

УДК 517.983:519.2:519.6

## О возможности использования тригонометрических выражений в виде рекурсивных функций для решения диффузионного уравнения с разрывными коэффициентами

*Е. В. Серегина, М. А. Степович, А. М. Макаренков,  
М. Н. Филиппов, Е. В. Платошин*

*Рассмотрены возможности использования нового метода непрерывной аппроксимации ступенчатых функций, основанного на использовании тригонометрических выражений в виде рекурсивных функций. Расчеты проведены для классической модели диффузии неосновных носителей заряда, генерированных широким электронным пучком в двухслойном полупроводниковом материале.*

PACS: 72.10.Bg;72.20.Jv;72.40.+w;78.56.-a.

*Ключевые слова:* двухслойный полупроводник, электронный пучок, концентрация, неосновные носители заряда, диффузия, рекурсивные функции.

### Введение

Для количественного описания явления диффузии неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных в полупроводнике внешним энергетическим воздействием, обычно используются следующие два подхода:

1) модель коллективного движения ННЗ [1, 2], согласно которой на диффузию неравновесных ННЗ из любого микрообъема полупроводника оказывают влияние другие электроны или дырки из других микрообластей материала. Математически это выражается в том, что в дифференциальное уравнение диффузии в качестве функции генерации ННЗ (обычно записывается в правой части дифференциального уравнения) входит функция, описывающая зависимость от координат плотности ННЗ, генерируемых в единицу времени в ми-

шени. Эта модель успешно используется для количественного описания процессов диффузии ННЗ, генерированных широким электронным пучком в однородных полупроводниках, для которых правая часть дифференциального уравнения является непрерывной функцией от координат. Использование широкого электронного пучка позволяет пренебречь краевыми эффектами и решать одномерную задачу тепломассопереноса;

2) модель независимых источников, согласно которой на диффузию неравновесных ННЗ из любого микрообъема полупроводника не оказывают влияния другие электроны или дырки из других микрообластей материала. Математически это выражается в том, что сначала решается уравнение диффузии для каждого из точечных источников ННЗ, после чего посредством интегрирования по объему, занимаемому источниками ННЗ, находится концентрация ННЗ в полупроводнике в результате их диффузии. Идея такого подхода заимствована нами из классической работы [3]. Эта модель ранее использовалась для количественного описания процессов одномерной диффузии ННЗ, генерированных широким электронным пучком в неоднородных и многослойных планарных структурах, для которых распределение электрофизических параметров материалов по глубине имеет точки разрыва первого рода [4, 5]. Так, в работе [4] при использовании модели независимых источников было получено аналитическое выражение для расчета распределения ННЗ, генерированных широким электронным пучком в структуре типа “эпитаксиальная пленка-подложка”, созданной на базе одного и того же полупроводникового материала. Использование такой модели мишени позволяет процесс рассеяния электронов пучка в многослойных материалах с близкими параметра-

Серегина Елена Владимировна<sup>1,2</sup>, ст. преподаватель.  
Степович Михаил Адольфович<sup>1,3</sup>, зав. кафедрой, профессор.  
Макаренков Александр Михайлович<sup>2</sup>, доцент.  
Филиппов Михаил Николаевич<sup>4</sup>, зав. лабораторией.  
Платошин Евгений Владимирович<sup>1</sup>, студент.

<sup>1</sup>Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского.  
Россия, 248023, г. Калуга, ул. Степана Разина, 26.  
E-mail: evfs@yandex.ru

<sup>2</sup>Калужский филиал Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана.  
Россия, 248000, г. Калуга, ул. Баженова, 2.  
E-mail: amm2005@rambler.ru

<sup>3</sup>Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова.  
Россия, 117997, Москва, Стремянный пер., 36.

<sup>4</sup>Институт общей и неорганической химии им. Н. С. Курнакова РАН.  
Россия, 119991, Москва, Ленинский просп., 31.

Статья поступила в редакцию 12 декабря 2014 г.

© Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М., Филиппов М. Н., Платошин Е. В., 2015

ми (средним зарядом атомного ядра, и средней атомной массой для всех слоёв) описывать аналитически как в однородной мишени. Отметим, что часто именно такие структуры и используются на практике. Расчёты в [4] проводились для параметров, характерных для полупроводниковой структуры “эпитаксиальная плёнка GaAs-монокристаллическая подложка GaAs” с разным (но одинаковым внутри каждого из материалов) уровнем легирования примесями. В этом случае электрофизические параметры в каждом материале постоянны, но различны, и на границе раздела “плёнка-подложка” имеют разрыв первого рода. Аналогичные расчёты проведены в [5] для более сложной трёхслойной структуры. Нами модель независимых источников использовалась в задачах математического моделирования стохастического явления диффузии ННЗ в однородных полупроводниковых материалах [6, 7].

В настоящей работе предложена модификация первой модели, позволяющая использовать её для моделирования диффузии ННЗ в двухслойном материале. Возможность использования этой модели для решения такой задачи появляется, если вместо кусочно-постоянных коэффициентов (электрофизических параметров) дифференциального уравнения диффузии ННЗ использовать их новые аппроксимации, основанные на тригонометрических выражениях в виде рекурсивных функций [8]. Отметим, что аппроксимирующие функции являются непрерывными и аналитическими, и потому на границе слоев они в большей степени, чем ступенчатые функции, соответствуют зависимости значений реальных электрофизических параметров от координаты [9].

### Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель диффузии ННЗ в двумерной полупроводниковой структуре, параметры слоёв которой (средний заряд атомного ядра и средняя атомная масса) отличаются незначительно. Такой подход позволяет описывать процесс рассеяния энергии электронами пучка как в однородном материале и не учитывать изменение энергии первичных электронов при прохождении ими твёрдого тела [10]. В нашей работе также предполагается, что неравновесная электронно-дырочная плазма является квазинейтральной и не учитывается влияние области пространственного заряда [11—13] на диффузию генерированных электронным пучком неравновесных ННЗ. Так делается в известных классических [1, 2, 14] и развитых нами моделях [15—17], в т. ч. и в моделях, описывающих процесс диффузии генерированных ННЗ [4, 5, 15, 18] и их последующую излучательную рекомбинацию, позволяющую идентифицировать электрофизические

параметры полупроводниковой мишени (см., например, [15, 19—21]).

В рамках рассматриваемой математической модели в случае одномерной диффузии в конечный полупроводник концентрация ННЗ по глубине находится как решение дифференциального уравнения

$$D(z) \frac{d^2 \Delta p(z)}{dz^2} - \frac{\Delta p(z)}{\tau(z)} = -\rho(z) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$D_1 \left. \frac{d\Delta p(z)}{dz} \right|_{z=0} = v_{s1} \Delta p(0), \quad \Delta p(l) = 0. \quad (2)$$

Для двухслойной структуры обозначим:  $z_1$  — координата границы раздела двух слоев,  $D_1, D_2, L_1, L_2, \tau_1, \tau_2$  — коэффициент диффузии, диффузионная длина, время жизни ННЗ соответственно в первом и втором слоях, а  $l$  — толщина полупроводника. При этом  $L_1 = \sqrt{D_1 \tau_1}$ ,  $L_2 = \sqrt{D_2 \tau_2}$ , а  $S_1 = L_1 v_{s1} / D_1$ , где  $v_{s1}$  — скорость поверхностной рекомбинации ННЗ в первом материале, плёнке (на границе «вакуум-плёнка»), а во втором материале (на границе «подложка-вакуум»)  $v_{s2} \rightarrow \infty$  — физически это условие эквивалентно тому, что толщина второго слоя (подложки) значительно больше толщины первого слоя, что обычно на практике и реализуется. Функция  $\Delta p(z)$  описывает концентрацию по глубине ННЗ, генерированных внешним энергетическим воздействием;  $z$  — координата, отсчитываемая от плоской поверхности вглубь полупроводника. Функция  $\rho(z)$  — число ННЗ, генерируемых вследствие внешнего воздействия в единицу времени в тонком слое мишени на глубине  $z$ . Для широкого электронного пучка значения  $\rho(z)$  могут быть определены из соотношения для плотности энергии  $\rho^*(z)$ , выделяемой в этом слое мишени в единицу времени (делением  $\rho^*(z)$  на энергию образования электронно-дырочной пары); для широкого электронного пучка справедлива полуэмпирическая формула [16]:

$$\rho^*(z) = \frac{1,085(1-\eta)E_0}{\sqrt{\pi} z_{ms} (1-\eta + \eta z_{ss} / z_{ms})} \times \left\{ \exp \left[ -\left( \frac{z - z_{ms}}{z_{ms}} \right)^2 \right] + \frac{\eta}{1-\eta} \exp \left[ -\left( \frac{z - z_{ss}}{z_{ss}} \right)^2 \right] \right\}.$$

Здесь  $E_0$  — энергия электронного пучка, рассеянная в мишени,  $z_{ms}$  — глубина максимальных потерь энергии первичными электронами, испытывающими малоугловое рассеяние;  $z_{ss}$  — глубина

максимальных потерь энергии обратно рассеянными электронами;  $\eta$  — коэффициент обратного рассеяния электронов зонда.

В уравнении (1) вместо кусочно-постоянных коэффициентов (электрофизических параметров) используются их новые аппроксимации, основанные на использовании тригонометрических выражений в виде рекурсивных функций [8]:

$$\begin{aligned} \{f_n(z)|f_n(z) &= (H/2)(1 + \sin(\varphi_n(z))), \\ \varphi_n(z) &= (\pi/2)\sin(\varphi_{n-1}(z)), \varphi_1(z) = (\pi/2)f_1(z) \\ n-1 \in N \}. \end{aligned}$$

В качестве начальной функции выбирается функция вида  $f_1(z) = \exp(1 - (az + b)^2) - 1$ . Из условия  $f_1(z_2) = f_1(z_3) = 0$  находятся  $a = 2/(z_2 - z_3)$ ;  $b = (z_2 + z_3)/(z_3 - z_2)$ . При этих значениях коэффициентов  $a$  и  $b$  последовательность  $\{f_n(z)\}$  сходится к ступенчатой функции  $f(z)$ :

$$f(z) = \begin{cases} H, & z \in (z_2, z_3), \\ 0, & z \notin (z_2, z_3). \end{cases}$$

Здесь  $H$  — высота ступеньки. Тогда ступенчатые функции  $L(z)$  и  $\tau(z)$  со значениями  $L_1, \tau_1$  на промежутке  $[0, z_1]$ , и  $L_2, \tau_2$  на промежутке  $[z_1, l]$  можно аппроксимировать суммой аналогичных последовательностей:  $L_n(z) = \sum_{i=1}^2 \{f_n(z)\}_i$ ,  $\tau_n(z) = \sum_{i=1}^2 \{f_n(z)\}_i$ .

В работе [22] была построена модифицированная модель независимых источников для расчета концентрации ННЗ по глубине однородного полупроводника, основанная на использовании аппроксимации узкого источника малой ширины рекурсивными тригонометрическими функциями. Настоящая работа продолжает такие исследования и ставит перед собой задачу найти численное решение  $\Delta p(z)$  уравнения (1), (2) с использованием аппроксимации величин  $L$  и  $\tau$ , входящих в рассматриваемое уравнение, ступенчатыми функциями  $L_n(z) = \sum_{i=1}^2 \{f_n(z)\}_i$  и  $\tau_n(z) = \sum_{i=1}^2 \{f_n(z)\}_i$ , а также проиллюстрировать целесообразность использования предлагаемого подхода для проведения расчетов концентраций ННЗ, генерированных широким электронным пучком в двухслойном полупроводниковом материале.

**Обоснование метода.**

**Результаты расчетов и их обсуждение**

Перейдем к обоснованию метода.

Из результатов работы [8] следует, что в гильбертовых пространствах измеримых функций  $L_1$  и  $L_2$  рассматриваемые в нашей задаче последовательности аппроксимирующих функций  $L_n(z)$

и  $\tau_n(z)$  сходятся по норме к исходным функциям  $L(z)$  и  $\tau(z)$ , т. е.  $\|L(z) - L_n(z)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  и  $\|\tau(z) - \tau_n(z)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Опираясь на этот результат, и переходя от задачи (1), (2) к равносильному интегральному уравнению второго рода, легко установить, что  $\|\Delta p(z) - \Delta p_n(z)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

В работе с использованием модели независимых источников получено аналитическое выражение для функции  $\Delta p(z)$ , наиболее громоздкое, чем для решения той же задачи (1), (2) для полубесконечного полупроводника [4]. Запишем выражение для концентрации ННЗ  $\Delta p(z, z_0)$ , генерированных плоским бесконечно тонким источником, находящимся в первом слое на глубине  $z_0 < z_1$ :

$$\Delta p(z, z_0) = \begin{cases} C_1 \exp\left(\frac{z}{L_1}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{z}{L_1}\right), & \forall z \in [0, z_0], \\ C_3 \exp\left(\frac{z}{L_1}\right) + C_4 \exp\left(-\frac{z}{L_1}\right), & \forall z \in [z_0, z_1], \\ C_5 \exp\left(\frac{z}{L_2}\right) + C_6 \exp\left(-\frac{z}{L_2}\right), & \forall z \in [z_1, l]. \end{cases}$$

Получены аналитические выражения для констант  $C_i = C_i(z_0, z_1, \Theta)$ ,  $i = \overline{1, 6}$ , где  $\Theta = \{L_1, L_2, D_1, D_2, S_1\}$  — вектор электрофизических параметров полупроводника.

Например,

$$\begin{aligned} C_6 = & -\rho(z_0) \exp(2l/L_2) (L_1 \exp(z_0/L_1 + z_1/L_1) / 2D_1) \times \\ & \times ((1 + S_1)/(1 - S_1) + \exp(-2z_0/L_1)) \times \\ & \times ((1 + S_1)/(1 - S_1) \exp(z_1/L_1) + \exp(-z_1/L_1)) - \\ & - (\exp(-2z_0/L_1) + (1 + S_1)/(1 - S_1)) \times \\ & \times ((1 + S_1)/(1 - S_1) \exp(z_1/L_1) - \exp(-z_1/L_1)) \times \\ & \times ((\exp(z_1/L_2) - \exp(2l/L_2 - z_1/L_2)) \times \\ & \times ((1 + S_1)/(1 - S_1) \exp(z_1/L_1) - \exp(-z_1/L_1)) - \\ & - (L_1 D_2)/(L_2 D_1)) \times \\ & \times ((1 + S_1)/(1 - S_1) \exp(z_1/L_1) + \exp(-z_1/L_1)) \times \\ & \times (\exp(z_1/L_2) + \exp(2l/L_2 - z_1/L_2))^{-1}. \end{aligned}$$

Аналогичные результаты получены для концентрации ННЗ  $\Delta p(z, z_0)$ , генерированных плоским бесконечно тонким источником, находящимся во втором слое. Затем искомая концентрация ННЗ по глубине  $\Delta p(z)$  вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta p(z) = \int_0^l \Delta p(z, z_0) dz_0.$$

Численное решение уравнения (1) с граничными условиями (2) предлагается искать с исполь-

зованием метода конечных разностей [23]. Для этого для рассматриваемой задачи с использованием аппроксимации ступенчатых функций построена разностная схема второго порядка аппроксимации на равномерной сетке  $\bar{D}_h = \{z_i = ih, i = 0, \dots, N, h = l/N\}$ :

$$\Delta p_{i-1} + \left( -\frac{h^2}{L_{n_i}^2} - 2 \right) \Delta p_i + \Delta p_{i+1} = -\frac{h^2 \tau_{n_i} \rho_i}{L_{n_i}^2},$$

$$1 \leq i \leq N-1, \quad (3)$$

$$\left( 1 + \frac{h^2}{2L_{n_0}^2} + \frac{S_1}{L_{n_0}} h \right) \Delta p_0 - \Delta p_1 = \frac{\tau_{n_0} h^2 \rho_0}{2L_{n_0}^2},$$

$$\Delta p_N = 0.$$

Здесь  $\Delta p_i$  — приближенное значение точного решения  $\Delta p(z_i)$ ,  $L_{n_i}^2 = L_n^2(z_i)$ ,  $\tau_{n_i} = \tau_n(z_i)$ ,  $\rho_i = \rho(z_i)$ . Система (3) решалась методом прогонки.

На рис. 1 и рис. 2 представлены результаты расчетов, проведенные с помощью математического пакета Matlab (MathWorks, Inc.) для параметров, характерных для полупроводниковой структуры “эпитаксиальная пленка GaAs — монокристаллическая подложка GaAs”. Используются следующие значения параметров:  $L_1 = 0,5$  мкм,  $\tau_1 = 3,2 \cdot 10^{-9}$  с,  $S_1 = 50$  — для первого материала (пленки);  $L_2 = 10$  мкм,  $\tau_2 = 9,5 \cdot 10^{-9}$  с — для второго материала (подложки). Расчёты проведены для энергии электронов пучка  $E_0 = 20$  кэВ и значении  $z_1 = 1,5$  мкм.

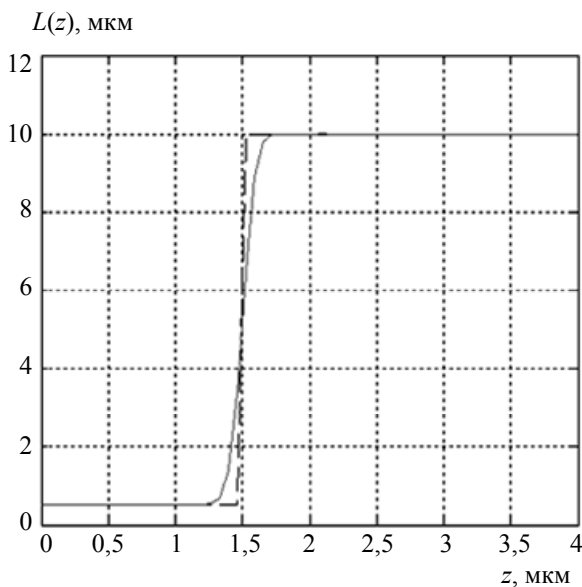


Рис. 1. Аппроксимация диффузионной длины ННЗ, основанная на использовании тригонометрических выражений в виде 5 рекурсивных функций (график отмечен непрерывной линией) и 11 рекурсивных функций (график отмечен пунктирной линией)

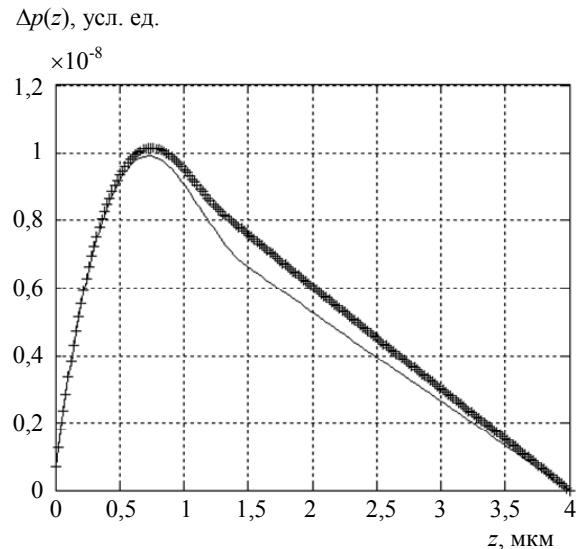


Рис. 2. Концентрация ННЗ, полученная с использованием  $n = 5$  рекурсивных тригонометрических функций (график отмечен крестиками), и с использованием  $n = 11$  функций (график отмечен непрерывной линией), а также концентрация ННЗ, рассчитанная точно аналитически с использованием кусочно-постоянных коэффициентов (электрофизических параметров) дифференциального уравнения диффузии ННЗ (график отмечен пунктирной линией)

Получены следующие оценки относительной погрешности между точным аналитическим решением задачи (1), (2) и численным при  $n = 5$ :

$$\Delta = \frac{\max_{0 \leq i \leq N} |\delta p(z_i) - \delta p_i|}{\max_{0 \leq i \leq N} |\delta p(z_i)|} \cdot 100\% = 9,66\%.$$

и  $n = 11$ :

$$\Delta = 0,37\%.$$

Таким образом, при  $n = 5$  видно влияние аппроксимаций на результат моделирования, а для  $n = 11$  погрешность результатов является достаточно малой, что говорит о сходимости используемой аппроксимирующей процедуры.

На рис. 1 изображена аппроксимация диффузионной длины ННЗ, основанная на использовании тригонометрических выражений в виде 5 рекурсивных функций (график отмечен непрерывной линией) и 11 рекурсивных функций (график отмечен пунктирной линией). На рис. 2 изображена концентрация ННЗ, полученная с использованием  $n = 5$  рекурсивных тригонометрических функций (график отмечен крестиками), и с использованием  $n = 11$  функций (график отмечен непрерывной линией), а также концентрация ННЗ, рассчитанная точно аналитически с использованием кусочно-постоянных коэффициентов (электрофизических параметров) дифференциального уравнения диффузии ННЗ (график отмечен пунктирной линией). Из рис. 2 видно, что концентрация

ННЗ, рассчитанная численно с использованием 11 функций в выбранном масштабе практически совпадает с концентрацией ННЗ, рассчитанной точно с использованием аналитических выражений.

### Заключение

Описанная модель позволяет при сравнительно небольшом количестве рекурсивных функций (до 11) оценить концентрацию неосновных носителей заряда, генерированных широким электронным пучком в полупроводниковой мишени с точностью, достаточной для практического использования. Модель позволяет в последующем сравнительно легко учесть особенности реальных полупроводниковых структур (количество и характер слоёв, область пространственного заряда, возможно, распределение электронов по энергиям, возникающее в процессе взаимодействия первичного пучка с мишенью — и т. п.), что делает её перспективной для количественного описания процессов одномерной диффузии ННЗ в неоднородных и многослойных планарных структурах.

*Исследования проведены при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.6107.2011), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-03-00903), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 14-42-03062).*

### ЛИТЕРАТУРА

1. Wittry D. B., Kyser D. F. // J. Appl. Phys. 1967. V. 38. No. 1. P. 375.
2. Rao-Sahib T. S., Wittry D. B. // J. Appl. Phys. 1969. V. 40. No. 9. P. 3745.

3. Van Roosbroeck W. // J. Appl. Phys. 1955. V. 26. No. 1. P. 380.
4. Степович М. А., Снопина М. Г., Хохлов А. Г. // Прикладная физика. 2004. № 3. С. 61.
5. Burylova I. V., Petrov V. I., Snopova M. G., et al. // Физика и техника полупроводников. 2007. Т. 41. Вып. 4. С. 458.
6. Серегина Е. В., Макаренков А. М., Степович М. А. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2009. № 6. С. 80.
7. Серегина Е. В., Макаренков А. М., Степович М. А. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2012. № 4. С. 47.
8. Алюков С. В. // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. № 3. С. 75.
9. Baek D. H., Kim S. B., Schroder D. K. // J. Appl. Phys. 2008. V. 104. P. 054503.
10. Mikheev N. N., Stepovich M. A. // Materials Science and Engineering B. 1995. V. 32. No. 1—2. P. 11.
11. Бонч-Бруевич В. Л., Калашиников С. Г. Физика полупроводников: Учебное пособие для вузов. — М.: Наука, 1990.
12. Смит Р. Полупроводники. — М.: Мир, 1982.
13. Холоднов В. А. // Физика и техника полупроводников. 2013. Т. 47. Вып. 1. С. 68.
14. Kyser D. F., Wittry D. B. // Proc. IEEE. 1967. V. 55. No. 3. P. 733.
15. Михеев Н. Н., Никоноров И. М., Петров В. И. и др. // Известия РАН. Серия физическая. 1990. Т. 54. № 2. С. 274.
16. Михеев Н. Н., Степович М. А. // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1996. Т. 62. № 4. С. 20.
17. Степович М. А., Самохвалов А. А., Хохлов А. Г. и др. // Прикладная физика. 2004. № 2. С. 39.
18. Снопина М. Г., Бурьлова И. В., Петров В. И. и др. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2007. № 7. С. 47.
19. Хохлов А. Г., Петров В. И., Снопина М. Г. и др. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2005. № 9. С. 64.
20. Снопина М. Г., Михеев Н. Н., Петров В. И. и др. // Известия РАН. Серия физическая. 2008. Т. 72. № 11. С. 1534.
21. Гагарин Ю. Е., Петров В. И., Степович М. А. // Известия РАН. Серия физическая. 2004. Т. 68. № 9. С. 1338.
22. Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М. // Успехи прикладной физики. 2013. Т. 1. № 5. С. 544.
23. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.

## About the possibility of using the trigonometric expressions in the form of recursive functions for solving the diffusion equation with discontinuous coefficients

*E. V. Seregina<sup>1,2</sup>, M. A. Stepovich<sup>1,3</sup>, A. M. Makarenkov<sup>2</sup>, M. N. Filippov<sup>4</sup>, and E. V. Platoshin<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Tsiolkovsky Kaluga State University  
26 Stepan Razin str., Kaluga, 248023, Russia  
E-mail: evfs@yandex.ru

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Kaluga Branch  
2 Bazhenov str., Kaluga, 248000, Russia

<sup>3</sup>Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia  
36 Stremyanni al., Moscow, 117997, Russia

<sup>4</sup>Kurnakov Institute of General and Inorganic Chemistry of the Russian Academy of Sciences  
31 Leninskii av., Moscow, 11991, Russia

Received December 12, 2014

***The possibilities of the use of new method of stepped approximation of continuous functions, based on the use of trigonometric expressions in the form of recursive functions are considered. Calculations carried out for the classical model of diffusion of minority charge carriers generated by a wide electron beam in double-layer semiconductor material.***

PACS: 72.10.Bg; 72.20.Jv; 72.40.+w; 78.56.-a.

**Keywords:** two-layer semiconductor, electron beam, concentration of minority charge carriers, diffusion, recursive functions.

## REFERENCES

1. D. B. Wittry and D. F. Kyser, *J. Appl. Phys.* **38**, 375 (1967).
2. T. S. Rao-Sahib and D. B. Wittry, *J. Appl. Phys.* **40**, 3745 (1969).
3. W. Van Roosbroeck, *J. Appl. Phys.* **26**, 380 (1955).
4. M. A. Stepovich, M. G. Snopova, and A. G. Khokhlov, *Prikladnaya Fizika*, No. 3, 61 (2004).
5. I. V. Burylova, V. I. Petrov, M. G. Snopova, et al., *Semiconductors* **41**, 458 (2007).
6. E. V. Seregina, A. M. Makarenkov, and M. A. Stepovich, *J. Surf. Invest.: X-ray, Synchrotron Neutron Tech.*, No. 6, 80 (2009).
7. E. V. Seregina, A. M. Makarenkov, and M. A. Stepovich, *J. Surf. Invest.: X-ray, Synchrotron Neutron Tech.*, No. 4, 47 (2012).
8. S. V. Alyukov, *Math. Models Comput. Simul.* **23** (3), 75 (2011).
9. D. H. Baek, S. B. Kim, and D. K. Schroder, *J. Appl. Phys.* **104**, 054503 (2008).
10. N. N. Mikheev and M. A. Stepovich, *Materials Science and Engineering B*, **32**, 11 (1995).
11. V. L. Bonch-Bruевич and S. G. Kalashnikov, *Physics of Semiconductors* (Nauka, Moscow, 1990) [in Russian].
12. R. Smit, *Semiconductors* (Mir, Moscow, 1982) [in Russian].
13. V. A. Kholodnov, *Semiconductors* **47**, 68 (2013).
14. D. F. Kyser and D. B. Wittry, *Proc. IEEE*, **55**, 733 (1967).
15. N. N. Mikheev, I. M. Nikonov, V. I. Petrov, et al., *Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys.* **54**, 274 (1990).
16. N. N. Mikheev and M. A. Stepovich, *Industrial Laboratory*, **62** (4), 20 (1996).
17. M. A. Stepovich, A. A. Samokhvalov, A. G. Khokhlov, et al., *Prikladnaya Fizika*, No. 2, 39 (2004).
18. M. G. Snopova, I. V. Burylova, V. I. Petrov, et al., *J. Surf. Invest.: X-ray, Synchrotron Neutron Tech.*, No. 7, 47 (2007).
19. A. G. Khokhlov, V. I. Petrov, M. G. Snopova, et al., *J. Surf. Invest.: X-ray, Synchrotron Neutron Tech.*, No. 9, 64 (2005).
20. M. G. Snopova, N. N. Mikheev, V. I. Petrov, et al., *Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys.* **72**, 1534 (2008).
21. Yu. E. Gagarin, V. I. Petrov, and M. A. Stepovich, *Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys.* **68**, 1338 (2004).
22. E. V. Seregina, M. A. Stepovich, and A. M. Makarenkov, *Uspekhi Prikladnoi Fiziki* **1**, 544 (2013).
23. A. A. Samarskii, *Theory of difference schemes* (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].