

## Математическая модель процесса модуляции излучения МЧТ

В. С. Ковшов, А. И. Патрашин

*Подробно проанализирован процесс модуляции излучения модели черного тела (МЧТ) стандартным электромеханическим модулятором, осуществляющим стопроцентную модуляцию. Получены аналитические функции, описывающие модулированные потоки излучения МЧТ и диска модулятора. Используя приведенное в ГОСТ 17772-88 определение коэффициента формы модуляции, рассчитаны значения искомого коэффициента. Проведен сравнительный анализ полученных значений с табличными данными ГОСТ 17772-88 для круглых и квадратных диафрагм МЧТ. Установлено совпадение расчетных данных и данных ГОСТ для круглых диафрагм. Показана необходимость корректировки данных ГОСТ для квадратных диафрагм. Установлена причина расхождения полученных результатов с данными ГОСТ.*

*Ключевые слова:* модель черного тела, модуляция излучения МЧТ, коэффициент формы модуляции.

**Ссылка:** Ковшов В. С., Патрашин А. И. // Прикладная физика. 2019. № 4. С. 47.

**Reference:** V. S. Kovshov and A. I. Patrashin, Prikl. Fiz., No. 4, 47 (2019).

### Введение

Модель черного тела (МЧТ) эффективно используют при измерении параметров ИК-фотоприемников из-за возможности аналитически описать распределение его излучения по длинам волн [1] и рассчитать, соответственно, энергетическую и фотонную облученность ИК матричных фотоприемных устройств (МФПУ) [2].

Для выделения сигнального излучения МЧТ из совокупности других паразитных излучений [3] применяют модулирование излучения МЧТ.

Модуляция излучения МЧТ используется при измерении напряжения/тока фотосиг-

нала фоточувствительных элементов (ФЧЭ) ИК МФПУ [4], необходимых для расчета таких фоточувствительных параметров ИК ФПУ [5], как статическая чувствительность, порог чувствительности, обнаружительная способность, а также абсолютные значения спектральной характеристики на разных длинах волн. Для повышения точности измерений указанных параметров необходимо корректно рассчитывать эффективное значение модулированного потока излучения МЧТ.

Согласно [5], эффективное значение модулированного потока излучения МЧТ равно произведению коэффициента формы модуляции излучения МЧТ на величину немодулированного потока излучения. В соответствии с [5, 6], величина этого коэффициента равно отношению среднеквадратического значения основной его гармоники к полной энергии потока.

В настоящей статье разработана математическая модель процесса модуляции [5] излучения МЧТ с диафрагмой круглой и прямоугольной формы. Для этого подробно рассмотрена модуляция излучения МЧТ стандартным электромеханическим модулятором

---

**Ковшов Владимир Сергеевич**<sup>1,2</sup>, инженер, аспирант.

**Патрашин Александр Иванович**<sup>1</sup>, в.н.с., к.ф.-м.н.

<sup>1</sup> АО «НПО «Орион».

Россия, 111538, Москва, ул. Косинская, 9.

E-mail: orion@orion-ir.ru

<sup>2</sup> Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет).

Россия, 141700, Московская обл., г. Долгопрудный,

Институтский пер., 9.

Статья поступила в редакцию 23 июля 2019 г.

---

© Ковшов В. С., Патрашин А. И., 2019

для диафрагм двух форм с разными размерами. Проведено сравнение полученных значений коэффициента модуляции излучения с табличными данными ГОСТ 17772-88 и [6].

### Расчет коэффициента формы модуляции излучения МЧТ с диафрагмой круглой формы

Согласно [5, 6], коэффициент формы модуляции определяется как отношение среднего квадратичного значения первой (основной) гармонической составляющей потока излучения к удвоенной амплитуде (полному размаху) модулированного потока. Полный модулированный поток  $\Phi(t)$  складывается из модулированных потоков излучения МЧТ  $\Phi_{\text{МЧТ}}(t)$  и диска модулятора  $\Phi_{\text{мод}}(t)$ . Для расчета коэффициента формы модуляции необходимо корректно описать процесс модуляции излучения МЧТ.

Рассмотрим изображенную на рис. 1 схему модуляции излучения МЧТ с диафрагмой круглой формы радиуса  $r_{\text{МЧТ}}$ . Излучение МЧТ модулируется электромеханическим модулятором со стопроцентной глубиной модуляции.

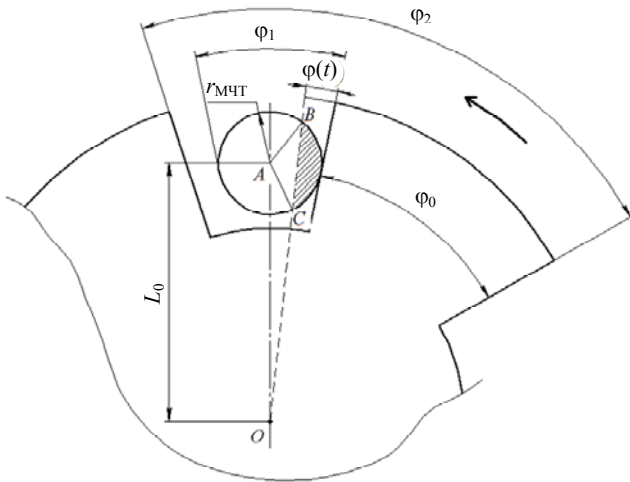


Рис. 1. Схема модуляции излучения МЧТ с диафрагмой круглой формы.

За точку начала отсчета  $t = 0$  выберем момент начала перекрытия диафрагмы МЧТ. Зададим направление вращения диска модулятора, например, против часовой стрелки, как это показано на рис. 1. За время  $t$  лопасть модулятора повернется против часовой стрелки

на угол  $\varphi(t) = 2\pi ft$ , где  $f$  – частота модуляции, и перекроет сегмент круглой диафрагмы, изображенный на рис. 1 заштрихованной областью. Площадь этого сегмента определяется центральным углом  $\angle BAC \equiv \alpha$  и радиусом  $r_{\text{МЧТ}}$  диафрагмы МЧТ с помощью следующего выражения [7]:

$$S_1(t) = \frac{r_{\text{МЧТ}}^2}{2} \left( \frac{\pi}{180} \alpha(t) - \sin \alpha(t) \right), \quad (1)$$

где  $\alpha(t)$  – угол, измеряемый в градусах.

Рассмотрим треугольник  $\Delta AOB$  и применим теорему синусов. Получим следующее выражение:

$$\frac{\sin \angle ABO}{L_0} = \frac{\sin \angle AOB}{r_{\text{МЧТ}}}, \quad (2)$$

где  $L_0$  – расстояние между осью вращения диска модулятора и главной оптической осью, проходящей через центр диафрагмы МЧТ перпендикулярно плоскости рис. 1.

Учитывая, что треугольник  $\Delta ABC$  равнобедренный, вводя угловой размер диафрагмы МЧТ  $\varphi_1$ , как показано на рис. 1, и используя тригонометрические тождества, перепишем выражение (2) в следующем виде:

$$\cos \frac{\alpha(t)}{2} = \frac{L_0}{r_{\text{МЧТ}}} \sin \left( \frac{\varphi_1}{2} - \varphi(t) \right). \quad (3)$$

Учитывая, что  $\sin \frac{\varphi_1}{2} = \frac{r_{\text{МЧТ}}}{L_0}$ , получим из (3) явное выражение для угла  $\alpha(t)$

$$\alpha(t) = 2 \arccos \times \left( \cos 2\pi ft - \sqrt{\left( \frac{L_0}{r_{\text{МЧТ}}} \right)^2 - 1} \times \sin 2\pi ft \right). \quad (4)$$

Таким образом, изменение площади диафрагмы МЧТ в процессе ее перекрытия описывается следующей функцией

$$S_2(t) = \pi r_{\text{МЧТ}}^2 - S_1(t), \quad (5)$$

где  $S_1(t)$  и  $\alpha(t)$  определяются выражениями (1) и (4) соответственно.

Изменение площади диафрагмы МЧТ в процессе ее открытия лопастью модулятора описывается выражением (1). Тогда общий вид

функции, описывающей изменение площади диафрагмы МЧТ в относительных единицах, будет определяться следующим выражением

$$S_{\text{МЧТ}}(t) = \begin{cases} \frac{S_2(t)}{\pi r_{\text{МЧТ}}^2}, & t \in [T \times m, \Delta t_1 + T \times m] \\ 0, & t \in [\Delta t_1 + T \times m, \Delta t_1 + \Delta t_2 + T \times m] \\ \frac{S_1(t)}{\pi r_{\text{МЧТ}}^2}, & t \in [\Delta t_1 + \Delta t_2 + T \times m, \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + T \times m] \\ 1, & t \in [2\Delta t_1 + \Delta t_2 + T \times m, \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \Delta t_4 + T \times m] \end{cases}, \quad (6)$$

где  $\Delta t_1 = \frac{\Phi_1}{2\pi f}$  – период времени, за которое лопасть модулятора полностью перекрывает диафрагму МЧТ;

$\Delta t_2 = \frac{\Phi_0 - \Phi_1}{2\pi f}$  – период времени, в течение которого диафрагма МЧТ полностью перекрыта,  $\Phi_0$  – угловой размер лопасти модулятора;  $\Delta t_3 = \Delta t_1$  – период времени, за которое лопасть модулятора полностью открывает диафрагму МЧТ;

$\Delta t_4 = \frac{\Phi_2 - \Phi_0 - \Phi_1}{2\pi f}$  – период времени, в течение которого диафрагма МЧТ полностью открыта;  $\Phi_2 = \frac{2\pi}{N}$  – угловой период модулятора;  $N$  – количество лопастей;

$T = \frac{\Phi_2}{2\pi f}$  – период модуляции;

$m = 0, 1, 2, \dots$

На рис. 2 показана функция (6) для  $f = 400$  Гц,  $L_0 = 70$  мм,  $r_{\text{МЧТ}} = 4$  мм,  $\Phi_0 = \frac{\Phi_2}{2}$  и  $N = 8$ .

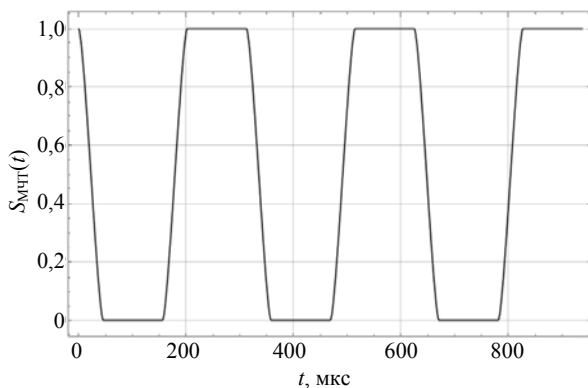


Рис. 2. Относительное изменение площади излучающей площадки МЧТ в процессе модуляции.

Рис. 2 не дает полного представления о гладкости функции  $S_{\text{МЧТ}}(t)$  в точках, соответствующих моментам начала и окончания открытия, а также начала и окончания закрытия диафрагмы МЧТ. Для проверки корректности полученной функции  $S_{\text{МЧТ}}(t)$ , определим ее производные в указанных точках. Рассмотрим, например, процесс перекрытия диафрагмы МЧТ. Он описывается функцией (5). На рис. 3 представлена производная этой функции.

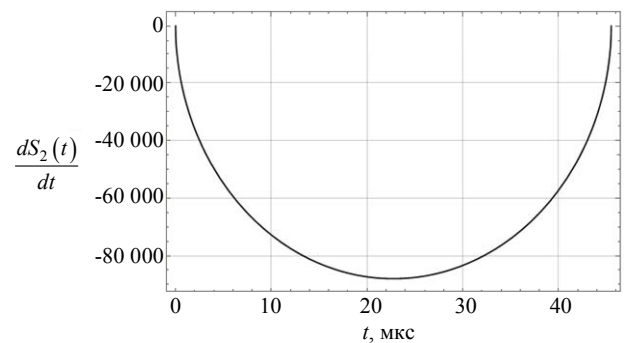


Рис. 3. Производная функции  $S_2(t)$ .

При этом

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dS_2(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow \Delta t_1} \frac{dS_2(t)}{dt} = 0. \quad (7)$$

Из условия (7) следует равенство производных справа и слева в точках, соответствующих моментам начала и окончания перекрытия, а также начала и окончания открытия диафрагмы МЧТ, что объясняет гладкость функции  $S_{\text{МЧТ}}(t)$  для любого  $t$ .

Таким образом, модулированный поток излучения МЧТ определяется следующим выражением

$$\Phi_{\text{МЧТ}}(t) = S_{\text{МЧТ}}(t) \times \Phi_{\text{МЧТ0}} \quad (8)$$

где  $\Phi_{\text{МЧТ0}}$  – величина немодулированного потока излучения МЧТ.

Когда лопасть модулятора перекрывает диафрагму МЧТ, величина излучающей площадки МЧТ за время  $dt$  уменьшается на  $dS$ . При этом величина излучающей площадки модулятора за то же время увеличивается на  $dS$ . Когда лопасть модулятора открывает диафрагму МЧТ, величина излучающей площадки МЧТ за время  $dt$  увеличивается на  $dS$ . За то же время величина излучающей площадки модулятора уменьшается на  $dS$ . Когда диафрагма МЧТ полностью перекрыта, излучение МЧТ равно нулю, а излучение модулятора максимально. Когда диафрагма МЧТ полностью открыта излучение МЧТ максимально, а излучение модулятора равно нулю. Отсюда следует, что модулированный поток излучения МЧТ находится в противофазе с модулированным потоком излучения диска модулятора, т. е.

$$\Phi_{\text{мод}}(t) = (1 - S_{\text{МЧТ}}(t)) \times \Phi_{\text{мод}0} \quad (9)$$

где  $\Phi_{\text{мод}0}$  – величина немодулированного потока излучения диска модулятора.

Таким образом, полный модулированный поток излучения определяется следующим образом

$$\Phi(t) = S_{\text{МЧТ}}(t) \times (\Phi_{\text{МЧТ}0} - \Phi_{\text{мод}0}) + \Phi_{\text{мод}0}. \quad (10)$$

Согласно определению коэффициента формы модуляции, данного в начале статьи, необходимо выделить основную гармоническую составляющую  $\Phi(t)$ . Для этого рассчитаем первые коэффициенты Фурье разложения функции  $\Phi(t)$  [8], которые определяются следующим образом

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T \Phi(t) \times \cos \frac{2\pi t}{T} dt \quad (11)$$

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T \Phi(t) \times \sin \frac{2\pi t}{T} dt. \quad (12)$$

Тогда основная гармоническая составляющая  $\Phi(t)$  выражается следующим образом

$$g(t) = a_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + b_1 \sin \frac{2\pi t}{T}. \quad (13)$$

Следовательно, выражение для коэффициента формы модуляции можно записать в следующем виде

$$\beta = \frac{\text{СКО}(g(t))}{\Phi_{\text{МЧТ}0} - \Phi_{\text{мод}0}} \quad (14)$$

где

$$\text{СКО}(g(t)) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T g(t)^2 dt - \frac{1}{T^2} \left( \int_0^T g(t) dt \right)^2} - \text{среднеквадратичное отклонение от среднего значения [7].}$$

Подставляя (10) в (11) и (12), получим

$$a_1 = (\Phi_{\text{МЧТ}0} - \Phi_{\text{мод}0}) \times a'_1 \quad (15)$$

$$b_1 = (\Phi_{\text{МЧТ}0} - \Phi_{\text{мод}0}) \times b'_1 \quad (16)$$

где  $a'_1$  и  $b'_1$  – первые коэффициенты Фурье функции  $S_{\text{МЧТ}}(t)$ , которые определяются аналогично выражениям (11) и (12) соответственно.

Тогда подставляя (15), (16) и (13) в (14) и используя свойства СКО [7], получим

$$\beta = \text{СКО} \left( a'_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + b'_1 \sin \frac{2\pi t}{T} \right). \quad (17)$$

Применяя в (17) определение СКО [7], получаем окончательную формулу для коэффициента формы модуляции

$$\beta = \sqrt{\frac{a_1'^2 + b_1'^2}{2}} \quad (18)$$

где

$$a'_1 = \frac{2}{T} \int_0^T S_{\text{МЧТ}}(t) \times \cos \frac{2\pi t}{T} dt \quad (19)$$

$$b'_1 = \frac{2}{T} \int_0^T S_{\text{МЧТ}}(t) \times \sin \frac{2\pi t}{T} dt. \quad (20)$$

В ГОСТ 17772-88 предложена таблица со значениями коэффициента формы модуляции  $\beta$  в зависимости от отношения угловых размеров диафрагм МЧТ  $\varphi_1/\varphi_2$  (см. рис. 1). В табл. 1 представлено сравнение результатов расчета коэффициента формы модуляции излучения  $\beta$  для диафрагмы МЧТ круглой фор-

мы по формуле (12) с табличными данными, указанными в ГОСТ. Расчет проводился при  $f = 400$  Гц,  $L_0 = 70$  мм,  $\varphi_0 = \frac{\varphi_2}{2}$  и  $N = 8$ .

Таблица 1

Сравнение результатов расчета коэффициента  $\beta$  для диафрагмы МЧТ круглой формы с табличными данными, указанными в ГОСТ

$\varphi_1/\varphi_2$	Коэффициент формы модуляции $\beta$ для диафрагмы МЧТ круглой формы	
	ГОСТ 17772-88	Наш расчет
0,00	0,450	0,450
0,05	0,449	0,449
0,08	0,446	0,447
0,10	0,444	0,445
0,15	0,438	0,438
0,20	0,428	0,428
0,25	0,416	0,416
0,30	0,402	0,402
0,35	0,385	0,386
0,40	0,367	0,367
0,45	0,347	0,347
0,50	0,325	0,326

Сравнительный анализ показывает совпадение значений коэффициента формы модуляции, указанных в соответствующей таблице Приложения 4 ГОСТ 17772-88 и полученных с помощью предлагаемой модели для диафрагмы МЧТ круглой формы.

Аналогичным образом была разработана математическая модель коэффициента формы модуляции излучения МЧТ с диафрагмой квадратной формы (см. рис. 4), т. к. производители АЧТ выпускают их только с указанными диафрагмами [9, 10]. Расчет проводился с учетом многократного изменения формы излучающей диафрагмы от полностью открытой диафрагмы к пятиугольнику, от пятиугольника к трапеции, от трапеции к треугольнику и от треугольника к полностью закрытой диафрагме. Мы здесь не приводим подробности расчета, т. к. он достаточно объемный.

В табл. 2 представлено сравнение табличных данных ГОСТ 17772-88 с результатами расчета для диафрагм МЧТ квадратной формы. Изменение отношения  $\varphi_1/\varphi_2$  достигается путем изменения размера диафрагмы. Причем центр квадратной диафрагмы остается неподвижным относительно оси  $O$ .

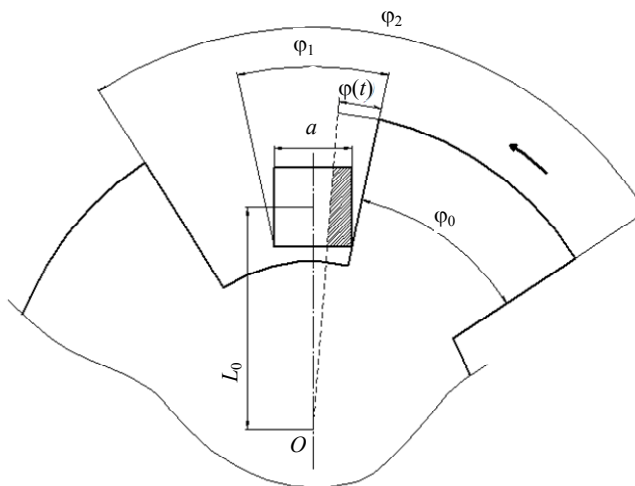


Рис. 4. Схема модуляции излучения МЧТ с диафрагмой квадратной формы.

Таблица 2

Сравнение табличных данных ГОСТ 17772-88 с результатами расчета для диафрагм МЧТ квадратной формы

$\varphi_1/\varphi_2$	Коэффициент формы модуляции $\beta$ для диафрагмы МЧТ квадратной формы	
	ГОСТ 17772-88	Наш расчет
0,00	0,450	0,450
0,05	0,448	0,448
0,08	0,445	0,446
0,10	0,442	0,442
0,15	0,433	0,436
0,20	0,421	0,424
0,25	0,405	0,412
0,30	0,386	0,399
0,35	0,365	0,382
0,40	0,341	0,365
0,45	0,314	0,346
0,50	0,286	0,328

Результаты расчета коэффициента формы для модуляции излучения МЧТ с диафрагмой квадратной формы отличаются от табличных данных ГОСТ 17772-88 и [6]. Отличие результатов можно объяснить тем, что метод расчета искомого коэффициента, который применяется в ГОСТе, по нашему мнению, предполагает, что лопасть модулятора всегда остается параллельной одной из сторон диафрагмы так, что процесс изменения формы излучающей площадки МЧТ существенно более простой. Она всегда остается прямоугольной в процессе модуляции. Данный случай также был обчислен и дал совпадающие с

ГОСТ результаты по данной диафрагме. Однако он не совсем корректен, т. к. подобные модуляторы просто не выпускаются. Отсюда возникает необходимость корректировки табл. 2 Приложения 4 ГОСТ 17772-88.

### Заключение

Рассмотрено подробное описание процесса модуляции излучения МЧТ. Разработана корректная математическая модель для метода расчета коэффициента формы модуляции излучения МЧТ с диафрагмой круглой и квадратной форм. Проведен сравнительный анализ значений коэффициентов формы модуляции излучения МЧТ с данными указанными в ГОСТ 17772-88 и [6]. Для круглых диафрагм получено полное соответствие с литературными источниками. Для квадратных диафрагм выявлено их несоответствие с табличными данными ГОСТ 17772-88 и [6]. Установлена причина несоответствия коэффициентов, обусловленная упрощенным предположением авторов [5] и [6] о взаимном расположении квадратной диафрагмы и лопастей модулятора

в модели расчета. Выявлена необходимость корректировки таблицы 2 Приложения 4 ГОСТ 17772-88.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Рогальский А.* Инфракрасные детекторы. – Новосибирск: Наука, 2003.
2. *Патрашин А. И., Козлов К. В., Ковшов В. С., Стрельцов В. А., Никонов А. В.* // Успехи прикладной физики. 2018. Т. 6. № 4. С. 349.
3. *Патрашин А. И., Ковшов В. С., Никонов А. В., Бурлаков И. Д.* // Успехи прикладной физики. 2019. Т. 7. № 1. С. 49.
4. *Ковшов В. С., Патрашин А. И., Никонов А. В.* // Успехи прикладной физики. 2018. Т. 6. № 5. С. 443.
5. ГОСТ 17772-88. – Госкомитет СССР по стандартам. М., Изд. стандартов, 1988.
6. *Васильченко Н. В., Борисов В. А., Кременчугский Л. С., Левин Г. Э.* Измерение параметров приемников оптического излучения. – М.: Радио и связь, 1983.
7. *Цыпкин А. Г., Цыпкин Г. Г.* Математические формулы: Алгебра. Геометрия. Математический анализ: [Справочник]. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985.
8. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. – Бином. Лаб. знаний, 2009.
9. IMPAC, Mikron Group, Temperature Calibration Sources, – IMPAC Infrared GmbH, [www.impacinfrared.com](http://www.impacinfrared.com).
10. CI Systems, Blackbody IR calibration sources, [www.ci-systems.com](http://www.ci-systems.com).

PACS: 44.40.+a, 42.79.Ag

## The mathematical model of blackbody radiation modulation energy factor

*V. S. Kovshov<sup>1,2</sup> and A. I. Patrashin<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Orion R&P Association, JSC  
9 Kosinskaya st., Moscow, 111538, Russia  
E-mail: [orion@orion-ir.ru](mailto:orion@orion-ir.ru)

<sup>2</sup> Moscow Physical and Technical Institute  
9 Institutskii al., Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia

Received July 23, 2019

*Modulation process of blackbody radiation with standard electromechanical modulator, realizing unity modulation, is considered in detail. The functions, describing modulated radiant fluxes of blackbody and modulator's disk, is obtained. The values of required coefficients for circular and square diaphragms is calculated using a given in GOST 17772-88 definition of modulation energy factor. The necessity of its correction for square diaphragms is found out in the course of comparative analysis of obtained values with tabular data of GOST 17772-88. The reason of this discrepancy is defined.*

*Keywords:* black body, modulation of blackbody radiation, modulation energy factor.

## REFERENCES

1. A. Rogalski, *Infrared Detectors* (CRC Press, 2011).
2. A. I. Patrashin, K. V. Kozlov, V. S. Kovshov, et al., *Usp. Prikl. Fiz.* **6** (4), 349 (2018).
3. A. I. Patrashin, V. S. Kovshov, A. V. Nikonov, and I. D. Burlakov, *Usp. Prikl. Fiz.* **7** (1), 49 (2019).
4. V. S. Kovshov, A. I. Patrashin, A. V. Nikonov, et al., *Usp. Prikl. Fiz.* **6** (5), 443 (2018).
5. GOST 17772-88.
6. N. V. Vasilchenko, V. A. Borisov, L. S. Kremenchugski, and G. E. Levin, *Measurement of parameters of optical radiation* (Moscow, Radio&Svyaz, 1983) [in Russian].
7. A. G. Cipkin and G. G. Cipkin, *Mathematical Formulas. Handbook.* (Nauka, Glav. Red. Fiz.-Mat. Lit., 1985) [in Russian].
8. A. M. Ter-Krikorov and M. I. Shabunin, *Course of Mathematical Analyses* (Binom. Lab. Znaniy, 2009) [in Russian].
9. IMPAC, *Mikron Group, Temperature Calibration Sources* (IMPAC Infrared GmbH, [www.impactinfrared.com](http://www.impactinfrared.com)).
10. CI Systems, *Blackbody IR Calibration Sources* ([www.ci-systems.com](http://www.ci-systems.com)).