

УДК 621.384.668.8

Проективное соответствие гауссовых точек оптических систем с поворотной осью

В. Д. Саченко

Обнаружено фундаментальное проективное свойство гауссовых изображений в оптических системах с поворотной осью, названное биполярно проективным соответствием (ВРС). Введена концепция оптических полюсов, обеспечивающих ВРС. Доказано их существование и рассмотрен вопрос их местоположения. Доказано, что оптические полюсы расположены на специфических прямых, названных фоктрисами, которые проходят через фокусы оптической системы параллельно ее плечам. Положения оптических полюсов сопряжены оптическим уравнением Ньютона.

PACS: 41.85.-p

Ключевые слова: биполярно проективное соответствие, поворотная оптическая ось, гауссово изображение, оптические полюсы, фоктриса.

Введение

Барбер [1] и Штефенс [2] обнаружили, что в корпускулярно-оптической призме с однородным магнитным полем, граница которой ортогональна к оптической оси, при условии идеальной однородности поля внутри границ и отсутствия его вне границ, *прямая, проходящая через сопряженные гауссовы точки, всегда проходит через центр поворота оптической оси* (рис. 1). Данное проективное свойство широко известно в литературе, как "*правило Барбера*". К тому же времени относятся исследования Герцога [3] оптических свойств магнитных призм с однородными полями, но с произвольными наклонами границ призмы к ее оптической оси. Им был, в частности, показан графический способ определения кардинальных оптических точек в таких призмах. Позже данный способ был применен Картаном [4] для построения гауссовых изображений (рис. 2) в указанных призмах.

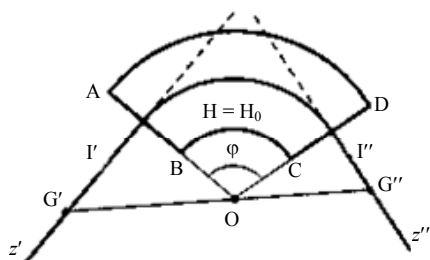


Рис. 1. Правило Барбера.

Гауссовы точки G' и G'' и центр O поворота оптической оси лежат на одной прямой. φ — угол поворота оптической оси, ABCD — область поля призмы, плечи z' и z'' ортогональны к AB и CD

Саченко Вячеслав Данилович, физик-консультант. ELMITEC, Elektronen Mikroskopie, GmbH. Germany, 38678, Clausthal-Zellerfeld, Berliner Str., 62. Tel. 0049-5323-95336. ИАП РАН.

Россия, С.-Петербург, Рижский пр., 26.

Статья поступила в редакцию 22 сентября 2011 г.

© Саченко В. Д., 2012

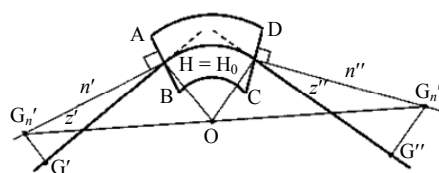


Рис. 2. Правило Картана.

Точки G_n' и G_n'' и центр O поворота оптической оси лежат на одной прямой. Гауссовы точки G' и G'' есть ортогональные проекции G_n' и G_n'' на плечи z' и z'' . n' и n'' — нормали к границам AB и CD в точках их пересечения с оптической осью. ABCD — область однородного поля

Картаном был также показан графический способ обнаружения гауссовых оптических изображений в электростатических призмах с цилиндрическим полем, основанный на использовании дополнительного "эрзац-шаблона" оригинала, но с иным углом поворота оптической оси и особым масштабированием оси в поле и вне призмы. Эта идея встречается и у Джадда [5] в его методе определения положений гауссовых изображений магнитостатических призм с радиально неоднородным полем $H = H_0(r_0/r)^n$ (рис. 3). Возможности графических методов анализа оптических свойств электростатических и магнитных призм были расширены и развиты в работе [6]. Однако лишь "правило Барбера" получило известность и широкое применение ввиду его простоты и наглядности.

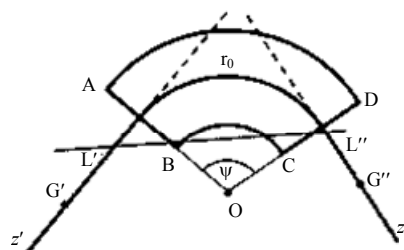


Рис. 3. Эрзац-шаблон для магнитных призм с полем $H = H_0(r_0/r)^n$.

$\omega = (1-n)^{1/2}$, $\psi = \omega * \varphi$; $L' = \omega * l'$; $L'' = \omega * l''$; φ — угол поворота оптической оси; l' , l'' — входное и выходное плечи призмы. G' , G'' — сопряженные точки шаблона: G' , G'' и центр O поворота оптической оси лежат на одной прямой

Ниже впервые предложен и обоснован универсальный метод обнаружения гауссовых изображений. Он основан на обнаруженном автором фундаментальном свойстве гауссовых изображений, названном "биполярно проективное соответствие", присущим, как показано ниже, любой оптической системе с криволинейной осью, для которой справедливо ньютоново сопряжение гауссовых точек, а угол поворота оптической оси отличен от значений πn , где $n = 0, 1, \dots$

О биполярно проективном соответствии и сопутствующей терминологии

Концепция биполярной проекции обобщает общеизвестную центральную проекцию. Выберем произвольно две оси z' и z'' . Вне их зафиксируем две произвольные точки P' и P'' , которые назовем *В-полюсами* (рис. 4). Проведем через данные полюсы параллельные прямые Π' и Π'' , которые назовем *проектирующими*, а их совокупность *проектирующей парой* (Π' , Π''). Пусть проектирующая прямая Π' пересечет ось z' в точке G' , а проектирующая прямая Π'' пересечет ось z'' в точке G'' . Очевидно, что указанное соответствие точек G' и G'' при фиксированном положении полюсов P' и P'' будет взаимно однозначным. Назовем его "биполярно проективное соответствие" (*BPC*), а отмеченные точки G' и G'' назовем *В-сопряженными точками*. При фиксированном положении полюсов P' и P'' , меняя направления проектирующих пар (Π' , Π''), можно получить взаимно-однозначное биполярно проективное соответствие всех точек осей z' и z'' . Пусть оси z' и z'' пересекаются в некоторой точке V . Выделим среди множества проектирующих прямых Π' и Π'' особые прямые π' и π'' , первая из которых проходит через полюс P' параллельно оси z'' , пересекая ось z' в некоторой точке F' , а вторая проходит через полюс P'' параллельно оси z' , пересекая ось z'' в точке F'' (рис. 5).

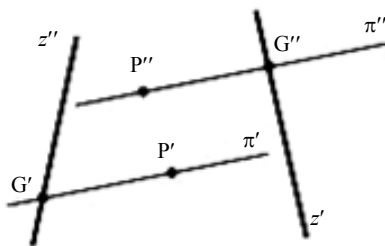


Рис. 4. Биполярно проективное соответствие осей z' и z'' : P', P'' — В-полюсы; G', G'' — В-сопряженные точки

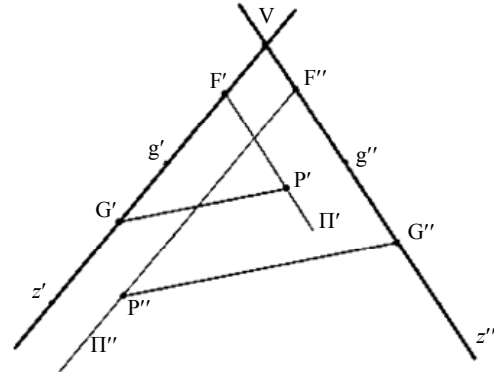


Рис. 5. Фоктрисы осей z' и z'' : F', F'' — фокальные точки; P', P'' — В-полюсы; Π', Π'' — фоктрисы полюсов P' и P'' ; G' и G'' — В-сопряженные точки

Указанные особые прямые π' и π'' назовем *фоктрисами* полюсов P' и P'' , соответственно. Точки F' и F'' назовем *фокальными точками* осей z' и z'' (название и обозначение данных точек обусловлены тем, что их *В-изображения* находятся в "бесконечности"). Элементы, помеченные одноптичными штрихами, будем называть *смежными*. Расстояния между смежными точками F и G назовем *ньютоновыми плечами*, обозначив их, соответственно, g' и g'' ; расстояния между смежными точками G и P назовем *полярными радиусами* В-сопряженных точек, обозначив их g_p' и g_p'' , а расстояния между смежными точками F и P назовем *полюсными плечами*, обозначив их p' и p'' . Все указанные величины рассматриваются алгебраическими и могут принимать, как положительные, так и отрицательные значения.

Соглашение о знаках и характеристическое свойство BPC

Фоктрисы π', π'' и оси z', z'' разбиваются фокальными точками F' и F'' на две части, одну из которых назовем положительной, а другую — отрицательной. Примем следующее соглашение о знаках. Будем считать, что ньютоновы плечи g' и g'' положительны, если фокусы F' и F'' расположены между вершиной V и соответствующими точками G' и G'' , и считать полюсные плечи p' и p'' положительными, если соответствующие В-полюсы расположены внутри угла между осями z' и z'' , как показано на рис. 5. Примем, для определенности, такое расположение В-полюсов, которое соответствует положительным значениям p' и p'' (как на рис. 5). В этом случае нетрудно доказать, что для любых В-сопряженных точек G' и G'' осей z' и z'' произведение ньютоновых плеч всегда положительно. При этом из подобия треугольников $F'P'G'$ и $F''G''P''$ на рис. 5 следует фундаментальная связь

между ньютоновыми и полюсными плечами, выражающая характеристическое свойство ВРС:

$$g''g'' = p''p'' \tag{1}$$

Из (1) следует, что для любой пары В-сопряженных точек G' и G'' при фиксированном положении В-полюсов произведение ньютоновых плеч g' и g'' есть величина постоянная. Поскольку эта постоянная должна быть положительной, обозначим ее p^2 , а параметр p назовем параметром В-сопряжения. Таким образом:

$$p = (p''p'')^{1/2} \tag{2}$$

Согласно оптическому уравнению Ньютона, если G' и G'' — сопряженная пара гауссовых точек оптической системы, то $g''g'' = f'f'$, где f' и f'' — фокусные расстояния оптической системы. Таким образом, из (1) и (2) следует ясный оптический смысл параметра В-сопряжения:

$$p = (f'f'')^{1/2} \tag{3}$$

Не останавливаясь на других свойствах ВРС, приведем известные практические примеры, иллюстрирующие данное свойство.

Примеры ВРС в оптике

Классическим примером ВРС является проективное соответствие оптически сопряженных внеосевых точек линзы, имеющей прямолинейную центральную оптическую ось. В случае малого смещения объектной точки от оси линзы роль В-полюсов играют узловые точки (рис. 6). В параксиальном приближении смещенная оптическая ось после искривления в поле линзы асимптотически пройдет через выходной фокус F'' , образуя асимптотическое выходное плечо, на котором расположены гауссовы изображения внеосевых объектных точек, причем объект и его оптическое изображение будут В-сопряжены через узловые точки согласно определению последних.

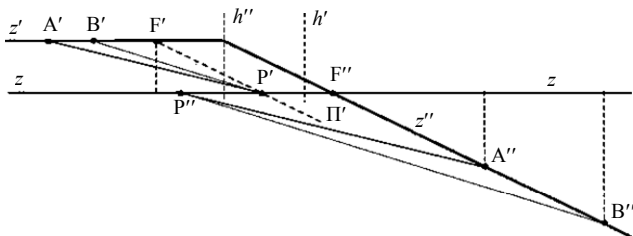


Рис. 6. ВРС внеосевых точек в линзе:

z — главная оптическая ось линзы; h', h'' — главные плоскости линзы; z', z'' — входное и выходное плечи смещенной оптической оси; F', F'' — фокальные точки смещенной оптической оси.

Фокусисами являются прямая Π' и оптическая ось z .

В-полюсы P', P'' расположены в узловых точках линзы N' и N'' .

A', B' — внеосевые объектные точки, лежащие на плече z' смещенной оси; полярные радиусы оптически сопряженных

точек A' и A'' (B' и B'') параллельны (обозначены синим и зеленым цветами, соответственно)

Другим классическим примером В-сопряжения гауссовых точек является упомянутое выше правило Барбера для магнитных призм с однородным полем в условиях ортогональности границ к оптической оси. Нетрудно доказать, что в данных призмах центр поворота оптической оси является сингулярным В-полюсом, через который проходят обе фокусисы призмы, что и предопределяет центральную проективность гауссовых точек. Такая ситуация имеет место и в электростатической призме со сферически симметричным полем. Легко увидеть, что, если сингулярный В-полюс существует, то он расположен в точке пересечения фокусис оптической системы. В случае произвольного наклона границ симметричной магнитной призмы с однородным полем можно доказать, что точка пересечения фокусис не является В-полюсом, следовательно, в указанной призме сингулярный В-полюс отсутствует. Однако можно доказать существование В-полюсов в таких оптических элементах, а именно, в случае магнитной призмы с симметрично наклонными к оптической оси границами при любых углах поворота оптической оси (кроме значений π) оптические полюсы расположены в точках пересечения эффективных границ поля призмы со смежными с ними фокусисами (рис. 7). В случае аксиально-симметричных магнитных призм с радиально неоднородным полем $H = H_0(r_0/r)^n$, как можно показать, сингулярный В-полюс отсутствует также, однако, как и в предыдущем примере, можно показать наличие В-сопряжения гауссовых точек посредством пространственно разделенных В-полюсов (рис. 8). Обоснование показанному на рис. 8 способу нахождения В-полюсов следует из общей теоремы, приведенной ниже.

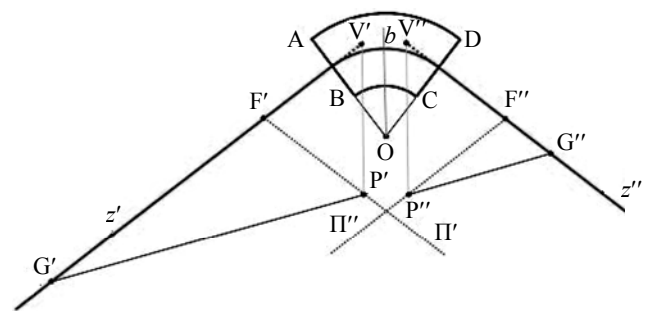


Рис. 7. В-сопряжение гауссовых точек в магнитной призме с полем $H = H_0(r_0/r)^n$:

P', P'' — кардинальные оптические полюсы: $P'G' \parallel P''G''$. V', V'' — главные точки призмы; F', F'' — фокальные точки призмы; Π', Π'' — фокусисы оптических полюсов; b — биссектриса угла поворота оптической оси.

AB и CD — эффективные границы магнитного поля

В связи с приведенными примерами возникает естественный вопрос, всегда ли можно указать В-полюсы, способные обеспечить В-сопряжение гауссовых точек, и как их обнаружить? Ответ на него дает нижеследующая теорема, вторая часть которой указывает на общий метод нахождения местоположений В-полюсов.

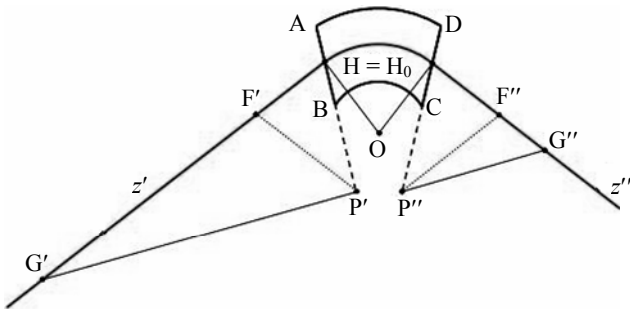


Рис. 8. В-сопряжение в симметричной магнитной призме:

Полярные радиусы гауссовых точек G' и G'' параллельны. F' , F'' — фокальные точки призмы; P' , P'' — оптические полюсы; $F'P'$, $F''P''$ — фоктрисы оптических полюсов; AB и CD — эффективные границы магнитного поля

Теорема 1 о биполярно проективном соответствии гауссовых точек

В любых оптических системах с поворотной оптической осью, с углом поворота, отличным от значений π , где $n = 0, 1, \dots$, и обладающих ненулевой оптической силой, всегда существуют В-полюсы, способные обеспечить биполярно проективное соответствие всех оптически сопряженных осевых точек; В-сопряженные точки асимптотических плеч оптической оси являются оптически сопряженными в том и только в том случае, если В-полюсы расположены на фоктрисах оптической системы, а произведение полюсных плеч равно произведению фокусных расстояний f' и f'' оптической системы, т. е.

$$p''p' = f''f'. \quad (4)$$

Доказательство сформулированной теоремы с очевидностью следует из уравнения (1) и оптического тождества Ньютона $g''g' = f''f'$. Последнее тождество и уравнение (4), идентичные по виду, назовем *ньютонovým сопряжением*, соответственно, гауссовых точек и В-полюсов относительно смежных с ними фокусов. Таким образом, следствием сформулированной выше теоремы является следующее утверждение об эквивалентности оптического и биполярно проективного сопряжений гауссовых точек, которое назовем *теоремой 2*.

Теорема 2

Ньютоново сопряжение гауссовых точек имеет место тогда и только тогда, когда ньютоново сопряжены В-полюсы, обеспечивающие В-сопряжение гауссовых точек.

Теоремы 1 и 2 выявляют ясный оптический смысл полюсов ВРС гауссовых точек, в связи с чем В-полюсы оптических систем с криволинейной осью справедливо можно назвать "*оптическими*" полюсами.

Ньютоново сопряжение оптических полюсов не регламентирует их конкретное расположение на фоктрисах, поэтому их выбор можно осуществить бесконечно большим числом способов. В частности, можно расположить их на равных расстояниях от соответствующих фокусов F' и F'' при $p' = p'' = (f''f')^{1/2}$. Назовем такое расположение В-полюсов *равновесным*, а соответствующие В-полюсы — *равновесными*. Из рис. 5 нетрудно увидеть, что при данном выборе оптических полюсов

$$g''/p' = g_p''/g_p'. \quad (5)$$

Поскольку в данном случае $g''/p' = g''/(f''*f')^{1/2} = (g''/f'')*(f'/f')^{1/2}$, то из (5) следует

$$g''/f' = (g_p''/g_p')/n^{1/2}, \quad (6)$$

где $n = (f''/f')$ — коэффициент иммерсии оптической системы. Величина отношения, стоящего слева в (6), как известно, равна оптическому увеличению системы при текущем положении гауссовых точек G' и G'' . Легко видеть, что знак оптического увеличения положителен, если полярные радиусы $P'G'$ и $P''G''$ одинаково направлены и отрицателен в противном случае (как на рис. 5). Проводя дальнейшую аналогию с оптическими представлениями, можно выделить *главные* и *узловые* полюсы, определяемые аналогично традиционным *главным* и *узловым* точкам линз с прямой оптической осью. *Главными* оптическими полюсами назовем полюсы, расположенные на расстояниях f' и f'' от соответствующих фокусов F' и F'' , а *узловыми* полюсами — полюсы, расположенные на расстояниях f' и f'' от фокусов F' и F'' , соответственно. В последнем варианте расположения полюсов $p' = f'$ и из (5) следует, что, в случае В-сопряжения гауссовых точек через *узловые полюсы коэффициент оптического увеличения изображения, равен отношению полярных радиусов данных гауссовых точек*.

Отмеченные выше *главные*, *узловые* и *равновесные* полюсы назовем "*кардинальными оптическими полюсами*" оптической системы с криволинейной поворотной осью.

Из определения кардинальных оптических полюсов следует однозначность их местоположения в оптической системе. В случае отсутствия иммерсии фокусные расстояния оптической системы в

пространства объекта и изображения равны. В этой ситуации смежные кардинальные оптические полюсы совпадают, располагаясь на равных расстояниях f от соответствующих фокусов (как, например, на рис. 7 и 8).

Заключение

В настоящей статье показано, что биполярно проективное соответствие гауссовых точек является фундаментальным свойством любых оптических систем с криволинейной поворотной осью, в которых справедливо ньютоново сопряжение данных точек, и угол поворота оптической оси отличен от значений $n\pi$, где $n = 0, 1, \dots$. Главные, узловые и равновесные оптические полюсы таких систем определяются однозначно. Зная местоположения оптических полюсов, для любого положения объекта на входном плече оптической оси путем В-сопряжения можно однозначно определить местоположение оптического изображения объекта. Указанный способ является универсальным методом обнаружения гауссовых изображений, не имевшим аналога в оптической теории. Данный метод применим в любых статических оптических системах с криволинейной поворотной осью, в которых угол поворота отличен от значений $n\pi$, где $n = 0, 1, \dots$, и справедливо ньютоново сопряжение гауссовых точек.

Метод ВРС удобно применять при конструировании оптической системы с криволинейной осью при решении вопроса о расположении плоскостей объекта и изображения. Нетрудно заметить, что методом ВРС возможно решение и обратной задачи, а именно, осуществить синтез геометрии и оптической среды призмы при наличии априорных требований на расположение плоскостей объекта и изображения.

Уравнение (1) выражает геометрическое свойство "конвертируемости" множеств гауссовых пар и оптических полюсов. Это означает, что, если известно положение какой либо пары гауссовых точек, то распределение оптических полюсов на фоктрисах можно найти путем "инверсной биполярной проекции", проводя параллельные прямые из данных гауссовых точек до пересечения с соответствующими фоктрисами. Такой способ можно

использовать как альтернативный метод нахождения оптических полюсов, если известно положение какой-либо пары сопряженных гауссовых точек. Для иллюстрации отмеченного метода, на рис. 9 показаны пространственно разделенные оптические полюсы P' и P'' магнитной призмы с однородным полем и ортогональными к оптической оси границами. Местоположение данных полюсов найдено путем инверсной биполярной проекции из гауссовых точек G' и G'' , которые, для "оптической" достоверности, определены по правилу Барбера.

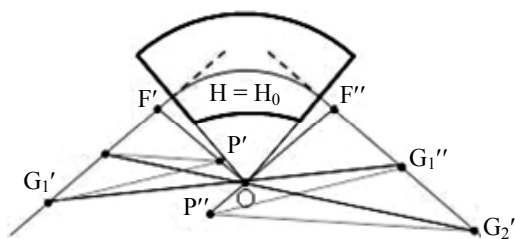


Рис. 9. ВРС гауссовых точек в магнитной призме с однородным полем в случае, когда оптическая ось ортогональна к границам поля:

точка O — сингулярный оптический полюс; P', P'' — альтернативные оптические полюсы: $P'G' \parallel P''G''$; F', F'' — фокальные точки призмы; OF' и OF'' — фоктрисы оптических полюсов

Автор считает своим долгом выразить сердечную благодарность проф., д-ру физ.-мат. наук Л. Н. Галль за полезные дискуссии по затронутой теме.

Литература

1. Barber N. F. // Proc. Leeds Philos. Soc. 1933. V. 2. P. 427.
2. Stephens W. E. // Phys. Rev. 1934. V. 45. P. 513.
3. Herzog R. // Z. Physik. 1934. V. 89. P. 447.
4. Cartan L. J. // J. Phys. et Radium. 1937. V. 8. P. 453.
5. Judd D. L. // RSI. 1950. V. 21. No. 3. P. 213.
6. Тарантин Н. И. // ЖТФ. 1967. Т. 37. № 2. С. 375.

Projectivity of gaussian points in optical systems with deflected optic axis

V. D. Sachenko

ELMITEC, Elektronen Mikroskopie, GmbH.
62 Berliner Str., Clausthal-Zellerfeld, 38678, Germany

IAI RAS,
26 Rizhsky pr., Sankt-Petersburg, Russia

A fundamental projective property of conjugate gaussian points of optical systems with deflected optic axis is found. This property is called a bipolar projective correspondence (BPC). Specific off-axis points, called by author optical poles, are introduced. They provide the found property of gaussian points. It's proved that optical poles are placed on the specific straight lines, called by author foctrices. These specific lines pass through optical foci being parallel to the conjugated arms of the optic system. Positions of optical poles are conjugated accordingly to the equation similar to the Newton's optic equation.

PACS: 41.85.-p

Keywords: bipolar projective correspondence deflecting optical axis, gaussian image, optical poles, focatrix, projectivity.

Bibliography — 6 references.

Received September 22, 2011