

УДК 537.213

Моделирование электростатического поля заряженного непроводящего тороида

Ю. Н. Ташаев

Рассмотрена задача о распределении электростатического потенциала вокруг равномерно заряженного вдоль поверхности непроводящего тора. Потенциал тора исследован на наличие локального экстремума. Обсуждён вопрос о наличии «потенциальной ямы». Представлена функция, аппроксимирующая потенциал в приосевой области.

PACS: 41.20.Cv

Ключевые слова: электростатический потенциал, тороидальные координаты, цилиндрические координаты, эллиптические интегралы, параксиальное приближение.

Введение

При проектировании различных электрофизических устройств возникает необходимость создания математической модели электростатического поля заряженных тел различной конфигурации. Осесимметричная электростатическая задача нахождения потенциала, создаваемого равномерно заряженным однородным круглым тонким кольцом, которое представляет собой частный случай заряженного тора (при $r_0/R_0 \rightarrow 0$, где r_0 , R_0 малый и большой радиусы тора), рассматривалась в различных курсах электродинамики [1, 2]. Потенциал, являющийся решением уравнения Пуассона, представляется в них в виде интеграла вдоль нити кольца и выражен через эллиптический интеграл первого рода. В работе [3] предложена похожая методика вычисления электростатического потенциала, создаваемого равномерно заряженным тором, основанная на представлении решения уравнения Пуассона в виде интеграла по поверхности тора. Из полученного для потенциала выражения следует, что поверхность тора не является эквипотенциальной, вследствие чего методика применима только при расчёте потенциала непроводящего тора. В работе [4] получены выражения для электростатического потенциала, создаваемого как проводящим тором с заданным значением потенциала на его поверхности, так и равномерно заряженным вдоль поверхности непроводящим тором. Потенциал непроводящего тора, выраженный че-

рез полный эллиптический интеграл первого рода, отличается от приведённого в работе [3] в четыре раза. Отмеченное в работе [3] наличие «потенциальной ямы» внутри кольца не соответствует действительности, как графически показано в работе [4].

Целью данной работы является краткое изложение построения приближённого решения задачи о потенциале равномерно заряженного вдоль поверхности непроводящего тора, а также нахождение стационарной точки потенциала тора с последующим аналитическим исследованием её на наличие локального экстремума.

Потенциал тора в тороидальных координатах

Рассмотрим осесимметричную задачу о нахождении потенциала электростатического поля непроводящего тора T с малым радиусом r_0 и большим радиусом R_0 (рис. 1). Тороидальная поверхность, несущая заряд, образуется при вращении окружности радиусом r_0 вокруг оси z так, что её центр удалён от оси вращения на расстояние R_0 . Для построения решения воспользуемся тороидальными координатами (μ, θ, φ) [5]:

$$\rho = \frac{c \operatorname{sh} \mu}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}, \quad z = \frac{c \sin \theta}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}, \quad (1)$$

где $0 \leq \mu < \infty$, $-\pi < \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, c — размерный масштабный множитель, (ρ, φ, z) — цилиндрические координаты, связанные с декартовыми обычным образом: $x = \rho \cdot \cos \varphi$, $y = \rho \cdot \sin \varphi$, $z = z$. При фиксированном значении координаты μ , точки $P(\rho, \varphi, z)$ с координатами ρ и z , определяемыми соотношениями (1), и $\varphi \in [0, 2\pi]$ заполняют поверхность тора: $(\rho - R)^2 + z^2 = r^2$ с малым радиусом $r = c/\operatorname{sh} \mu$ и большим радиусом $R = c \cdot \operatorname{cth} \mu$. Несущая заряд поверхность тора T определяется координатами:

Ташаев Юрий Николаевич, доцент.
Московский государственный университет дизайна и технологий.
Россия, 117997, Москва, Садовническая ул., д 33, стр. 1.
Тел./факс. 8 (499) 131-04-25. E-mail: smcadmin@mail.ru

Статья поступила в редакцию 30 апреля 2015 г.

© Ташаев Ю. Н., 2015

$\mu = \mu_0$, где $\mu_0 = \ln\left(R_0 / r_0 + \sqrt{R_0^2 / r_0^2 - 1}\right)$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. При $\mu > \mu_0$ точка P принадлежит внутренней области тора, а при $0 \leq \mu < \mu_0$ внешней. Значение угла θ испытывает скачок от $-\pi$ до π при пересечении круга радиуса $\rho = R_0 - r_0$, лежащего в плоскости $z = 0$. Решив систему уравнений $r_0 = c / \operatorname{sh}\mu_0$ и $R_0 = c \cdot \operatorname{cth}\mu_0$, находим $c = \sqrt{R_0^2 - r_0^2}$.

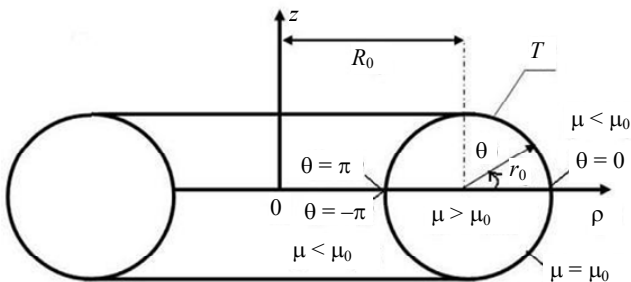


Рис. 1. Геометрические характеристики тороида, поверхность T которого задаётся уравнением $\mu = \mu_0$, $\mu_0 = \ln\left(R_0 / r_0 + \sqrt{R_0^2 / r_0^2 - 1}\right)$, r_0 и R_0 – малый и большой радиусы тороида. $\theta \in (-\pi, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

Потенциал, создаваемый в точке наблюдения поля $P(\vec{r})$ равномерно заряженным вдоль поверхности тором, несущим заряд q , в соответствии с законом Кулона и принципом суперпозиции определяется интегралом:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r}') ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (2)$$

где ϵ_0 — электрическая постоянная (в системе СИ), \vec{r}' — радиус вектор источника поля — бесконечно малого элемента поверхности тора площадью ds' , \vec{r} — радиус вектор точки наблюдения поля P , $\sigma(\vec{r}')$ — поверхностная плотность заряда. Следуя изложенной в работе [3] методике вычисления потенциала, используем тороидальную систему координат (1). Определение функции $U(\mu, \theta)$ (потенциал не зависит от угла φ) сводится к вычислению поверхностного интеграла (2), где $ds' = \frac{c^2 \operatorname{sh}\mu_0 d\theta d\varphi}{(\operatorname{ch}\mu_0 - \cos\theta)^2}$, а $\sigma(\vec{r}') = q / 4\pi^2 R_0 r_0$ при условии, что заряд равномерного распределен вдоль поверхности тора. Расстояние $|\vec{r} - \vec{r}'|$ между точкой наблюдения поля $P(\mu, \theta, \varphi)$ и точкой на поверхности тора $P'(\mu_0, \theta', \varphi')$ определится выражением [6]:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{c\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\operatorname{ch}\mu - \cos\theta} \sqrt{\operatorname{ch}\mu_0 - \cos\theta'}}{\sqrt{A_1 - \cos(\theta - \theta')}}},$$

где $A_1 = \operatorname{ch}\mu \operatorname{ch}\mu_0 - \operatorname{sh}\mu \operatorname{sh}\mu_0 \cos(\varphi - \varphi')$. Поверхностный интеграл (2), определяющий потенциал, создаваемый тором в точке $P(\mu, \theta, \varphi)$ во внешней области ($0 \leq \mu < \mu_0$), примет вид:

$$U(\mu, \theta) = \frac{qc \operatorname{sh}\mu_0 \sqrt{\operatorname{ch}\mu - \cos\theta}}{16\sqrt{2}\pi^3 \epsilon_0 R_0 r_0} I, \quad \text{где } I = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{A_1 - \cos(\theta - \theta')}} \frac{d\theta' d\varphi'}{(\operatorname{ch}\mu_0 - \cos\theta')^{3/2}}. \quad (3)$$

Интегрирование в выражении (3) сначала проводится по азимутальному углу φ' , а затем по углу θ' и приводит к следующему выражению для безразмерного потенциала $\bar{U}(\mu, \theta)$ [4]:

$$\bar{U}(\mu, \theta) = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}\mu - \cos\theta}}{\sqrt{\operatorname{ch}(\mu + \mu_0)}} K\left(\sqrt{\frac{2\operatorname{sh}\mu \operatorname{sh}\mu_0}{\operatorname{ch}(\mu + \mu_0)}}\right), \quad (4)$$

$$\bar{U}(\mu, \theta) = \frac{U(\mu, \theta)}{U(\mu_0)}.$$

Здесь $U(\mu_0)$ — постоянная величина, определяемая величиной заряда и геометрией тора:

$$U(\mu_0) = \frac{qE(\xi)}{\pi^3 \epsilon_0 R_0 \xi}, \quad \xi = \sqrt{\frac{2r_0}{R_0 + r_0}}, \quad 1 < E(\xi) < \frac{\pi}{2}.$$

$K\left(\sqrt{\frac{2\operatorname{sh}\mu \operatorname{sh}\mu_0}{\operatorname{ch}(\mu + \mu_0)}}\right)$ и $E\left(\sqrt{\frac{2r_0}{R_0 + r_0}}\right)$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода. При проведении интегрирования по θ' , по аналогии с [3] используя неравенство $\operatorname{ch}(\mu + \mu_0) > \cos(\theta - \theta')$, было сделано упрощение: $\operatorname{ch}(\mu + \mu_0) - \cos(\theta - \theta') \approx \operatorname{ch}(\mu + \mu_0)$. Как следует из выражения (4), на поверхности тора потенциал является функцией угла θ : $U(\mu_0, \theta) \sim \sqrt{\operatorname{ch}\mu_0 - \cos\theta}$. Поверхность тора в этом случае не может быть проводящей (постановка задачи в [3] не верна). Вычисление потенциала, создаваемого заряженным проводящим уединённым тором, представлено в работе [4].

Определение стационарной точки потенциала и исследование её на экстремум

Для определения стационарной точки потенциала (4) запишем его градиент в тороидальных координатах с учётом осевой симметрии и приравняем его к нулю:

$$\operatorname{grad} \bar{U}(\mu, \theta) = \frac{\operatorname{ch}\mu - \cos\theta}{c} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \mu} \vec{e}_\mu + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right) = 0.$$

Учитывая неравенство $\operatorname{ch}\mu > \cos\theta$ при μ и θ не равных нулю одновременно, получим систему уравнений:

$$\partial\bar{U}/\partial\theta = 0 \text{ и } \partial\bar{U}/\partial\mu = 0.$$

Первое из уравнений имеет два решения: $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Учитывая соотношения (1), находим, что $z = 0$ для обоих указанных значений θ . Точка наблюдения в этом случае принадлежит горизонтальной плоскости большого круга тора ($\theta = \pi$ соответствует направлению к центру тора $z = 0$, $\rho = c \operatorname{th}\frac{\mu}{2}$, $0 \leq \mu < \mu_0$, а $\theta = 0$ — направлению удаления от центра тора во внешнюю область $z = 0$, $\rho = c \cdot \operatorname{cth}\frac{\mu}{2}$, $0 \leq \mu < \mu_0$). При любом фиксированном значении $\mu \in [0, \mu_0)$ функция $\bar{U}(\mu, \theta)$ достигает своего максимума при $\theta = \pi$, соответственно, минимума при $\theta = 0$.

Будем искать решение уравнения $\partial\bar{U}/\partial\mu = 0$ при условии $\theta = \pi$, причем перейдя от функции $\bar{U}(\mu, \theta)$ к функции $\hat{U}(\mu) = \bar{U}(\mu, \pi)$, которую представим в виде:

$$\begin{aligned} \hat{U}(\mu) &= \frac{\sqrt{\operatorname{ch}\mu + 1}}{\sqrt{\operatorname{ch}(\mu + \mu_0)}} K\left(\sqrt{\frac{2\operatorname{sh}\mu \operatorname{sh}\mu_0}{\operatorname{ch}(\mu + \mu_0)}}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\mu + 1}{2\operatorname{sh}\mu \operatorname{sh}\mu_0}} \cdot \lambda(\mu) \cdot K[\lambda(\mu)]; \quad (5) \\ \lambda^2(\mu) &= \frac{2\operatorname{sh}\mu \operatorname{sh}\mu_0}{\operatorname{ch}(\mu + \mu_0)}, \end{aligned}$$

где $\lambda(\mu) \in [0, 1)$ при $\mu \in [0, \mu_0)$. Используя тождество, связывающее полные эллиптические интегралы первого $K(\lambda)$ и второго рода $E(\lambda)$:

$$K'(\lambda) = \frac{1}{\lambda(1-\lambda^2)} E(\lambda) - \frac{1}{\lambda} K(\lambda),$$

из (5) найдём выражения:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{U}(\mu)}{d\mu} &= \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch}(\mu + \mu_0)} \operatorname{sh}(\mu/2)} G(K, E), \\ G(K, E) &= -K(\lambda) + \frac{E(\lambda)}{1-\lambda^2} \frac{\operatorname{ch}\mu_0}{\operatorname{ch}(\mu + \mu_0)} = \\ &= \left(-K + \frac{E}{1-\lambda^2}\right) - \frac{E}{1-\lambda^2} \frac{\lambda^2}{2} \left(1 + \operatorname{th}\frac{\mu}{2} \operatorname{cth}\mu_0\right). \end{aligned}$$

Полные эллиптические интегралы первого и второго рода могут быть представлены в виде сте-

пенных рядов, сходящихся при $0 \leq \lambda < 1$. Мы ограничимся рассмотрением области, близкой к центру тора, т. е. $\mu \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$ и $\rho = c \cdot \operatorname{th}(\frac{1}{2}\mu) \rightarrow 0$. Достаточно учесть первые три члена соответствующих рядов:

$$K(\lambda) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{9\lambda^4}{64}\right); \quad E(\lambda) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{4} - \frac{3\lambda^4}{64}\right).$$

После несложных вычислений получим выражение:

$$G(K, E) = \frac{\pi}{2} \lambda^4 \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{8} \gamma\right),$$

$$\text{где } \gamma = \frac{\operatorname{cth}^2\mu_0}{\operatorname{ch}^2(\mu/2)} \frac{\operatorname{ch}(\mu + \mu_0)}{\operatorname{ch}\mu_0} \approx \operatorname{cth}^2\mu_0.$$

Для торов с отношением радиусов $R_0/r_0 > 3$ имеем $\mu_0 > 1,76$ и $1 < \operatorname{cth}\mu_0 < 1,06 \sim 1$, или $\gamma \sim 1$ и $G(K, E) \approx \pi\lambda^4/32$. Подставляя $G(K, E)$ в выраже-

ние для $\frac{d\hat{U}(\mu)}{d\mu}$ получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{U}(\mu)}{d\mu} &= \frac{\pi}{64\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch}(\mu + \mu_0)} \operatorname{sh}(\mu/2)} \frac{\lambda^4}{=} \\ &= \frac{\pi}{4\sqrt{2}\operatorname{ch}(\mu + \mu_0)} \frac{\operatorname{sh}^2\mu_0 \operatorname{ch}^3(\mu/2)}{\operatorname{ch}^2(\mu + \mu_0)} \operatorname{th}\frac{\mu}{2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что для рассматриваемых торов $\operatorname{th}\mu_0 \sim \operatorname{cth}\mu_0 \sim 1$, при малых значениях μ ($\mu \ll \mu_0$) получим уравнение:

$$\frac{d\hat{U}(\mu)}{d\mu} = \frac{\bar{U}_0}{4} \operatorname{th}\frac{\mu}{2} = \frac{\bar{U}_0}{8} \operatorname{sh}\mu = 0, \quad (\operatorname{sh}\mu \approx 2 \operatorname{th}\frac{\mu}{2})$$

где $\bar{U}_0 = \pi/\sqrt{2\operatorname{ch}\mu_0}$, единственным решением которого служит $\mu = 0$, или $\rho = c \cdot \operatorname{th}(\frac{1}{2}\mu) = 0$. Таким образом, стационарная точка потенциала имеет координаты $\mu = 0$, $\theta = \pi$, соответственно, $\rho = 0$, $z = 0$, то есть совпадает с центром тора, что можно было ожидать ввиду симметрии задачи. Отметим, что допущения, сделанные при выводе формулы (4), в целом не повлияли на корректность решения.

Для исследования потенциала на наличие экстремума в точке $O(\mu = 0, \theta = \pi)$, необходимо вычислить в ней его вторые производные $\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta^2}$ и

$$\frac{d^2 \hat{U}(\mu)}{d\mu^2}:$$

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta^2} \right|_{\substack{\mu=0, \\ \theta=\pi}} = \frac{\cos \theta \operatorname{ch} \mu - \cos^2 \theta - 0,5 \sin^2 \theta}{2(\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{3/2}} \frac{K[\lambda(\mu)]}{\sqrt{\operatorname{ch}(\mu + \mu_0)}} \Big|_{\substack{\mu=0 \\ \theta=\pi}} = \frac{-\pi}{4\sqrt{2\operatorname{ch}\mu_0}},$$

$$\left. \frac{d^2 \hat{U}(\mu)}{d\mu^2} \right|_{\mu=0} = \frac{\pi \operatorname{sh}^2 \mu_0}{16\sqrt{2}} \frac{\operatorname{ch} \mu (\operatorname{ch} \mu + 1)}{\operatorname{ch}^{5/2}(\mu + \mu_0)} \Big|_{\mu=0} = \frac{\pi}{8\sqrt{2\operatorname{ch}\mu_0}} \operatorname{th}^2 \mu_0.$$

При $\operatorname{th} \mu_0 \sim 1$ в центре тора $O|_{\mu=0, \theta=\pi}$ находим:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta^2} = -\frac{\bar{U}_0}{4}, \quad \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \mu^2} = \frac{\bar{U}_0}{8}. \quad (6)$$

Докажем, что начало координат, являясь стационарной точкой, не является точкой строгого экстремума электростатического потенциала. В точке O выполняется необходимое условие экстремума функции $\bar{U}(\mu, \theta)$, так как в центре тора поле отсутствует ($\operatorname{grad} \bar{U}(\mu, \theta) = 0$). Однако достаточное условие локального экстремума потенциала в начале координат не выполнено. Действительно, в соответствии с критерием Сильвестра знакоопределённости квадратичной формы, записанной для второго дифференциала потенциала в стационарной точке, условием существования ло-

кального экстремума функции $\bar{U}(\mu, \theta)$ является выполнение неравенства:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \mu^2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \mu \partial \theta} \right)^2 > 0. \quad (7)$$

Из (6) следует: $\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \mu^2} = -\frac{\bar{U}_0^2}{32} < 0$, и, следова-

тельно, неравенство (7) не справедливо. Таким образом, «потенциальная яма», наличие которой в центре тора ошибочно отмечено в работе [3], в действительности не существует. Заметим, что уравнение Лапласа $\Delta \bar{U}(\mu, \theta) = 0$ в центре тора выполнено. Лапласиан $\Delta \bar{U}$ в координатах (μ, θ, φ) ввиду осевой симметрии определяется уравнением:

$$\Delta \bar{U} = \frac{(\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^3}{c^2 \operatorname{sh} \mu} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{\operatorname{sh} \mu}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\operatorname{sh} \mu}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta} \right] \right\} = \frac{(\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^2}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta^2} \right] + \frac{(\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^3}{c^2 \operatorname{sh} \mu} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\operatorname{sh} \mu}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta} \right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\operatorname{sh} \mu}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta} \right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta} \right].$$

В центре тора в последнем слагаемом $\sin \theta \cdot \partial \bar{U} / \partial \theta = 0$. С учётом (6) и $\partial \bar{U} / \partial \mu = \bar{U}_0 \operatorname{sh} \mu \operatorname{th}^2 \mu_0 / 8$ получим окончательное выражение:

$$\left. \Delta \bar{U} \right|_{\substack{\mu=0, \\ \theta=\pi}} = \frac{4}{c^2} \left(\frac{\bar{U}_0}{8} - \frac{\bar{U}_0}{4} \right) + \frac{8}{c^2 \operatorname{sh} \mu} \frac{\bar{U}_0}{8} \frac{\operatorname{sh} \mu}{2} \operatorname{th}^2 \mu_0 = \frac{\bar{U}_0}{2c^2} (-1 + \operatorname{th}^2 \mu_0) \approx 0$$

при $\operatorname{th} \mu_0 \sim \operatorname{cth} \mu_0 \sim 1$.

Параксиальное приближение потенциала тора

Проанализируем поведение функции $\bar{U}(\mu, \theta)$ при $\mu = 0$ вдоль оси Oz . Координатная поверхность $\mu = 0$ соответствует $\operatorname{sh} \mu = 0$, $\operatorname{ch} \mu = 1$, $\rho = 0$, $z = c \cdot \sin \theta / (1 - \cos \theta) = c \cdot \operatorname{ctg} \theta / 2$, $\theta \in (-\pi, \pi]$:

$$\rho = \frac{c \operatorname{sh} \mu}{\operatorname{ch} \mu} \Big|_{\mu=0} = 0, \\ z = \frac{c \sin \theta}{1 - \cos \theta} = c \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, \\ \bar{U} = \frac{\pi}{2\sqrt{\operatorname{ch} \mu_0}} \cdot (1 - \cos \theta)^{1/2},$$

$$\bar{U} = \bar{U}_0 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|, \quad \bar{U}_0 = \pi / \sqrt{2\operatorname{ch} \mu_0}.$$

Найдём зависимость потенциала \bar{U} и напряжённости E_z от координаты z на оси симметрии:

$$\bar{U}(\rho, z) \Big|_{\rho=0} = \bar{U}(z) = \frac{\bar{U}_0}{\sqrt{1 + z^2 / c^2}}, \quad (8) \\ E_z = -\frac{d\bar{U}}{dz} = \frac{\bar{U}_0}{c^2} \frac{z}{(1 + z^2 / c^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, потенциал тора убывает при удалении от его центра вдоль оси z . Построим функцию $\widehat{U}(\rho, z)$, аппроксимирующую потенциал в области, близкой к оси симметрии, т. е. при $\rho \ll c$. Уравнения Максвелла (закон Гаусса), записанное в цилиндрических координатах всюду вне заряженной поверхности (ввиду осевой симметрии $\frac{\partial \widehat{U}}{\partial \phi} = 0$) имеет вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0,$$

$$E_\rho = -\frac{\partial \widehat{U}}{\partial \rho}, \quad E_z = -\frac{\partial \widehat{U}}{\partial z},$$

где E_ρ и E_z — радиальная и осевая составляющие напряжённости электрического поля. В приосевой области, полагая $\frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial z^2} \approx \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial z^2} \Big|_{\rho=0} = \frac{d^2 \widetilde{U}(z)}{dz^2} = \widetilde{U}''_{zz}$ и интегрируя уравнение Максвелла по ρ , можно получить следующие соотношения:

$$E_\rho = \frac{\rho}{2} \widetilde{U}''_{zz},$$

или $\frac{\partial \widehat{U}}{\partial \rho} = -\frac{\rho}{2} \widetilde{U}''_{zz},$

где $\widetilde{U}''_{zz} = -\frac{\bar{U}_0}{c^2} \frac{1-2z^2/c^2}{(1+z^2/c^2)^{5/2}}.$ (9)

Интегрируя второе уравнение в (9), найдём:

$$\widehat{U}(\rho, z) = \widetilde{U}(z) - \frac{\rho^2 \widetilde{U}''_{zz}}{4} = \widetilde{U}(z) \left(1 - \frac{\rho^2}{4} \frac{\widetilde{U}''_{zz}}{\widetilde{U}(z)} \right).$$

В результате, вблизи оси симметрии потенциал тора (в параксиальном приближении) примет вид:

$$\widehat{U}(\rho, z) = \frac{\bar{U}_0}{\sqrt{1+z^2/c^2}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\rho^2}{c^2} \frac{1-2z^2/c^2}{(1+z^2/c^2)^2} \right). \quad (10)$$

Если точка наблюдения принадлежит горизонтальной плоскости большого круга тора ($z = 0$), то в окрестности центра имеем: $V(\rho) = \widehat{U}(\rho, 0) = \bar{U}_0 \left(1 + \rho^2 / 4c^2 \right), \quad E_\rho = -\rho / 2c^2 \cdot \bar{U}_0,$

$dV/d\rho > 0$; то есть потенциал тора возрастает при удалении от его центра по направлению к заряженной поверхности и в тоже время, как следует из (8), убывает при удалении от его центра вдоль оси z . Анализ функции (10) показывает, что вторые производные в центре тора имеют разные знаки ($\frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \rho^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial z^2}$), и, следовательно, локальный экстремум в точке O ($\rho = 0, z = 0$) не существует:

$$\frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \rho \partial z} \right)^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial z^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \rho \partial z} \right)^2 < 0.$$

Для визуализации пространственного распределения электростатического потенциала во внешней области тора был создан программный код в среде MatLab. Во всех расчётах малый радиус тора r_0 выбирался равным 0,2 м, а большой радиус R_0 полагался равным 1,5 м. На рис. 2 представлено распределение безразмерного потенциала $\widetilde{U}(|x|, z) = \widehat{U}(\rho, z)|_{y=0}$ в плоскости $y = 0$ ($\phi = 0$), которое в силу осевой симметрии будет идентичным распределению потенциала $\widetilde{U}(|y|, z)$ в плоскости $x = 0$. Очевидно, «потенциальная яма» внутри тора не наблюдается. Поверхность $\widetilde{U}(|x|, z)$ в области, близкой к центру тора, имеет седлообразную форму, изгибаясь в одной вертикальной плоскости (\widetilde{U}, x) вниз, а в другой (\widetilde{U}, z) — вверх.

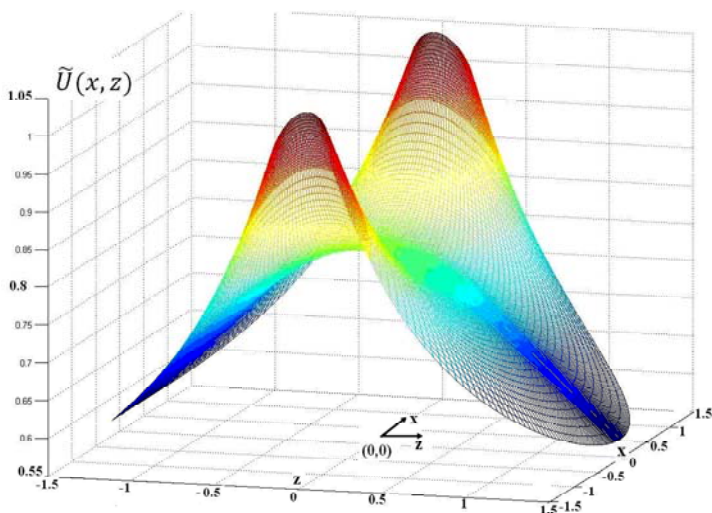


Рис. 2. 3D-график безразмерного потенциала $\widetilde{U}(x, z)$, создаваемого равномерно заряженным тором в вертикальной плоскости (x, z)

Заключение

В работе в тороидальных координатах получено выражение для электростатического потенциала, создаваемого равномерно заряженным вдоль поверхности непроводящим тором. Приближённое вычисление потенциала позволило выразить его через полный эллиптический интеграл первого рода. Показано, что равномерно заряженный вдоль поверхности тор не может быть проводящим. Доказано, что центр тора, являясь стационарной точкой, не является точкой строгого экстремума потенциала. Построены функции цилиндрических координат, аппроксимирующие потенциал и напряжённость поля в приосевой области (параксиальное приближение). В системе MatLab создан программный код для визуализации пространственного распределения электростатическо-

го потенциала во внешней области тора и показано, что потенциал имеет седлообразную форму в области близкой к центру, т.е. классическая «потенциальная яма» внутри тора не существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Современная электродинамика. Часть 1. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
2. Овчинников И. К. Теория поля. — М.: Недра, 1979.
3. Макушев М. К., Байсиев Х.-М. Х. // Успехи прикладной физики. 2013. Т. 1. № 3. С. 268.
4. Ташаев Ю. Н. // Успехи прикладной физики. 2015. Т. 3. № 2. С. 126.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1974.
6. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. — М.: Издат. Иностр. Лит., 1952.

Modeling of the electrostatic field of the charged non-conducting torus

Y. N. Tashayev

Moscow State University of Design and Technologies
Bild. 1, 33, Sadovnichesky str., Moscow, 117997, Russia
E-mail: smcadmin@mail.ru

Received April 30, 2015

The problem of the distribution of the electrostatic potential over the uniformly charged surface of the non-conducting torus is considered. The torus potential is explored on presence of a local extreme. The question of a "potential well" in the center of the torus is discussed. The function approximating potential in space near a symmetry axis is derived.

PACS: 41.20.Cv

Keywords: electrostatic potential, toroidal coordinates, cylindrical coordinates, charged torus potential, elliptic integrals, visualization, spatial distribution.

REFERENCES

1. V. V. Batygin and I. N. Toptygin, *Modern Electrodynamics. Part 1.* (Moscow-Izhevsk, 2003) [in Russian].
2. I. K. Ovchinnikov, *Theory of Field* (Nedra, Moscow, 1979) [in Russian].
3. M. K. Makuashev and Kh.-M. Kh. Baisiev, *Uspekhi Prikladnoi Fiziki* **1**, 268 (2013).
4. Yu. N. Tashayev, *Uspekhi Prikladnoi Fiziki* **3**, 126 (2015).
5. G. Korn and T. Korn, *Mathematical Handbook* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1968; Nauka, Moscow, 1974).
6. E. V. Gobson, *Theory of Spherical and Ellipsoidal Functions* (Izdat. Inostr. Liter., Moscow, 1952) [in Russian].

* * *