

УДК 537.312.62

Условия устойчивости системы сверхпроводящих контуров во внешнем магнитном поле

В. А. Шувалов, А. А. Яковлев

Рассматривается задача определения устойчивых состояний равновесия пространственной структуры из системы сверхпроводящих контуров с током во внешнем магнитном поле. Получены условия, позволяющие формировать устойчивую бесконтактную конфигурацию магнитоактивных сверхпроводящих объектов на основе только магнитных сил взаимодействия.

PACS: 85.25.-j

Ключевые слова: магнитный поток, индуктивность, устойчивость, равновесные состояния, сверхпроводящий контур.

Введение

Проектирование электромеханических систем с бесконтактным магнитным подвесом связано с задачей определения равновесных конфигураций магнитоактивных тел (в магнитном поле) при конечных и не равных нулю расстояниях между ними. Более того, целесообразно проектировать систему таким образом, чтобы состояния равновесия были устойчивыми.

Подробные исследования Браунбека [1] показали, что в изолированной системе постоянных магнитов или электромагнитов (т. е. в отсутствии сил немагнитной природы) не существуют устойчивые равновесные структуры магнитоактивных тел. Этот результат является аналогом известной в электростатике теоремы Ирншоу [2], поэтому в литературе его иногда называют теоремой Ирншоу—Браунбека. Тем не менее, исключение есть и, как показал сам Браунбек, оно связано с присутствием диамагнетиков в системе магнитов, которые могут приводить к образованию устойчивых структур. Но диамагнитные силы являются крайне малыми по величине и в технических проектах не рассматриваются.

Известно, что в теории электричества в основе представлений о силовом взаимодействии квазипостоянных токов (постоянных магнитов, электромагнитов) лежит замкнутый контур с током [2]. Однако ток в данном контуре без источника пита-

ния циркулировать не может и, следовательно, эта аппроксимация является всего лишь удобной абстракцией реальной электромеханической системы.

Развитие технической сверхпроводимости привело к созданию замкнутых сверхпроводящих контуров (соленоидов, цепей), ток в которых может циркулировать сколь угодно долго без источника питания (идеальный электрический контур с активным сопротивлением, равным нулю). И это не абстракция, а реальный технический объект. Электромеханическое взаимодействие таких контуров имеет свои особенности, которые приводят к дополнительным состояниям равновесия пространственных структур, в том числе к устойчивым.

Связано это с эффектом сохранения сверхпроводящим контуром полного магнитного потока [3]. В работах [4, 5] показано, что в системе двух сверхпроводящих контуров, расположенных ортогонально на одной оси, отмечаются устойчивые положения равновесия. Однако решение задачи для большего числа контуров и при их произвольном положении не приводится.

Для создания устойчивых конфигураций объектов в пространстве, снабженных сверхпроводящими магнитами, требуется определить условия, при которых такие положения возможны, если они вообще существуют.

Условие существования равновесных положений системы сверхпроводящих контуров

В работе [5] получена силовая функция для сверхпроводящего замкнутого контура в магнитном поле, активное сопротивление которого равно нулю:

$$U = -\Phi \left(I_0 - \frac{\Phi}{2L} \right), \quad (1)$$

Шувалов Вячеслав Александрович, начальник лаборатории.
Яковлев Александр Александрович, ведущий научный сотрудник.

ЦНИИ машиностроения.

Россия, 141070, Московская обл., г. Королев, ул. Пионерская, 4.
Тел. 8 (495) 513-41-46. E-mail: s5134146@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 25 марта 2010 г.

где Φ — магнитный поток внешнего поля, проникающий через контур;

I_0 — транспортный (начальный) ток в контуре, т. е. тот ток, который будет в контуре при отсутствии внешних полей;

L — индуктивность контура.

Для системы из n сверхпроводящих контуров во внешнем магнитном поле силовую функцию, исходя из выражения (1), можно записать:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i.$$

Дальнейшие выкладки будем проводить в матричной форме. Для этого введем следующие обозначения:

\vec{J}, \vec{I} — векторы полных и транспортных (начальных) токов в контурах размерностью n ;

$\vec{\Phi}_B$ — вектор потоков, проникающих через контуры, от внешнего магнитного поля размерностью n ;

L — матрица, элементами которой являются собственные (главная диагональ) и взаимные индуктивности размерностью $n \times n$;

$L_c = \text{diag} [L_{11}, \dots, L_{nn}]$ — матрица собственных индуктивностей;

$\vec{\Phi}$ — вектор потоков, включающий потоки от внешнего магнитного поля и от сверхпроводящих контуров (кроме собственного), размерностью n имеет вид:

$$\vec{\Phi} = (L - L_c)\vec{J} + \vec{\Phi}_B. \quad (2)$$

В соответствии с введенными обозначениями силовую функцию для системы из n сверхпроводящих контуров во внешнем магнитном поле можно записать:

$$U = -\vec{\Phi}^T \vec{I} + \frac{1}{2} \vec{\Phi}^T L_c^{-1} \vec{\Phi}. \quad (3)$$

С учетом условия сохранения полного магнитного потока через контур

$$L_c \vec{I} = L \vec{J} + \vec{\Phi}_B \quad (4)$$

силовая функция (3) примет вид:

$$U = \frac{1}{2} \vec{J}^T L_c \vec{J} - \frac{1}{2} \vec{I}^T L_c \vec{I}. \quad (5)$$

Для нахождения условий равновесия системы из n сверхпроводящих контуров во внешнем магнитном поле найдем экстремум силовой функции (5), для чего определим ее производную по произвольной координате q , учитывая условия сохранения полного магнитного потока (4):

$$\frac{\partial U}{\partial q} = -\vec{J}^T L_c L^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \vec{J} + \frac{\partial \vec{\Phi}_B}{\partial q} \right). \quad (6)$$

Из соотношения (6) видно, что условием равновесия системы сверхпроводящих контуров является равенство нулю вектора полных токов $\vec{J} = 0$ или, учитывая (4),

$$\vec{\Phi}_B = L_c \vec{I}. \quad (7)$$

Условие устойчивости системы сверхпроводящих контуров

Для определения устойчивости решения (7) найдем вторую производную силовой функции (5) по произвольным координатам. После преобразований с учетом (4) она примет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q \partial p} = \frac{\partial \vec{\Phi}_B^T}{\partial p} L^{-1} L_c L^{-1} \frac{\partial \vec{\Phi}_B}{\partial q}. \quad (8)$$

Согласно критерию Сильвестра [6], если все главные диагональные определители матрицы, элементы которой представляют собой выражения (8), больше нуля, то потенциальная энергия в положении равновесия имеет минимум, и поэтому положение равновесия устойчиво. В нашем случае матрица Сильвестра представляет собой матрицу Грама, одним из свойств которой является то, что ее главные определители не могут принимать отрицательные значения [7], т. е. полученное решение (7) не может быть неустойчивым. Нулевые значения главные определители матрицы Грама принимают только тогда, когда векторы, составляющие ее, линейно зависимы.

В данном случае для получения ненулевых главных определителей матрицы Сильвестра, а, следовательно, и обеспечения устойчивости системы сверхпроводящих контуров во внешнем магнитном поле необходимо, чтобы число степеней свободы системы не превышало числа контуров.

Таким образом, в пространстве шести координат необходимым условием наличия устойчивых положений тела во внешнем магнитном поле — его жесткая связь с не менее чем шестью сверхпроводящими контурами.

Заключение

- Определены равновесные положения в произвольной системе сверхпроводящих контуров во внешнем магнитном поле.
- Получены необходимые условия устойчивости системы сверхпроводящих контуров во внешнем магнитном поле: число степеней свободы системы не должно превышать числа контуров.

Л и т е р а т у р а

1. Braunbeck W. Freies Schweben diamagnetischer Körper im Magnetfeld//Zeitschrift für Physik. 1939. V. 112. N. 9. S. 764—769.
2. Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1989.
3. Роузинс А., Родерик Е. Введение в физику сверхпроводимости. — М.: Наука, 1988.

4. Козорез В. В. Динамические системы магнитовзаимодействующих тел. — Киев: Наукова думка, 1981.
5. Шувалов В. А. Особенности силового взаимодействия идеально проводящего замкнутого контура с магнитным полем//Прикладная физика. 2003. № 6. С. 23—26.
6. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1987.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988.

Conditions of stability of the system of superconducting loops in the external magnetic field

V. A. Shuvalov, A. A. Yakovlev

FSUE "Tsniimash", 4 Pionerskay st., Korolev, Moscow Region, 141070, Russia
E-mail: s5134146@yandex.ru

The article analyzes the problem of the definition of the stable conditions of equilibrium of the extensive structure out of system of the superconductive loops with the current in the external magnetic field. Conditions allowing the forming of the stable noncontact configuration of the magnetic active superconducting objects on the base of the only magnetic forces of the interaction are received.

PACS: 85.25.-j

Keywords: magnetic stream, inductance, stability, equilibrium conditions, superconducting loop.

Bibliography — 7 references.

Received March 25, 2010

* * *