнему), и потому графики остальных величин (для краткости изложения) не приводятся.

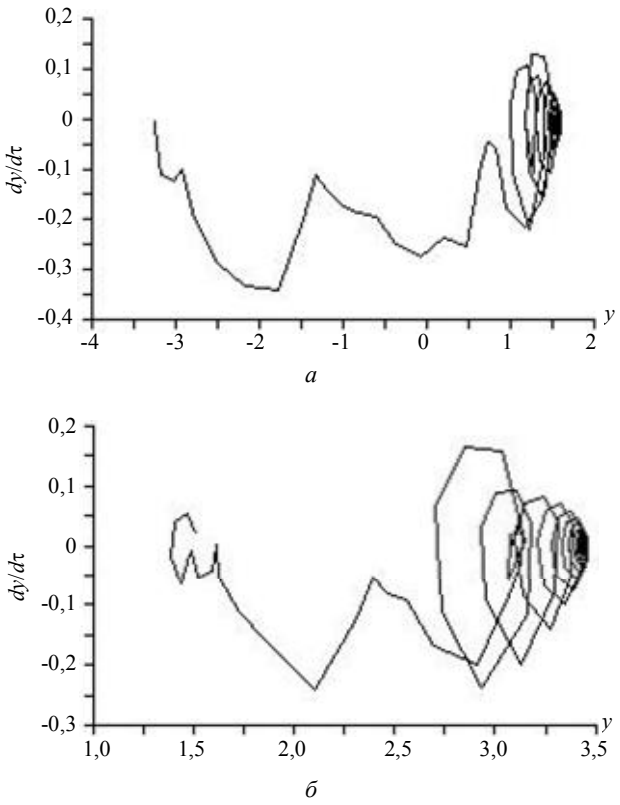


Рис. 17. Фазовые траектории двух электронов пучка при r_p = 1 см и $\omega_b = 20 \cdot 10^{10}$ рад/с

Заключение

В данной работе рассмотрены случаи пучковой неустойчивости, значительно отличающиеся друг от друга по своей нелинейной динамике на стадии насыщения. Однако в “чистом виде” подобное реализуется весьма редко, и при произвольной плотности пучка нелинейная динамика неустойчивости на стадии ее стабилизации, очевидно, сочетает в себе черты, присущие этим предельным случаям.

Литература

1. *Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Стрелков П. С.* Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.

2. *Кузелев М. В., Рухадзе А. А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. — М.: Наука, 1990.

3. *Бобылёв Ю. В., Кузелев М. В., Рухадзе А. А.*//Физика плазмы, 2008. Т. 34. № 2. С. 122.

4. *Бобылёв Ю. В., Кузелев М. В.*//Там же. 2004. Т. 30. № 1. С. 73.

5. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.* Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. — М.: Наука, 1988.

Computational modeling of stabilization of instability for a relativist electron beam in the dense plasma

Yu. V. Bobylev, V. A. Panin
Tula Pedagogical University, 125 Lenin av., Tula, 300026, Russia
E-mail: tapu@tula.net

M. V. Kuzelev
Moscow State University, 1 Lenin gory, Moscow, 119991, Russia

A. A. Rukhadze
General Physics Institute, 38 Vavilov str., Moscow, 119991, Russia

Nonlinear dynamics of instability for a relativist electron beam in the dense plasma is investigated by a method of computational modeling.

PACS: 52.35.-g

Keywords: modeling, beam, electron, plasma, instability.

Bibliography — 5 references. *Received 25 December 2009*

* * *