

УДК 537.533

Исследование влияния краевых полей на движение заряженных частиц в плоском и цилиндрическом конденсаторах

О. А. Байсанов, Г. А. Доскеев, О. А. Еденова, И. Ф. Спивак-Лавров

Рассмотрены некоторые способы описания краевых полей конденсаторов. Траектории частиц находятся путем численного интегрирования дифференциальных уравнений Лагранжа, в которых в качестве обобщенных координат используются электростатический потенциал ϕ и силовая функция χ . Показано, что краевые поля увеличивают отклонение и улучшают фокусировку моноэнергетического пучка заряженных частиц. Рассматриваются возможности использования плоского и цилиндрического конденсаторов для масс- и энергоанализа.

PACS: 41.85.-i

Ключевые слова: плоский конденсатор, цилиндрический конденсатор, краевое поле, траектории частиц.

Введение

Поля плоского и цилиндрического конденсаторов используются для управления пучками заряженных частиц. Отклонение пучка в плоском и цилиндрическом конденсаторах происходит одновременно с его фокусировкой в плоскости отклонения. При расчете траекторий заряженных частиц в конденсаторах часто используют приближение резкой границы для поля конденсаторов. Считается, что везде внутри конденсатора электрическое поле имеет одну и ту же конфигурацию, а на краю электродов оно резко падает до нуля. В частности, в цилиндрическом конденсаторе в этом приближении происходит пространственная и времяпролетная фокусировка в секторе $\pi/\sqrt{2}$ параксиальных пучков заряженных частиц с одинаковым отношением e/m (заряда e к массе m), выходящих из точечного источника [1].

Учитывать действие краевых полей на отклонение и фокусировку заряженных частиц достаточно сложно из-за трудностей, связанных с расчетом как самих краевых полей, так и их влияния на движение заряженных частиц. Чтобы избежать этих трудностей, ввод и вывод частиц в конденса-

торах обычно осуществляют через сетки, расположенные достаточно далеко от краев конденсатора. Однако сетки вносят дополнительные искажения, которые тоже плохо поддаются расчету. Поэтому задача расчета краевых полей и их влияния на траектории частиц является достаточно актуальной.

Движение пучков заряженных частиц в плоском конденсаторе рассмотрено в работах [2, 3]. Показано, что учет влияния краевых полей увеличивает отклонение частиц в конденсаторе и усиливает фокусировку моноэнергетического пучка заряженных частиц полем конденсатора.

В настоящей работе приведены результаты новых расчетов для случая более сильного отклонения пучка в поле плоского конденсатора, а также разработана математическая модель и приведены результаты численного расчета поведения пучков в цилиндрическом конденсаторе.

Описание полей конденсаторов

В работах [2, 3] показано, что поле плоского конденсатора в приближении принципа суперпозиции для полубесконечных пластин в декартовых координатах x, y при $l/d \geq 4$, где l — длина конденсатора, d — расстояние между пластинами, с хорошей точностью неявно описывается следующими выражениями:

$$\delta = \pm \left(1 + \frac{l}{d} \pi + e^\chi \cos \phi + \chi \right), \quad y = e^\chi \sin \phi + \phi. \quad (1)$$

Здесь ϕ — электростатический скалярный потенциал, χ — силовая функция, расстояние между пластинами $d = 2\pi$, знак "+" используется, когда

Байсанов Орда Абдуалиевич, начальник НИО Военного института Сил воздушной обороны, Казахстан, г. Актобе.

Доскеев Гималин Алтынбаевич, доцент.

Еденова Ольга Арстангалиевна, магистрант.

Спивак-Лавров Игорь Феликсович, профессор.

Актобинский государственный университет им. К. Жубанова.

Казахстан, 030000, г. Актобе, ул. Братьев Жубановых, 263.

Тел. (7132) 54-37-56. E-mail: spivakif@ Rambler.ru

Статья поступила в редакцию 22 сентября 2011 г.

© Байсанов О. А., Доскеев Г. А., Еденова О. А., Спивак-Лавров И. Ф., 2012

$x > 0$, а знак "–", когда $x < 0$. Картина поля для области $y > 0$, построенная с помощью формул (1), для плоского конденсатора с $l/d = 4$ представлена на рис. 1, где единица длины равна π .

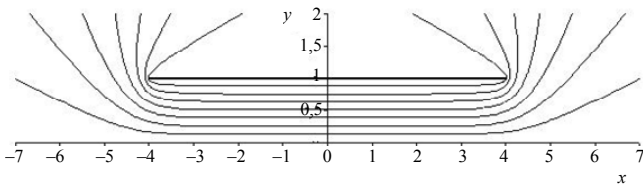


Рис. 1. Поле плоского конденсатора с отношением $l/d = 4$, показана область $y > 0$. (Единица длины равна π)

Поле цилиндрического конденсатора также можно неявно описать в том же приближении в полярных координатах ρ, ψ следующими выражениями [3]:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_a \exp \left[\dot{r} \left(e^\chi \sin \varphi + \varphi \right) \right], \\ \psi &= \pm \dot{r} \left(1 + \frac{l}{d} \pi + e^\chi \cos \varphi + \chi \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где R_1, R_2 — радиусы внутреннего и внешнего электродов цилиндрического конденсатора, отношение l/d определяет секторный угол Ψ цилиндрического конденсатора, который соответствует плоскому конденсатору с таким же значением l/d :

$$\Psi = \frac{l}{d} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (3)$$

постоянная a определяется выражением

$$a = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (4)$$

На рис. 2 представлена картина поля цилиндрического конденсатора с $R_1 = 1, R_2 = 2$ и $\Psi = 158,8576^\circ$, что соответствует плоскому конденсатору с $l/d = 4$.

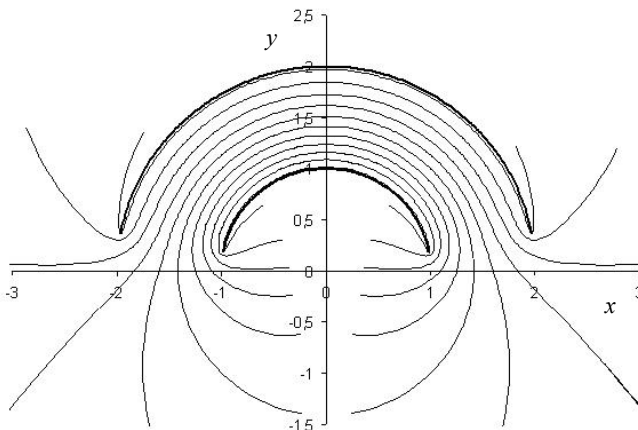


Рис. 2. Поле цилиндрического конденсатора с радиусами электродов $R_1 = 1, R_2 = 2$ и секторным углом $\Psi = 158,8576^\circ$. (Единица длины равна π)

Здесь окружность радиуса $\rho = \rho_a = \sqrt{R_1 R_2}$ является нулевой эквипотенциалью $\varphi = 0$. Потенциалы электродов, так же как и в случае плоского конденсатора, равны π и $(-\pi)$.

Выражения (1) и (2) описывают поля плоского и цилиндрического конденсаторов лишь приближенно. При точном решении задачи электроды плоского конденсатора представляют собой двухсвязную область. Используя симметрию задачи, можно определить потенциал в односвязной области, дополнив ее осями координат. Такая односвязная область представляет собой пятиугольник, лежащий в первой четверти декартовой системы координат x, y [3]. С помощью интеграла Шварца—Кристоффеля этот пятиугольник отображается на верхнюю полуплоскость плоскости $w = u + iv$:

$$z(w) = i \frac{d}{2} + \int_0^w f(w) dw, \quad (5)$$

где подынтегральная функция

$$f(w) = \frac{\dot{N}(w-1)}{\sqrt{w(w-a_1)(w-a_2)}}. \quad (6)$$

Здесь вершины пятиугольника 1, 2, 3, 4, 5 переходят в точки 0, 1, a_1, a_2, ∞ действительной оси u , соответственно, C — действительная постоянная, имеющая размерность длины, а постоянные a_1, a_2 определяются соотношениями:

$$\int_0^1 |f(u)| dw = \int_1^{a_1} |f(u)| du = \frac{l}{2}, \quad \int_{a_2}^{a_1} |f(u)| du = \frac{d}{2}. \quad (7)$$

Интегралы в выражениях (7) являются эллиптическими. Их значения находились численно, причем в δ -окрестности особых точек 0, a_1, a_2 интегралы вычислялись аналитически, что позволило получить точность расчета не хуже, чем $\sqrt{\delta}$.

Электростатический потенциал $\varphi(u, v) \equiv \varphi(\check{o}(u, v), \acute{o}(u, v))$ на действительной оси u удовлетворяет смешанным граничным условиям Дирихле—Неймана:

$$\begin{aligned} \varphi(u, 0) &= \begin{cases} -V & \text{ддд } 0 < u < a_1 \\ 0 & \text{ддд } a_2 < u < \infty \end{cases}, \\ \varphi_v(u, 0) &= \begin{cases} 0 & \text{ддд } a_1 < u < a_2 \\ 0 & \text{ддд } -\infty < u < 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь индекс v означает частную производную потенциала по координате v . Нахождение потенциала $\varphi(u, v)$ сводится к решению задачи Келдыша—Седова [4].

В таблице для различных значений отношения l/d приведены вычисленные с использованием формул (6) и (7) значения a_1 и a_2 . Из таблицы видно, что при увеличении l/d постоянная a_1 стремится к a_2 и обе они вместе медленно стремятся к единице. Видно, что уже при $l/d = 4$ для расчета поля можно с высокой точностью использовать формулы (1) и (2), вводя лишь небольшую поправку к l/d , учитывающую отклонение значений a_1 и a_2 от единицы.

Зависимость параметров конформного преобразования a_1 и a_2 от отношения l/d

| l/d | a_1 | a_2 |
|----------|------------|--------|
| 0,228925 | 1,796947 | 3 |
| 0,499969 | 1,618168 | 1,877 |
| 1,000436 | 1,415445 | 1,4451 |
| 1,504448 | 1,305727 | 1,3100 |
| 1,932126 | 1,2491053 | 1,2500 |
| 2,504659 | 1,1998823 | 1,2000 |
| 3,484699 | 1,1499960 | 1,1500 |
| 4,098866 | 1,12999949 | 1,1300 |
| 5,537487 | 1,0999999 | 1,1000 |

Моделирование поведения пучков заряженных частиц в плоском конденсаторе

Траектории частиц можно найти путем численного интегрирования дифференциальных уравнений Лагранжа, в которых в качестве обобщенных координат используются электростатический скалярный потенциал ϕ и силовая функция χ [2, 3]:

$$\ddot{\chi} = \frac{2\dot{\chi}\dot{\phi} \dot{\chi} \sin \phi + (\dot{\phi}^2 - \dot{\chi}^2)(e^{2\chi} + e^\chi \cos \phi)}{e^{2\chi} + 2e^\chi \cos \phi + 1}; \quad (9)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{(\dot{\phi}^2 - \dot{\chi}^2) \dot{\chi} \sin \phi - 2\dot{\chi}\dot{\phi}(e^{2\chi} + e^\chi \cos \phi) + 1}{e^{2\chi} + 2e^\chi \cos \phi + 1}. \quad (10)$$

Здесь точки обозначают производные по безразмерному времени τ , связанному с обычным временем t соотношением $\tau = \sqrt{eV/\pi md^2} t$. Считается, что безразмерные потенциалы электродов равны $V = \pi$ и $-V = -\pi$. Эти уравнения позволяют найти функции $\chi(\tau)$ и $\phi(\tau)$ при заданных начальных значениях $\chi_0, \dot{\chi}_0, \phi_0, \dot{\phi}_0$ при $\tau = 0$.

Подставляя найденные функции в соотношения (1), получим закон движения заряженной частицы $x(\tau), y(\tau)$ в плоском конденсаторе с учетом влияния краевых полей.

Для исследования динамики пучков заряженных частиц использовался метод, описанный в работе [5]. Отклонение частиц пучка от осевой траектории $x_c(s), y_c(s)$, лежащей в плоскости xu , определяется дифференциальным уравнением:

определяется дифференциальным уравнением:

$$q'' = -k + k^2 q - \frac{q'}{1-kq} (2kq' + k'q) + \frac{r'^2}{2(\Phi + \varepsilon \Phi_{c0})} \left[(\nabla \Phi)_q - \frac{q'}{1-kq} (\nabla \Phi)_s \right]. \quad (11)$$

Здесь q — отклонение частицы по направлению нормали от осевой траектории; штрихи везде обозначают дифференцирование по длине дуги s осевой траектории; k — кривизна осевой траектории; Φ — безразмерный потенциал, нормированный так, что он равен нулю там, где равна нулю скорость частиц; $\Phi = \Phi_{c0} - \phi$ определяет кинетическую энергию частиц; ε — относительный разброс по энергии в пучке в предметной области, где $\phi = 0$; $(\nabla \Phi)_q$ и $(\nabla \Phi)_s$ — проекции градиента потенциала $\nabla \Phi$ на криволинейные координаты q и s ; r'^2 определяется формулой $r'^2 = q'^2 + (1-kq)^2$.

В уравнении (11) потенциал Φ и $\nabla \Phi$ берутся в точке с криволинейными координатами q и s , определяющими положение частицы в пучке. Декартовы координаты связаны с криволинейными координатами соотношениями:

$$x = x_c(s) + y'_c q, \quad y = y_c(s) - x'_c q. \quad (12)$$

Для расчета осевой траектории использовались уравнения:

$$\begin{aligned} (x')' &= (1-x'^2) \frac{\Phi_x}{2\Phi} - x'y' \frac{\Phi_y}{2\Phi}, \\ (y')' &= (1-y'^2) \frac{\Phi_y}{2\Phi} - x'y' \frac{\Phi_x}{2\Phi}, \end{aligned} \quad (13)$$

а также уравнения, полученные из (1):

$$\begin{aligned} \chi' &= \frac{\pm x' (e^\chi \cos \phi + 1) + y' \dot{\chi} \sin \phi}{e^{2\chi} + 2e^\chi \cos \phi + 1}, \\ \phi' &= \frac{\mp x' \dot{\chi} \sin \phi + y' (e^\chi \cos \phi + 1)}{e^{2\chi} + 2e^\chi \cos \phi + 1}. \end{aligned} \quad (14)$$

В последних выражениях верхний знак берется для значений $x > 0$, а нижний — для $x < 0$.

Задавая начальные условия для осевой траектории в предметной области, путем численного интегрирования уравнений (13) и (14) можно определить $x'_c(s), y'_c(s)$ вместе с функциями $\chi_c(s), \phi_c(s)$, а затем и осевую траекторию $x_c(s), y_c(s)$ с помощью формул (1). Причем одновременно можно интегрировать и уравнение (11), определяя

$q(s)$ для различных траекторий пучка. Индекс "с" везде указывает на принадлежность переменных к осевой траектории.

Так же, как и в работе [3], при численных расчетах мы ограничились рассмотрением пучков заряженных частиц с симметричной осевой траекторией, выходящих из точечного источника с равномерным распределением частиц под углами вылета q'_{ni} в области: $-q'_m \leq q'_{ni} \leq q'_m$. Однако увеличение угла отклонения осевой траектории в конденсаторе до $\cong 79,5^\circ$ позволило значительно уменьшить длину осевой траектории и рассмотреть пучки с большей угловой расходимостью, для которых $q'_m \leq 0,04$. Значения q'_{ni} определялись с помощью генератора случайных чисел для 5000 траекторий при различных значениях разброса по энергии ε . На рис. 3 показаны симметричная осевая траектория и две крайние траектории моноэнергетического пучка с безразмерной кинетической энергией $E_k = 12,4975 V$ ($V = \pi$) и угловым разбросом, определяемым значением $q'_m = 0,04$.

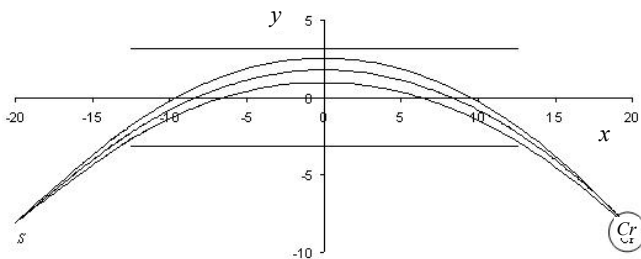


Рис. 3. Отклонение и фокусировка симметричного пучка в плоском конденсаторе с $l/d = 4$:
S — точечный источник ионов; Cr — кроссовер пучка.

Находилась плоскость кроссовера, где ширина пучка $\Delta q_{cr} = |q_{\max} - q_{\min}| \cong 0,016d$ минимальна. Исследовалось распределение частиц в кроссовере по координате q . При этом вся ширина пучка в кроссовере разбивалась на $n = 20$ одинаковых интервалов по значениям отклонения q от осевой траектории и подсчитывалось количество частиц N в каждом интервале. Распределение частиц в кроссовере показано на рис. 4 для значения $q'_m = 0,04$ и трех значений ε , равных 0 ; $5 \cdot 10^{-4}$; $2 \cdot 10^{-3}$. Значения q отложены по оси абсцисс и измеряются в единицах d . По оси ординат отложены значения N , точнее $\Delta N/\Delta q$. Пики, соответствующие пучкам с большей энергией, располагаются на рис. 4 слева. Из этого рисунка видно, что линейная дисперсия по энергии в кроссовере $D \cong 3d$. Этот результат практически совпадает со значением дисперсии в параксиальном фокусе, вычисленным в приближении резкой границы по формулам, приведенным в работе [3], а для угла между осью x

и осевой траекторией на выходе из конденсатора в этом приближении получено значение $39,75^\circ$.

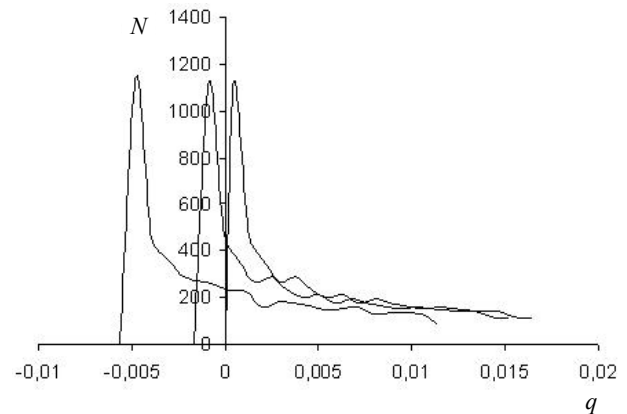


Рис. 4. Распределение частиц в кроссовере $\varepsilon = 0$; $5 \cdot 10^{-4}$; $2 \cdot 10^{-3}$ для пучка с угловой расходимостью частиц в точечном источнике $\cong 0,08$ рад.

Отметим, что форма кривых на рис. 4 зависит от выбранного значения n , отражающего свойства детектора. При $n = 20$ независимо от значения q'_m в область пика попадает примерно $2/5$ частиц, а в область хвоста $3/5$ частиц пучка в случае их равномерного распределения по углам вылета в источнике. При этом и ширина пика, и полная ширина пучка в кроссовере Δq_{cr} с хорошей точностью пропорциональны квадрату угловой расходимости пучка, т. е. $\approx q_m^2$.

Моделирование поведения пучков заряженных частиц в цилиндрическом конденсаторе

Внутри цилиндрического конденсатора в приближении резкой границы электрическое поле изменяется обратно пропорционально ρ . Все частицы, движущиеся внутри конденсатора по круговым траекториям различного радиуса, имеют одинаковую кинетическую энергию, равную:

$$E_k = \frac{1}{2a} = \frac{\pi}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (15)$$

Здесь также считается, что потенциалы электродов $V = \pi$ и $-V = -\pi$, а постоянная a определяется формулой (4). В параксиальном приближении отклонение q частиц пучка от круговой осевой траектории $\rho = \rho_0$ описывается дифференциальным уравнением:

$$\ddot{q} = -2\omega_0^2 q, \quad (16)$$

общее решение которого является гармонической функцией

$$q = B \sin(\sqrt{2} \omega_0 \tau + \beta), \quad (17)$$

где постоянные B и β определяются начальными условиями, а

$$\omega_0 = \frac{1}{\rho_0 \sqrt{a}}. \quad (18)$$

Из уравнения (17) могут быть получены фокусирующие и диспергирующие свойства цилиндрического конденсатора в параксиальном приближении. В частности, из него следует фокусировка параксиального пучка в секторе $\pi/\sqrt{2}$.

В случае цилиндрического конденсатора, используя формулы (2), безразмерную функцию Лагранжа в переменных χ и ϕ запишем в виде:

$$L = \frac{1}{2} a^2 \rho^2 (\dot{\chi}^2 + \dot{\phi}^2) (e^{2\chi} + 2e^\chi \cos \phi + 1) + \phi. \quad (19)$$

Используя функцию Лагранжа (19), получим уравнения движения заряженной частицы в цилиндрическом конденсаторе с учетом краевого поля:

$$\ddot{\chi} = -a \left[(\dot{\phi}^2 - \dot{\chi}^2) \dot{\chi} \sin \phi + 2 \dot{\chi} \dot{\phi} (e^\chi \cos \phi + 1) \right] + \frac{(\dot{\phi}^2 - \dot{\chi}^2) (e^{2\chi} + e^\chi \cos \phi) + 2 \dot{\chi} \dot{\phi} \dot{\chi} \sin \phi}{e^{2\chi} + 2e^\chi \cos \phi + 1}; \quad (20)$$

$$\ddot{\phi} = -a \left[(\dot{\phi}^2 - \dot{\chi}^2) (e^\chi \cos \phi + 1) + 2 \dot{\chi} \sin \phi \dot{\chi} \dot{\phi} \right] + \frac{(\dot{\phi}^2 - \dot{\chi}^2) \dot{\chi} \sin \phi - 2 \dot{\chi} \dot{\phi} (e^{2\chi} + e^\chi \cos \phi)}{e^{2\chi} + 2e^\chi \cos \phi + 1} - \frac{1}{a^2 \rho^2 (e^{2\chi} + 2e^\chi \cos \phi + 1)}. \quad (21)$$

Численное интегрирование этих уравнений позволяет найти функции $\chi(\tau)$ и $\phi(\tau)$ при заданных начальных значениях $\chi_0, \dot{\chi}_0, \phi_0, \dot{\phi}_0$ при $\tau = 0$. Подставляя найденные функции в соотношения (2), получим закон движения заряженной частицы $\rho(\tau), \psi(\tau)$ в цилиндрическом конденсаторе с учетом влияния краевых полей.

На рис. 5 показаны осевая и две крайних траектории моноэнергетического пучка заряженных частиц, выходящих из точечного источника S в цилиндрическом конденсаторе с радиусами $R_1 = 1, R_2 = 2$ и секторным углом $\Psi = 158,8576^\circ$. Секторный угол на рисунке показан штриховыми линиями. Внутри конденсатора осевая траектория является круговой. Кинетическая энергия частиц, выходящих из точечного источника $S - E_k = 4,5044387 \text{ V} (V = \pi)$, угловая расходимость частиц в источнике $\cong 0,1$ рад. Так же, как и в случае плос-

кого конденсатора, для широких пучков положение кроссовера не совпадает с положением параксиального фокуса и зависит от распределения частиц в источнике.

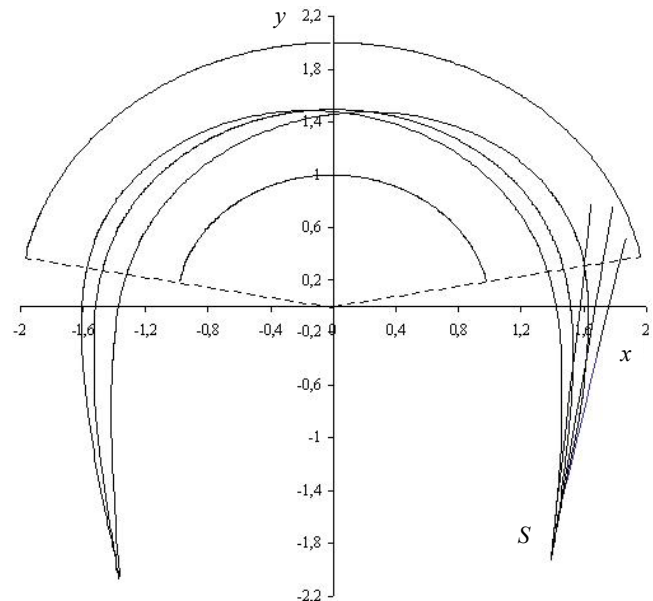


Рис. 5. Поведение однородного по e/t и энергии пучка заряженных частиц, выходящих из точечного источника с угловой расходимостью $\cong 0,1$ рад в цилиндрическом конденсаторе с радиусами $R_1 = 1, R_2 = 2$ и секторным углом $\Psi = 158,8576^\circ$ (угол показан штриховыми линиями). (Единица длины равна π)

Конфигурация пучка подобрана таким образом, чтобы одновременно происходила и пространственная и времяпролетная фокусировка пучка в области кроссовера. Причем система обладает также значительным запасом ахроматичности, так как ее дисперсия по энергии близка к нулю. Все это делает перспективным использование таких систем во времяпролетных масс-спектрометрах. Представляет интерес также рассмотрение пучков с осевой траекторией, отличной от круговой, что, однако, требует отдельного исследования.

Заключение

В работе изложен метод расчета, позволяющий анализировать динамику широких пучков заряженных частиц в плоском и цилиндрическом конденсаторах, причем с учетом влияния их краевых полей. Развитый метод позволяет принимать во внимание распределение частиц в источнике путем задания начальных условий для частиц пучка относительно осевой траектории методом Монте-Карло. Затем исследуется конфигурация пучка в кроссовере с учетом характеристик детектора. Таким образом, могут быть смоделированы реальные характеристики проектируемого прибора, напри-

мер, энергетические спектры, получаемые в энергоанализаторе (см. рис. 4). Положение кроссовера также зависит от распределения частиц в источнике и для широких пучков не совпадает с положением параксиального фокуса.

Отметим также, что развитый в работе метод расчета решает проблему динамики широких пучков без использования традиционной абберационной теории, что нам кажется особенно важным. Это связано с тем, что в рамках абберационной теории зачастую описание широких пучков требует рассмотрения аббераций высокого порядка, но в рамках самой теории невозможно определить максимальный порядок аббераций, которые необходимо учитывать.

Л и т е р а т у р а

1. Кельман В. М., Карецкая С. П., Федулина Л. В., Якушев Е. М. Электронно-оптические элементы призмных спектрометров заряженных частиц. — Алма-Ата: Наука, 1979.
2. Байсанов О. А., Доскеев Г. А., Спивак-Лавров И. Ф. // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. 2008. № 3 (спец. выпуск). С. 20.
3. Doskeev G. A., Edenova O. A., Spivak-Lavrov I. F. // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A. 2011. V. 645. P. 163.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.
5. Байсанов О. А., Доскеев Г. А., Зарипова З. Г., Спивак-Лавров И. Ф. // Прикладная физика. 2010. № 3. С. 109.

Study of the fringe field influence on moving of the charged particles in flat and cylindrical capacitors

O. A. Baisanov, G. A. Doskeyev, O. A. Edenova, I. F. Spivak-Lavrov
K. Zhubanov Aktobe State University,
263 Br. Zhubanov str., Aktobe, 030000, Kazakhstan
E-mail: spivakif@rambler.ru

This paper describes some analytic approaches to describe the fringe fields of flat and cylindrical capacitor. The paths of the particles are found by way of the numerical decision of the differential Lagranzh's equations, in which electrostatic potential and power function are used as generalised coordinates. A method for the calculation of deflection of charged particles from the axis is developed. The behavior of a charged particle beam in a flat capacitor is approximated by using a sharp cut-off boundary for the field, which has the provision of taking fringe fields into account. It is shown that fringe fields enlarge the deflection and perfect the focusing the beams of the charged particles.

PACS: 41.85.-i

Keywords: flat capacitor, cylindrical capacitor, fringe field, beam of charged particles.

Bibliography — 5 references.

Received September 22, 2011