

Физика плазмы и плазменные технологии

УДК 621.371

Траектория короткой радиоволны в многослойной ионосфере

Н. Д. Наумов

Получено точное решение уравнения для траектории радиолуча в сферически симметричной ионосфере при аппроксимации распределения концентрации электронов по высоте в виде нескольких квазилинейных и квазипараболических зависимостей.

PACS: 41.20.Jb, 52.35.Mw

Ключевые слова: траектория, радиоволна, ионосфера, слой, решение, уравнение.

Введение

Основным методом описания распространения электромагнитных волн в пространственно неоднородной плазме является метод геометрической оптики [1], который позволяет получить уравнение траектории радиолуча в ионосфере. Это уравнение широко используется для оценки характеристик коротковолновых радиотрасс [2].

В связи со сложной зависимостью концентрации ионосферных электронов N_e от высоты для решения уравнения траектории используются численные методы. Аналитические результаты можно получить только при аппроксимации N_e с помощью сравнительно простых зависимостей. В частности, в [3] приводится приближенное решение для параболической модели ионосферы. Точное решение уравнения траектории радиолуча в однослойной ионосфере получено в работе [4], где для N_e используется так называемая квазипараболическая аппроксимация, т. е. когда аргумент параболической функции обратно пропорционален расстоянию от центра Земли.

Очевидно, что более адекватная аппроксимация N_e достигается в многослойной модели ионосферы. Цель данной работы — построение точного решения уравнения траектории радиолуча в сферически симметричной ионосфере при аппроксимации N_e в виде нескольких квазилинейных и квазипараболических зависимостей. Рассматривается

общая постановка задачи, т. е. когда точка излучения радиоволны может находиться как на земной поверхности, так и в ионосфере. Это представляет большой практический интерес, поскольку рассеяние коротких радиоволн все шире используется для изучения геофизических эффектов при активных воздействиях на ионосферу [5].

Уравнение траектории

Принцип Ферма позволяет получить следующее уравнение для траектории луча в неоднородной среде [6]:

$$\frac{d(n\vec{t})}{dl} = \nabla n, \quad (1)$$

где $n = \sqrt{\varepsilon}$ — коэффициент преломления среды;
 ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды;
 l — длина вдоль траектории луча;
 \vec{t} — единичный вектор, направленный по касательной к траектории.

Если с помощью соотношения $dl = n d\tau$ вместо l ввести параметр τ , то уравнение (1) запишется в следующем виде:

$$\dot{\vec{u}} = \frac{1}{2} \nabla \varepsilon. \quad (2)$$

Здесь $\dot{\vec{u}} = n\dot{\vec{t}}$, точкой сверху обозначается дифференцирование по параметру τ .

По аналогии с механикой, уравнение (2) можно рассматривать как уравнение движения материальной точки единичной массы, т. е. если $\vec{r}(\tau)$ — закон движения этой материальной точки, то $\dot{\vec{u}} = \dot{\vec{r}}$. Тогда из уравнения (2) для изменения вектора

Наумов Николай Дмитриевич, ведущий научный сотрудник.

ФГУ “12 ЦНИИ МО РФ”.

Россия, 141300, Московская обл., г. Сергиев Посад-7.

Тел. (495) 993-09-62. E-mail: beloros@mail.ru

Статья поступила в редакцию 22 сентября 2011 г.

© Наумов Н. Д., 2012

$\vec{r}(\tau)$ при перемещении его конца по траектории луча найдем:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{2} \nabla \varepsilon. \quad (3)$$

В сферической системе координат с началом в центре Земли векторное уравнение (3) будет выглядеть следующим образом:

$$\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}, \quad (4)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta}, \quad (5)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi}. \quad (6)$$

Будем считать, что ось Oz совпадает с прямой из центра Земли в точку расположения излучателя, а угол φ отсчитывается от плоскости большого круга, проходящего через вектор \vec{k}_0 , где \vec{k}_0 — волновой вектор радиоволны в момент ее излучения. Тогда начальные условия для уравнений (4)—(6) имеют вид: $r(0) = r_0$, $\theta(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{r}(0) = \sqrt{\varepsilon(r_0)} \cos\psi$, $\dot{\theta}(0) = \frac{1}{r_0} \sqrt{\varepsilon(r_0)} \sin\psi$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, где r_0 — расстояние от центра Земли до излучателя, ψ — угол между осью Oz и вектором \vec{k}_0 .

Уравнения (4)—(6) существенно упрощаются в случае сферически симметричной модели ионосферы, когда концентрация электронов зависит только от высоты. При $\varepsilon = \varepsilon(r)$ из уравнения (6) следует, что $r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}$ является постоянной величиной. С учетом начальных условий получим, что $\dot{\varphi} = 0$, т. е. для этой модели ионосферы траектория радиолуча не выходит из плоскости большого круга. Поэтому уравнения (4) и (5) принимают следующий вид:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}, \quad (7)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) = 0. \quad (8)$$

С учетом начальных условий из уравнения (8) найдем:

$$\dot{\theta} = \frac{r_0}{r^2} \sqrt{\varepsilon(r_0)} \sin\psi. \quad (9)$$

Подставляя этот результат в уравнение (7), после однократного интегрирования получим следующее дифференциальное уравнение для переменной $\xi = R/r$:

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \pm \sqrt{\varepsilon\gamma^2 - \xi^2}, \quad (10)$$

где $\gamma^2 = \frac{1}{\varepsilon(r_0)} \left(\frac{R}{r_0 \sin\psi} \right)^2$, R — радиус Земли. Начальное условие для уравнения (10) имеет вид: $\xi(0) = \xi_0 = R/r_0$.

Модель ионосферы

Используемая в работе [4] квазипараболическая аппроксимация N_e в однослойной ионосфере содержит только два параметра, а именно, высоту максимума слоя и концентрацию электронов на этой высоте. Многослойная модель ионосферы позволяет получить более точное приближение для N_e .

Высота нижней границы i -го слоя h_i и концентрация электронов на нижней границе i -го слоя N_i определяются при аппроксимации $(i - 1)$ -го слоя и для i -го слоя являются заданными величинами; для первого слоя $h_1 = h$, $N_1 = 0$, где h — высота ионосферы. Поэтому для квазипараболической аппроксимации концентрации электронов в i -м слое можно использовать четыре параметра: h_{i+1} , N_{i+1} , g_i , M_i , где h_{i+1} — высота верхней границы i -го слоя, N_{i+1} — концентрация электронов на этой границе, M_i — концентрация электронов на некоторой высоте g_i внутри i -го слоя.

Концентрацию электронов в i -м слое представим в следующем виде:

$$N_{ei} = N_{i+1}(A_i \xi^2 + B_i \xi + C_i). \quad (11)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_i = \frac{1}{\Delta_i} [\xi_i (1 - \mu_i) + \eta_i (\lambda_i - 1) + \xi_{i+1} (\mu_i - \lambda_i)],$$

$$B_i = \frac{1}{\Delta_i} [\xi_i^2 (\mu_i - 1) + \eta_i^2 (1 - \lambda_i) + \xi_{i+1}^2 (\lambda_i - \mu_i)],$$

$$C_i = \frac{1}{\Delta_i} [\xi_i^2 (\eta_i - \mu_i \xi_{i+1}) + \eta_i^2 (\lambda_i \xi_{i+1} - \xi_i) + \xi_{i+1}^2 (\mu_i \xi_i - \lambda_i \eta_i)],$$

$$\Delta_i = \xi_i^2 (\eta_i - \xi_{i+1}) + \eta_i^2 (\xi_{i+1} - \xi_i) + \xi_{i+1}^2 (\xi_i - \eta_i),$$

$$\xi_i = \frac{R}{R + h_i}, \quad \eta_i = \frac{R}{R + g_i}, \quad \lambda_i = \frac{N_i}{N_{i+1}}, \quad \mu_i = \frac{M_i}{N_{i+1}}.$$

Соответственно, для квазилинейной аппроксимации концентрации электронов в i -м слое используются два параметра: h_{i+1} и N_{i+1} . Тогда в выражении (11)

$$A_i = 0, \quad B_i = \frac{1 - \lambda_i}{\xi_{i+1} - \xi_i}, \quad C_i = \frac{\lambda_i \xi_{i+1} - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i}. \quad (12)$$

Для иллюстрации на рис. 1 приведены результаты расчета зависимости концентрации электронов в нижней ионосфере в полдень 22.03.2006 в районе г. Нижний Новгород с помощью программы IRI-2007 (кривая 1) и на основе трехслойной аппроксимации (кривая 2). Для первого слоя использовалось выражение (12), а для двух последующих — (11).

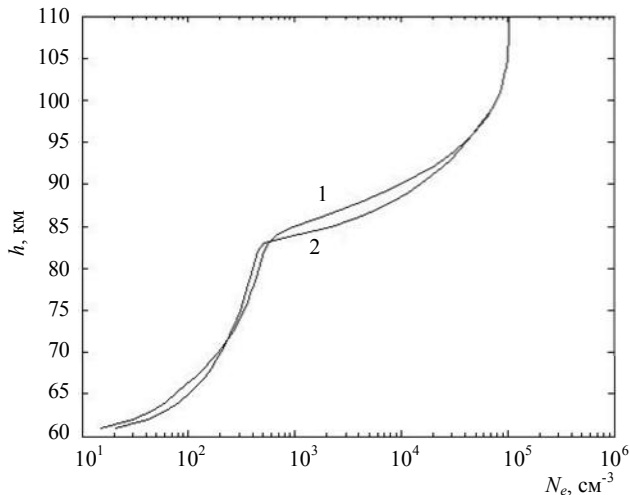


Рис. 1. Результаты расчета зависимости от высоты концентрации электронов N_e в нижней ионосфере в полдень 22.03.2006 в районе г. Нижний Новгород с помощью программы IRI-2007 (кривая 1) и на основе трехслойной аппроксимации (кривая 2)

Излучатель на земной поверхности

Выражение для траектории радиолуча в ионосфере представим в следующем виде:

$$r = \frac{R}{\rho(\theta)}.$$

Если радиоволна излучается с земной поверхности, то $\gamma = 1/\sin\psi$. Траектория радиоволны до входа в ионосферу является отрезком прямой линии; из уравнения (10) при $\varepsilon = 1$ найдем:

$$\rho_0 = \gamma \sin(\psi - \theta). \quad (13)$$

Выражение (13) применимо при $0 \leq \theta \leq \theta_1$, где $\theta_1 = \psi - \psi_1$, $\psi_1 = \arcsin(\xi_1 \sin\psi)$ — угол падения радиолуча на ионосферу.

Для выбранного способа аппроксимации концентрации электронов решение дифференциального уравнения (10) выражается через элементарные функции. Отрезок траектории радиоволны в i -м слое для ее восходящего участка описывается функцией $\rho_{i\uparrow}(\theta)$ при $\theta_i \leq \theta \leq \theta_{i+1}$, если луч не отражается в этом слое. Здесь θ_i — значение угла θ в точке падения луча на i -й слой, θ_{i+1} — значение угла θ в точке выхода луча из этого слоя. Если же

луч отражается в i -м слое, то $\theta_i \leq \theta \leq \theta_r$, где θ_r — значение угла θ в точке отражения.

Вид функции $\rho_{i\uparrow}(\theta)$ определяется значениями параметров a_i и $D_i = b_i^2 - a_i c_i$, где

$$a_i = -1 - \gamma^2 F_i A_i, \quad b_i = -\gamma^2 F_i B_i, \quad c_i = \gamma^2 (1 - F_i C_i).$$

Здесь $F_i = N_{i+1} e^2 / \varepsilon_0 m \omega^2$, $\omega = 2\pi f$, f — частота радиоволны.

Если $a_i > 0$, $D_i < 0$, то

$$\rho_{i\uparrow} = \frac{1}{2a_i} [\text{sh}(\beta_i - \alpha_i \theta) - b_i], \quad (14)$$

где $\alpha_i = \sqrt{a_i}$, $\beta_i = \alpha_i \theta_i + \text{Arsh} \frac{2a_i \xi_i + b_i}{\sqrt{-D_i}}$. В этом

случае $\theta_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i} (\beta_i - \text{Arsh} \frac{2a_i \xi_{i+1} + b_i}{\sqrt{-D_i}})$.

Если $a_i < 0$, $D_i > 0$, то

$$\rho_{i\uparrow} = \frac{1}{2a_i} [\sqrt{D_i} \sin(\alpha_i \theta + \beta_i) - b_i], \quad (15)$$

где $\alpha_i = \sqrt{-a_i}$, $\beta_i = \arcsin \frac{2a_i \xi_i + b_i}{\sqrt{D_i}} - \alpha_i \theta_i$. Если

$\xi_{i+1} \leq (\sqrt{D_i} - b_i)/2a_i \leq \xi_i$, то точка отражения луча находится в i -м слое при $\theta = \theta_r = (\pi/2 - \beta_i)/\alpha_i$. Если же указанное условие не выполняется, то луч пересекает верхнюю границу слоя при

$$\theta = \theta_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i} (\arcsin \frac{2a_i \xi_{i+1} + b_i}{\sqrt{D_i}} - \beta_i).$$

Если $a_i > 0$, $D_i \geq 0$, то

$$\rho_{i\uparrow} = \frac{1}{4a_i} \{ G_i \exp[-\alpha_i(\theta - \theta_i)] + \frac{D_i}{G_i} \exp[\alpha_i(\theta - \theta_i)] - 2b_i \}, \quad (16)$$

где $\alpha_i = \sqrt{a_i}$, $G_i = 2\sqrt{a_i(a_i \xi_i^2 + b_i \xi_i + c_i)} + 2a_i \xi_i + b_i$.

Если $\xi_{i+1} \leq (\sqrt{D_i} - b_i)/2a_i \leq \xi_i$ или $\xi_{i+1} \leq -(\sqrt{D_i} + b_i)/2a_i \leq \xi_i$, то точка отражения луча находится в

i -м слое при $\theta = \theta_r = \theta_i - \frac{1}{\alpha_i} \ln \left| \frac{\sqrt{D_i}}{G_i} \right|$. В обратном

случае луч пересекает верхнюю границу слоя при

$$\theta = \theta_{i+1} = \theta_i - \frac{1}{\alpha_i} \times$$

$$\times \ln \left| \frac{1}{G_i} \left[2\sqrt{a_i(a_i \xi_{i+1}^2 + b_i \xi_{i+1} + c_i)} + 2a_i \xi_{i+1} + b_i \right] \right|.$$

Построение траектории радиоволны заключается в последовательном нахождении отрезков траектории для каждого слоя с помощью выражений (14)—(16), что вместе с выражением (13) дает функцию $\rho_{\uparrow}(\theta)$, описывающую восходящий участок траектории. Если радиоволна не возвращается на земную поверхность, то это является решением задачи: $\rho = \rho_{\uparrow}(\theta)$. Если же радиоволна отражается в ионосфере, то построенной для $0 \leq \theta \leq \theta_r$ функции $\rho_{\uparrow}(\theta)$ достаточно для решения задачи. Это обусловлено тем, что для рассматриваемой модели ионосферы траектория радиоволны симметрична относительно прямой из центра Земли в точку отражения. Поэтому выражение для нисходящего участка траектории можно получить с помощью функции $\rho_{\uparrow}(\theta)$: $\rho_{\downarrow}(\theta) = \rho_{\uparrow}(2\theta_r - \theta)$. В итоге для траектории, отражающейся от ионосферы радиоволны, найдем:

$$\rho = \begin{cases} \rho_{\uparrow}(\theta) & \text{при } 0 \leq \theta \leq \theta_r, \\ \rho_{\downarrow}(\theta) & \text{при } \theta_r < \theta \leq 2\theta_r. \end{cases}$$

Излучатель в ионосфере

Пусть радиоволна излучается в некоторой точке $r = r_0$ внутри k -го слоя. Тогда в зависимости от угла излучения ψ траектория радиоволны может начинаться с восходящего или нисходящего участка. Как указано ранее, отрезки восходящего участка траектории описываются функциями $\rho_{i\uparrow}(\theta)$, а для описания отрезка нисходящей траектории в i -м слое следует использовать функцию $\rho_{i\downarrow}(\theta)$ при $\theta_{i+1} \leq \theta \leq \theta_i$, если луч не отражается в этом слое. Здесь θ_{i+1} — значение угла θ в точке падения луча на i -й слой, θ_i — значение угла θ в точке выхода луча из этого слоя. Если же луч отражается в i -м слое, то $\theta_{i+1} \leq \theta \leq \theta_r$.

Если $a_i > 0, D_i < 0$, то

$$\rho_{i\downarrow} = \frac{1}{2a_i} [\text{sh}(\alpha_i\theta + \beta_i) - b_i], \quad (17)$$

где $\alpha_i = \sqrt{a_i}, \beta_i = \text{Arsh} \frac{2a_i\xi_{i+1} + b_i}{\sqrt{-D_i}} - \alpha_i\theta_{i+1}$. В этом

случае $\theta_i = \frac{1}{\alpha_i} (\text{Arsh} \frac{2a_i\xi_i + b_i}{\sqrt{-D_i}} - \beta_i)$.

Если $a_i < 0, D_i > 0$, то

$$\rho_{i\downarrow} = \frac{1}{2a_i} [\sqrt{D_i} \sin(\beta_i - \alpha_i\theta) - b_i], \quad (18)$$

где $\alpha_i = \sqrt{-a_i}, \beta_i = \arcsin \frac{2a_i\xi_{i+1} + b_i}{\sqrt{D_i}} + \alpha_i\theta_{i+1}$. Если

$\xi_{i+1} \leq -(\sqrt{D_i} + b_i)/2a_i \leq \xi_i$, то точка отражения лу-

ча находится в i -м слое при $\theta = \theta_r = (\pi/2 + \beta_i)/\alpha_i$. Если же указанное условие не выполняется, то луч пересекает нижнюю границу слоя при

$$\theta_i = \frac{1}{\alpha_i} (\beta_i - \arcsin \frac{2a_i\xi_i + b_i}{\sqrt{D_i}}).$$

Если $a_i > 0, D_i \geq 0$, то

$$\rho_{i\downarrow} = \frac{1}{4a_i} \{G_i \exp[\alpha_i(\theta - \theta_{i+1})] + \frac{D_i}{G_i} \exp[-\alpha_i(\theta - \theta_{i+1})] - 2b_i\}, \quad (19)$$

где $\alpha_i = \sqrt{a_i}, G_i = 2\sqrt{a_i(a_i\xi_{i+1}^2 + b_i\xi_{i+1} + c_i)} + 2a_i\xi_{i+1} + b_i$. Если $\xi_{i+1} \leq (\sqrt{D_i} - b_i)/2a_i \leq \xi_i$ или $\xi_{i+1} \leq -(\sqrt{D_i} + b_i)/2a_i \leq \xi_i$, то точка отражения луча находится в i -м слое при $\theta = \theta_r = \theta_i + \frac{1}{\alpha_i} \ln \left| \frac{\sqrt{D_i}}{G_i} \right|$. В обратном случае луч пересекает нижнюю границу слоя при

$$\theta_i = \theta_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} \ln \left| \frac{1}{G_i} \left[2\sqrt{a_i(a_i\xi_i^2 + b_i\xi_i + c_i)} + 2a_i\xi_i + b_i \right] \right|.$$

Прямолинейный участок траектории описывается следующим выражением:

$$\rho_0 = \gamma \sin \left[\theta - \theta_1 + \arcsin \left(\frac{\xi_1}{\gamma} \right) \right], \quad (20)$$

где θ_1 — значение угла θ при выходе луча из ионосферы. Выражение (20) применимо при $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0$, где $\theta_0 = \theta_1 + \arcsin(1/\gamma) - \arcsin(\xi_1/\gamma)$ — значение угла θ при попадании луча на земную поверхность.

Отрезок траектории в k -м слое описывается функциями $\rho_{k\uparrow}(\theta)$ или $\rho_{k\downarrow}(\theta)$ в зависимости от значения угла излучения ψ . Функция $\rho_{k\uparrow}(\theta)$ получается на основе выражений (14)—(16), где нужно сделать замены $a_i \rightarrow a_k, b_i \rightarrow b_k, c_i \rightarrow c_k, D_i \rightarrow D_k, \xi_i \rightarrow \xi_0, \xi_{i+1} \rightarrow \xi_{k+1}, \theta_i \rightarrow 0, \theta_{i+1} \rightarrow \theta_{k+1}$. Для получения функции $\rho_{k\downarrow}(\theta)$ используются выражения (17)—(19) с аналогичными заменами $a_i \rightarrow a_k, b_i \rightarrow b_k, c_i \rightarrow c_k, D_i \rightarrow D_k, \xi_{i+1} \rightarrow \xi_0, \xi_i \rightarrow \xi_k, \theta_{i+1} \rightarrow 0, \theta_i \rightarrow \theta_k$. В том случае, когда луч отражается в k -м слое, достаточно найти функции $\rho_{k\uparrow}(\theta)$ или $\rho_{k\downarrow}(\theta)$ при $0 \leq \theta \leq \theta_r$.

Если траектория радиоволны содержит только восходящий участок, то с помощью функций $\rho_{i\uparrow}(\theta)$ можно построить функцию $\rho_{\uparrow}(\theta)$, которая является решением задачи. Аналогичным образом задача решается и для траектории, состоящей только из нисходящего участка; здесь функция

$\rho_{\downarrow}(\theta)$ получается на основе выражения (20) и функций $\rho_{i\downarrow}(\theta)$.

В том случае, когда происходит отражение радиоволны, после построения функций $\rho_{\uparrow}(\theta)$ или $\rho_{\downarrow}(\theta)$ для $0 \leq \theta \leq \theta_r$ следует перейти к нахождению функций $\sigma_{\uparrow}(\theta)$ или $\sigma_{\downarrow}(\theta)$. Эти функции аналогичны функциям $\rho_{\uparrow}(\theta)$ и $\rho_{\downarrow}(\theta)$, но соответствуют радиоволне той же частоты, которая излучается под углом $\pi - \psi$ к оси Oz из той же точки в k -м слое.

Если точка отражения радиоволны расположена выше точки излучения, то траектория радиоволны определяется следующим выражением:

$$\rho = \begin{cases} \rho_{\uparrow}(\theta) & \text{при } 0 \leq \theta \leq \theta_r, \\ \rho_{\uparrow}(2\theta_r - \theta) & \text{при } 0_r < \theta \leq 2\theta_r, \\ \sigma_{\downarrow}(\theta - 2\theta_r) & \text{при } 2\theta_r < \theta \leq \theta_0. \end{cases} \quad (21)$$

Если же точка отражения радиоволны расположена ниже точки излучения, то

$$\rho = \begin{cases} \rho_{\downarrow}(\theta) & \text{при } 0 \leq \theta \leq \theta_r, \\ \rho_{\downarrow}(2\theta_r - \theta) & \text{при } 0_r < \theta \leq 2\theta_r, \\ \sigma_{\uparrow}(\theta - 2\theta_r) & \text{при } \theta > 2\theta_r. \end{cases}$$

Для иллюстрации на рис. 2 приведены результаты расчета ионосферного отрезка траектории радиоволны с частотой 10 МГц, излученной на высоте 60 км.

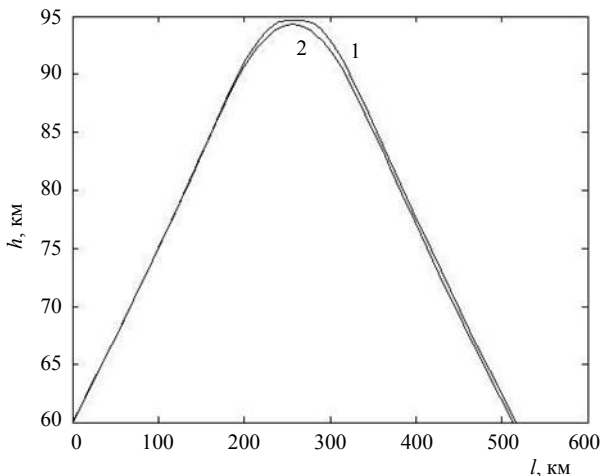


Рис. 2. Результаты расчета ионосферного отрезка траектории радиоволны с частотой 10 МГц, излученной на высоте 60 км.

Кривая 1 соответствует численному решению уравнения (10) для исходной концентрации электронов (кривая 1 на рис. 1) с помощью многошагового метода Адамса—Башворта—Мултона переменного порядка [7]. Кривая 2 получена на основе выражения (21) при использовании указанной на рис. 1 аппроксимации концентрации электронов. Эти результаты показывают, что предлагаемый метод дает приемлемое для практических оценок описание траектории короткой радиоволны в ионосфере.

Заключение

Полученные результаты могут быть использованы для анализа влияния частоты, а также угла излучения на распространение коротких радиоволн после рассеяния на ионосферных неоднородностях. Кроме этого, эти результаты могут быть полезными для тестирования расчетных программ численного моделирования.

Очевидно, что степень погрешности предлагаемого метода оценки траектории короткой радиоволны в значительной мере зависит от точности аппроксимации распределения концентрации ионосферных электронов по высоте. В качестве исходных данных для определения количества слоев, типа аппроксимации и значения ее параметров для каждого слоя можно использовать результаты расчетов по программе IRI-2007.

Литература

1. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. — М.: Высшая школа, 1978.
2. Керблай Т. С., Ковалевская Е. М. О траекториях коротких радиоволн в ионосфере. — М.: Наука, 1974.
3. Альперт Я. Л. Распространение электромагнитных волн в ионосфере. — М.: Наука, 1972.
4. Croft A., Hoogasian H. // Radio Sci. 1968. V. 3. No. 1. P. 69.
5. Благовецкая Н. Ф. Геофизические эффекты активных воздействий в околоземном космическом пространстве. — СПб.: Гидрометеоздат, 2001.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
7. Кетков Ю. Л., Кетков А. Ю., Шульц М. М. MATLAB 6.x: программирование численных методов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004.

Trajectory of a short radio wave in the multilayer ionosphere

N. D. Naumov

12-th Central Research Institute,
Sergiev Posad-7, Moscow region, 141300, Russia
E-mail: beloros@mail.ru

The exact solution of the ray's equation in the spherically symmetric ionosphere is obtained when the electron concentration is approximated by a set of quasi-linear and quasi-parabolic functions.

PACS: 41.20.Jb, 52.35.Mw

Keywords: trajectory, radio wave, ionosphere, layer, solution, equation.

Bibliography — 7 references.

Received September 22, 2011