

УДК 539.186.2

PACS: 79.20.Rf

Тормозное излучение электронов, рассеивающихся на кулоновом центре, находящемся во внешнем неоднородном электрическом поле

В. И. Крылов, И. Н. Егоршин

Получены сечения тормозного излучения, отнесенного к элементу частоты излученного фотона, при рассеянии электрона на одном кулоновом центре, находящемся в стационарном электрическом поле. В найденных сечениях учтено влияние суперпозиции движения излучающих частиц в кулоновом и внешнем электрическом полях. Показано что при определенных условиях появление внешнего электрического поля может приводить к заметному изменению зависимости сечения от частоты по сравнению со случаем сечения тормозного излучения, вызванного рассеянием электрона на изолированном кулоновом центре.

Ключевые слова: тормозное излучение, дифференциальные сечения, внешнее стационарное поле, кулоновое рассеивающее поле.

Ссылка: Крылов В. И., Егоршин И. Н. // Прикладная физика. 2020. № 2. С. 20.

Reference: V. I. Krylov and I. N. Egorshin, Applied Physics, No. 2 (20), 2020.

Введение

В работах [1–10] были определены дифференциальные сечения тормозного излучения электронов, возникающего при их рассеянии на периодичной системе кулоновских центров в виде бесконечного слоя (или нескольких слоев), находящегося в ортогональном к нему однородном и стационарном электрическом поле E , которое индуцировано в ограниченной, вообще говоря, макроскопической области пространства между двумя плоскостями (одна из которых источник электронов, а вторая их поглощает, т. е. – «абсо-

лютно черная»). Было показано, что вклад в сечения суперпозиции движений излучающего электрона в кулоновых полях и внешнем электрическом поле, существенно их изменяет, даже в отсутствии отражения излучающих частиц от потенциального барьера внешнего поля. Отметим, что применить, полученные в [1–10] результаты к рассеянию электрона на одном кулоновом центре, нельзя из-за периодической структуры и бесконечного числа рассеивающих центров, т. е. – к описанию тормозного излучения в плазме, ионизованном газе, рассеянию электрона на атомном ядре во внешнем поле.

Цель настоящей работы заключается в рассмотрении эффекта влияния суперпозиции движений электронов в кулоновом поле одного рассеивающего центра и внешнем стационарном электрическом поле на их тормозное излучение, возникающее при переходе излучающих частиц в состояния, в которых они не отражаются от потенциального барьера внешнего поля. Именно такие переходы при рассеянии на малые углы в кулоновых столкновениях играют основную роль в кинетических процессах в плазме, ионизованном газе, а также при образовании новых или модифика-

Крылов Владимир Иванович¹, профессор кафедры «Физика и теоретическая механика», д.ф.-м.н.

Егоршин Иван Николаевич², старший преподаватель кафедры «Физика».

¹ Дальневосточный государственный университет путей сообщения.

Россия, 680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.

E-mail: krylov_vladimir@mail.ru

² Тихоокеанский государственный университет.

Россия, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

E-mail: ikarrus@mail.ru

Статья поступила в редакцию 11 февраля 2020 г.

© Крылов В. И., Егоршин И. Н., 2020

ции старых материалов под действием потоков микрочастиц в присутствии квазистационарного электрического поля в различных реакторах.

Попытка исследовать эффект влияния на тормозное излучение электрона суперпозиции его движений в однородном внешнем поле и поле только одного кулонова центра в рамках модели, использованной в [1, 10], была сделана в [11]. Однако, дальнейший анализ полученных в ней результатов показал, что они должны быть откорректированы с использованием условий ортогональности волновых функций, что сделать в рамках выбранной модели достаточно сложно. Кроме того, из найденных в [11] сечений, получить сечения, отнесенные только к элементу фазового пространства фотона, а также к элементу его частоты, можно, по-видимому, только численно.

В настоящей работе потенциал внешнего электрического поля задан ограниченной гладкой или кусочно гладкой функцией (имеющей наибольшее и наименьшее значения на бесконечностях) во всем пространстве, в том числе и вдоль оси z (декартовых координат) параллельной \mathbf{E} (подробнее см. ниже), и вместе с кулоновым потенциалом рассматривается как возмущение, что позволяет в борновском приближении, вычислять матричный элемент излучения фотона по волновым функциям свободных частиц. Такая постановка задачи дает возможность, используя только аналитические вычисления, получить сечение, отнесенное к элементу частоты излученного фотона, и учесть влияние внешнего электрического поля на тормозное излучение электронов (в отсутствии их отражения от потенциального барьера внешнего поля).

Сечение тормозного излучения электрона при его рассеянии на кулоновом центре находящемся во внешнем электрическом поле с гладким и кусочно гладким потенциалами

Пусть тяжелый кулоновое поле с зарядом $Z|e|$, декартовы координаты (x, y, z) которого равны нулю, находится в во внешнем электрическом поле с потенциалом

$$\tilde{\Phi}_E = |e|E / a\lambda \operatorname{arctg} \lambda z - z_0, \text{ или}$$

$$\tilde{\Phi}_{EL} \equiv \frac{|e|E_0}{a} \Phi_{EL} = \frac{|e|E_0}{a} \begin{cases} -L_1, & \text{если } z \leq -L_1, \\ z, & \text{если } -L_1 \leq z \leq L_1, \\ L_1, & \text{если } z \geq L_1, \end{cases}$$

$\tilde{\Phi}_E \equiv |e|/a \Phi_E$, где $a = \hbar^2 / m_e e^2$ – атомный масштаб длины; e и m_e – заряд и масса электрона; E, E_0 – безразмерные (в атомных единицах) напряженности внешних стационарных электрических поле (E в точке $z = z_0$); λ – безразмерный параметр потенциала. В дальнейшем используем атомные единицы, т. е. все величины кроме a и физических констант считаем безразмерными.

Тогда безразмерные потенциалы Φ и Φ_E внешнего и кулонова полей, очевидно, имеют вид:

$$\Phi = \Phi_E + Z/r; \quad \Phi_L = \Phi_{EL} + Z/r. \quad (1)$$

На кулоновое поле из бесконечности падает моноэнергетический поток электронов. Считая потенциальную энергию взаимодействия электрона с внешним и кулоновым полями возмущением, волновые функции начального (до излучения тормозного фотона) и конечного (после излучения фотона) состояний электрона выбираем в следующем виде:

$$\Psi_{i,f} = \exp i\mathbf{k}_{i,f}\mathbf{r} / \sqrt{V}, \quad (2)$$

где $V = L_x L_y L_z$ – нормировочный объем в виде параллелепипеда с ребрами L_x, L_y, L_z ;

$\mathbf{r}, \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f$ – радиус вектор, волновые векторы электрона, находящегося в начальном и конечном состояниях, соответственно.

Сначала, в качестве промежуточного результата, определим дифференциальное сечение излучения фотона с волновым вектором \mathbf{k}_ϕ , поляризацией \mathbf{e}_ϕ и частотой ω при переходе электрона из состояния с его волновым вектором

$$\mathbf{k}_i = \left(\frac{2\pi n_{ix}}{L_x}, \frac{2\pi n_{iy}}{L_y}, k_{iz} \right)$$

(с их числом $d\nu = \alpha^3 V L_z 2\pi^{-4} \omega^2 d\omega \times \times dO_\phi dk_{fz}$

), который определяется значениями волновых векторов $\mathbf{k}_f = \left(\frac{2\pi n_{fx}}{L_x}, \frac{2\pi n_{fy}}{L_y}, k_{fz} \right)$ и

$$\mathbf{k}_f + d\mathbf{k}_f = \left(\frac{2\pi n_{fx}}{L_x}, \frac{2\pi n_{fy}}{L_y}, k_{fz} + dk_{fz} \right), \quad \text{при-}$$

чем, $n_{ix, iy, fx, fy}$ – целые числа. Для этого воспользуемся хорошо известной формулой Борновского приближения [12]:

$$d\sigma = 2\pi j^{-1} |V_{\phi\bar{i}}|^2 \delta(\varepsilon_f + \omega - \varepsilon_i) dv, \quad (3)$$

где $\varepsilon_f = \mathbf{k}_f^2 / 2$; $\varepsilon_i = \mathbf{k}_i^2 / 2$; $\alpha = e^2 / \hbar c$ – постоянная тонкой структуры; $dO_\phi =$

$$V_{\phi\bar{i}} = -i \sqrt{\frac{2\pi}{\omega V}} \frac{\pi}{\omega L_z} \left\{ \mathbf{e}_\phi^* \mathbf{k} \frac{E}{\lambda} \exp \left[-i q_z + k_{\phi z} z_0 - \frac{|q_z + k_{\phi z}|}{\lambda} \right] \Delta(\mathbf{q}_\perp + \mathbf{k}_{\phi\perp}) + i \frac{4Z \mathbf{e}_\phi^* \mathbf{q} + \mathbf{k}_\phi}{L_x L_y (\mathbf{q} + \mathbf{k}_\phi)^2} \right\}, \quad (6)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i$; $\mathbf{k}_{f\perp}$, $\mathbf{k}_{i\perp}$ – поперечные (относительно \mathbf{E}) составляющие волновых векторов электрона в его начальном и конечном состояниях, соответственно; $\mathbf{k}_{\phi\perp}$ – поперечная составляющая волнового вектора фотона; \mathbf{k} – единичный вектор, направленный вдоль оси z ;

$$\Delta(\mathbf{u}_\perp) = \frac{4}{L_x u_x L_y u_y} \sin \frac{L_y u_y}{2} \sin \frac{L_x u_x}{2}. \quad (7)$$

$$\sum_{\mathbf{e}_\phi} d\sigma = \frac{\alpha^3}{4k_i} L_x L_y \left\{ \frac{E^2}{\lambda^2} \mathbf{n} \mathbf{k}^2 \exp \left(-2 \frac{|q_z|}{\lambda} \right) \Delta(\mathbf{q}_\perp)^2 - \frac{8EZ}{\lambda q^2 L_x L_y} \mathbf{n} \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \mathbf{q} \exp \left(-\frac{|q_z|}{\lambda} \right) \Delta(\mathbf{q}_\perp) \sin q_z z_0 + \right. \\ \left. + 16Z^2 \mathbf{n} \mathbf{q}^2 / L_x L_y q^2 \delta(k_f^2 / 2 + \omega - k_i^2 / 2) dk_{fz} (d\omega / \omega) dO_\phi \right\}, \quad (8)$$

где $\mathbf{q}_\perp = 2\pi n_{fx} - n_{ix} / L_x$, $2\pi n_{fy} - n_{iy} / L_y$; $\mathbf{n} = \mathbf{k}_\phi / k_\phi$.

Теперь, просуммируем выражение (8) по n_{fx} и n_{fy} . Тогда, суммы от первых двух слагаемых в фигурной скобке (8) будут содержать отличные от нуля члены только при $n_{fx} = n_{ix}$ и $n_{fy} = n_{iy}$, т. е. при $\mathbf{q}_\perp = 0$, а сумму,

$= \sin \theta_\phi d\theta_\phi d\phi_\phi$; $j = k_i / V$ – плотность тока вероятности в атомных единицах;

$$V_{\phi\bar{i}} = i \sqrt{\frac{2\pi}{\omega V}} \frac{1}{\omega} \iiint \Psi_f^* \Psi_i \mathbf{e}_\phi^* e^{-i\mathbf{k}_\phi \cdot \mathbf{r}} \nabla U d^3 \mathbf{r}, \quad (4)$$

и, сначала,

$$U = -Z / r - \Phi_E. \quad (5)$$

В последнем выражении мы учли знак заряда электрона.

Подставляя (5) в (4) и интегрируя по координатам, получим:

Из выражений (6) и (3) нетрудно заметить, что если рассматривать излучение фотонов с $k_\phi = \alpha \omega \ll q$, то в (6), можно пренебречь компонентами вектора \mathbf{k}_ϕ . Именно этот случай мы и будем рассматривать.

Подставляя (6) в (3), суммируя по поляризациям фотонов, получим промежуточный результат, который имеет смысл при произвольных L_x, L_y :

содержащую третье слагаемое можно заменить на интеграл по фазовому пространству, но при этом необходимо оставить член с $\mathbf{q}_\perp = 0$, так как при замене суммирования на интегрирование его вклад в интеграл равен нулю. В результате, найдем:

$$\sum_{n_{fy}n_{fx}} \sum_{e_0} d\sigma = \frac{\alpha^3}{4k} L_x L_y \left\{ \frac{E^2}{\lambda^2} \exp\left(-2\frac{|q_z|}{\lambda}\right) - \frac{8EZ}{\lambda q_z L_x L_y} \exp\left(-\frac{|q_z|}{\lambda}\right) \sin q_z z_0 + \frac{16Z^2}{L_x L_y q_z^2} \right\} \times \quad (9)$$

$$\times \mathbf{nk}^2 \delta\left(\frac{k_{fz}^2}{2} + \omega - \frac{k_{iz}^2}{2}\right) dk_{fz} \frac{d\omega}{\omega} dO_\phi + \frac{\alpha^3 Z^2}{\pi^2 k_i} \iint \frac{\mathbf{nq}^2}{q^4} \delta\left(\frac{k_f^2}{2} + \omega - \frac{k_i^2}{2}\right) dk_{fx} dk_{fy} dk_{fz} \frac{d\omega}{\omega} dO_\phi.$$

Интегрируя (9) по k_{fz} и в возникшем тройном интеграле, переходя к сферическим координатам θ_f, φ_f вектора \mathbf{k}_f , нетрудно устранить обе дельта функции. Полученное

выражение интегрируя по $\theta_\phi, \varphi_\phi$, и оставшийся в нем двойной интеграл по θ_f и φ_f , получим сечение $d\sigma_\omega$, отнесенное к элементу частоты $d\omega$:

$$d\sigma_\omega = \frac{2\pi\alpha^3}{3k_i k_{fz}} \left\{ \frac{E^2}{\lambda^2} L_x L_y \left(\exp\left(-2\frac{|k_{fz} + k_{iz}|}{\lambda}\right) + \exp\left(-2\frac{|k_{fz} - k_{iz}|}{\lambda}\right) \right) - \right. \quad (10)$$

$$\left. - \frac{8ZE q_z}{\lambda} \left[\exp\left(-\frac{|k_{fz} + k_{iz}|}{\lambda}\right) \frac{\sin(k_{fz} + k_{iz})z_0}{k_{fz} + k_{iz}} + \exp\left(-\frac{|k_{fz} - k_{iz}|}{\lambda}\right) \frac{\sin(k_{fz} - k_{iz})z_0}{k_{fz} - k_{iz}} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{32Z^2}{L_x L_y} \frac{k_{fz}^2 + k_{iz}^2}{k_{fz}^2 - k_{iz}^2} \right\} \frac{d\omega}{\omega} + \frac{16\alpha^3}{3k_i^2} Z^2 \ln \frac{k_i + \sqrt{k_i^2 - 2\omega}}{k_i - \sqrt{k_i^2 - 2\omega}} \frac{d\omega}{\omega},$$

где $k_{fz} = \sqrt{k_{iz}^2 - 2\omega}$. Напомним, что настоящая теория имеет смысл при отсутствии отражения электронов от потенциального барьера внешнего электрического поля, как в начальном, так и в конечном состояниях. Поэтому формула (10) имеет смысл при $k_{fz}^2/2 > |\Phi_{E,EL}|$.

Последнее слагаемое в (10) совпадает с хорошо известным сечением $d\sigma_{\omega Z}$ тормозного излучения, вызванного рассеянием электрона только на кулоновом центре (см., например, [12]).

Использованный метод, очевидно, применим и для потенциала Φ_L . Проведя соответствующие вычисления, получим:

$$d\sigma_{\omega L} = \frac{8\alpha^3}{3\pi k_i k_{fz}} \left\{ L_x L_y E_0^2 \left[\frac{\sin^2 k_i - k_{fz}}{k_i - k_{fz}} \frac{L + L_1}{2} + \frac{\sin^2 k_i + k_{fz}}{k_i + k_{fz}} \frac{L + L_1}{2} \right] + \right. \quad (11)$$

$$\left. + 2\pi E_0 Z \left[\frac{\cos k_{iz} - k_{fz}}{k_{iz} - k_{fz}} \frac{L}{2} - \frac{\cos k_{iz} - k_{fz}}{k_{iz} - k_{fz}} \frac{L_1}{2} + \frac{\cos k_{iz} + k_{fz}}{k_{iz} + k_{fz}} \frac{L}{2} - \frac{\cos k_{iz} + k_{fz}}{k_{iz} + k_{fz}} \frac{L_1}{2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{4\pi^2 Z^2}{L_x L_y} \frac{k_{iz}^2 - \omega}{\omega^2} \right\} \frac{d\omega}{\omega} + \frac{16\alpha^3}{3k_i^2} Z^2 \ln \frac{k_i + \sqrt{k_i^2 - 2\omega}}{k_i - \sqrt{k_i^2 - 2\omega}} \frac{d\omega}{\omega}.$$

Из полученных формул (10) и (11) следует, что вклад в сечения дают четыре входящие в них слагаемые (первые три в фигурной скобке). Первое слагаемое соответствует тормозному излучению, вызванному движением электронов во внешнем электрическом

поле; третье и четвертое слагаемые – рассеянию на кулоновом центре. Второе слагаемое определяется суперпозицией движений излучающих электронов в кулоновом и внешнем полях.

Анализ результатов

Для анализа выражений (10) и (11), построим с помощью математических пакетов графики функций $F_Z = d\sigma_{\omega Z} / d\omega$, $F = d\sigma_{\omega} / d\omega$ (см. рис. 1) и функции $F_L = d\sigma_{\omega L} / d\omega$ (см. рис. 2),

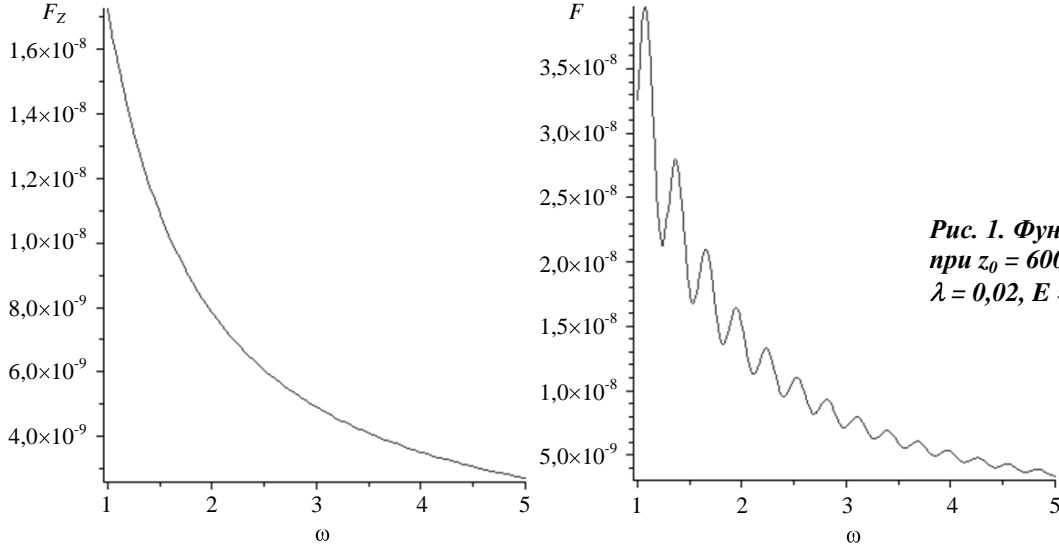


Рис. 1. Функций $F_Z(\omega)$ и $F(\omega)$ при $z_0 = 600$, $k_i = 30$, $k_{iz} = 27,72$, $\lambda = 0,02$, $E = 0,01$.

Сравнивая построенные графики, трудно заметить, что появление внешнего стационарного электрического поля может приводить к заметному изменению сечения тормозного излучения электрона при его рассеянии на одном кулоновом центре (по сравнению с рассеянием на изолированном ионе), находящимся в таком поле – появление в функциях F и F_L осциллирующих слагаемых с амплитудами сравнимыми с наибольшим ее значением на рассматриваемом интервале частоты, и заметному увеличению F и F_L . Выражения (9), (10) и (11), а также промежуточные формулы, которые мы здесь не приводим, содержат параметр нормировочного объема $L_x L_y$.

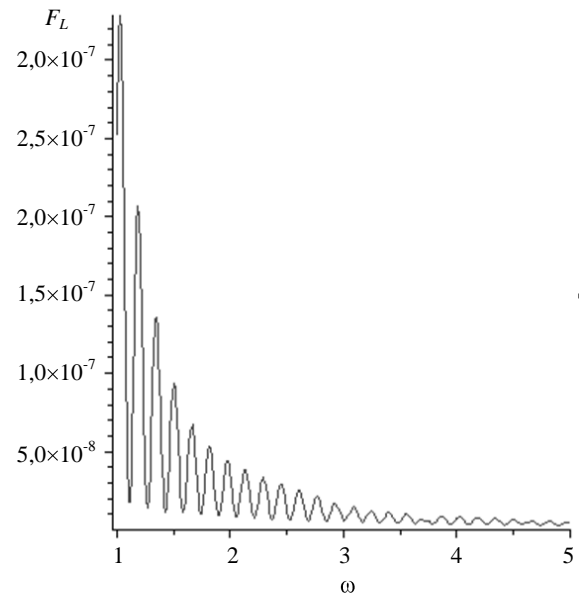


Рис. 2. Функция $F_L(\omega)$ при $k_i = 30$, $k_{iz} = 27,72$, $E_0 = 0,01$, $L_x = 100$, $L_y = 1000$.

Появление этой величины в первом слагаемом физически очевидно. Действительно, $L_x L_y$ – площадь сечения пространства, в любой точке которого может оказаться излучающий электрон из однородного пучка частиц, определяемого волновой функцией (2). Обычно, нормировочный объем считается физически бесконечно большим, но, как уже отмечалось, проведенные здесь вычисления имеют смысл для произвольных L_x и L_y ,

значения которых должны определяться конкретной задачей. Так, при рассмотрении тормозного излучения электрона на атомном ядре, находящемся во внешнем электрическом поле, значения L_x и L_y можно выбрать равными единице. Если применять (10), (11) к плазме, ионизованному газу, когда ионы находятся по отношению друг к другу на достаточно большом расстоянии по сравнению с a (в обычных единицах), тогда $a^2 L_x L_y \approx n_i^{-2/3}$, где n_i – концентрация ионов. Наконец L_x и L_y можно рассматривать как подгоночные параметры.

Заключение

Из полученных результатов следует, что при рассеянии электронов на одном находящемся во внешнем электрическом поле кулоновом центре, можно ожидать вклада в сечение суперпозиции движений электронов в кулоновом и внешнем полях, что является чисто квантовым эффектом. Полученные результаты могут быть использованы при диагностики процессов проходящих при столкновении заряженных частиц во внешнем квазистационарном электрическом поле. Выбранные здесь потенциалы $\Phi_{E,EL}$ позволяют (в более сложной теории) учесть и отражение электронов от потенциального барьера внеш-

него поля, но это уже тема другой работы.

Работа поддержана грантом 21с/2019
Министерства образования и науки
Хабаровского края.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов В. И. // Прикладная физика. 2007. № 1. С. 28.
2. Крылов В. И., Бондарева Т. В. // Прикладная физика. 2010. № 3. С. 5.
3. Крылов В. И., Бондарева Т. В. // Прикладная физика. 2010. № 5. С. 19.
4. Бондарева Т. В., Крылов В. И. // Прикладная физика. 2011. № 4. С. 52.
5. Крылов В. И., Хомяков В. В. // Прикладная физика. 2014. № 2. С. 13.
6. Крылов В. И., Хомяков В. В. // Успехи прикладной физики. 2014. Т. 2. № 2. С. 101.
7. Крылов В. И., Хомяков В. В. // Прикладная физика. 2014. № 5. С. 29.
8. Крылов В. И., Хомяков В. В. // Успехи прикладной физики. 2015. Т. 3. № 1. С. 8.
9. Крылов В. И., Хомяков В. В. // Прикладная физика. 2015. № 1. С. 18.
10. Krylov V. I., Khomyakov V. V. // Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering 2019. С. 1102407.
11. Крылов В. И. // Бюллетень научных сообщений ДВГУПС. 2018. № 23. С. 78.
12. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. – М.: Наука, 1989.

PACS: 79.20.Rf

Bremsstrahlung of electrons scattered by a Coulomb center located in an external inhomogeneous electric field

V. I. Krylov¹ and I. N. Egorshin²

¹ Far Eastern State Transport University
47 Serysheva st., Khabarovsk, 680021, Russia
E-mail: krylov_vladimir@mail.ru

² Pacific National University
136 Tikhooskanskaya st., Khabarovsk, 680035, Russia
E-mail: ikarrus@mail.ru

Received February 11, 2020

Cross-sections of bremsstrahlung attributed to the frequency element of the emitted photon are obtained for electron scattering at one Coulomb center located in a stationary electric field much smaller than the atomic field. The cross sections found take into account the effect of the superposition of the motion of radiating particles in the Coulomb and external electric fields. It is shown that under certain conditions the appearance of an external electric field can lead to a noticeable change in the dependence of the cross section on frequency compared with the case of the bremsstrahlung cross section caused by electron scattering at an isolated Coulomb center.

Keywords: bremsstrahlung, differential cross sections, external stationary field, Coulomb scattering center.

REFERENCES

1. V. I. Krylov, Prikl. Fiz., No. 1, 28 (2007).
2. V. I. Krylov and T. V. Bondareva, Prikl. Fiz., No. 3, 5 (2010).
3. V. I. Krylov and T. V. Bondareva, Prikl. Fiz., No. 5, 19 (2010).
4. T. V. Bondareva and V. I. Krylov, Prikl. Fiz., No. 4, 52 (2011).
5. V. I. Krylov and V. V. Khomyakov, Prikl. Fiz., No. 2, 13 (2014).
6. V. I. Krylov and V. V. Khomyakov, Usp. Prikl. Fiz. **2** (2), 101 (2014).
7. V. I. Krylov and V. V. Khomyakov, Prikl. Fiz., No. 5, 29 (2014).
8. V. I. Krylov and V. V. Khomyakov, Usp. Prikl. Fiz. **3** (1), 8 (2015).
9. V. I. Krylov and V. V. Khomyakov, Prikl. Fiz., No. 1, 18 (2015).
10. V. I. Krylov and V. V. Khomyakov, Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering, 1102407 (2019).
11. V. I. Krylov, Biulleten' nauchnykh soobshchenij DVGUPS, No. 23, 78 (2018).
12. V. B. Berestetskij, E. M. Lifshic, and E. M. Pitaevskij, *Kvantovaya ehlektrodinamika*. (Nauka, Moscow, 1989).