

УДК 535.016

PACS: 42.79.-e, 77.55.+f, 78.20.-e

Расчет однослойных диэлектрических покрытий для просветления в заданном интервале углов падения

И. Л. Шульман, Я. Э. Садовникова, А. Н. Кобыш, А. Ю. Рогов

Сформулирована задача просветления однослойной магнитодиэлектрической системы при прохождении через нее плоской электромагнитной волны в интервале углов падения и получены необходимые и достаточные условия существования решений этой задачи.

Ключевые слова: просветление, оптика, оптические покрытия.

DOI: 10.51368/1996-0948-2021-6-5-13

Введение

Одной из важнейших практических задач в оптике является задача просветления, т. е. уменьшения энергетических потерь, вызванных отражением при переходе волны из одной среды в другую.

В теории фильтров имеются две важные задачи – это анализ и синтез. Вторая задача – синтез, является более сложной и более важной для практики. Она состоит в нахождении параметров многослойной системы, обеспечивающих достижение заданных оптических характеристик этой системы. Задача синтеза формулируется в виде задачи оптимизации некоторой нелинейной функции, определяемой множеством допустимых значений параметров многослойной системы.

Достаточно удобным подходом к решению задач распространения электромагнитных волн для многослойных систем является матричный метод [1, 2]. Идея этого метода заключается в том, что вводится вектор, ком-

понентами которого являются амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей. Тогда связь компонент этого вектора, например, на соседних границах многослойной системы может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} E_{j-1} \\ H_{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^j & m_{12}^j \\ m_{21}^j & m_{22}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_j \\ H_j \end{pmatrix} = M_j \begin{pmatrix} E_j \\ H_j \end{pmatrix}$$

где M_j – характеристическая матрица или матрица интерференции j -го слоя.

Несколько другой матричный метод был представлен, например, в работе [3]. В нем вводится вектор, компонентами которого являются напряженность электрического поля в падающей и отраженной волнах. В этой же работе приводятся формулировки нескольких задач просветления, однако во всех этих задачах, электромагнитная волна падает на систему слоев нормально.

В представленной работе будет сформулирована и решена задача просветления при падении плоской монохроматической электромагнитной волны на однослойную систему и будут найдены условия, необходимые и достаточные для существования решений этой задачи. Кроме того, будут получены соотношения, позволяющие определить толщину слоя.

Рассматриваемая модель

Имеется магнитодиэлектрическая система (МДС) N -плоскопараллельных слоев с за-

Шульман Илья Леонидович, доцент, к.т.н.

E-mail: shulman@mirea.ru

Садовникова Яна Эдуардовна, ст. преподаватель.

Кобыш Алина Николаевна, доцент, к.т.н.

Рогов Александр Юрьевич, ст. преподаватель.

МИРЭА – Российский технологический университет.
Россия, 119454, Москва, проспект Вернадского, 78.

Статья поступила в редакцию 21 сентября 2021 г.

© Шульман И. Л., Садовникова Я. Э., Кобыш А. Н., Рогов А. Ю., 2021

данными физическими параметрами: h_j – толщина j -го слоя, $\varepsilon_j > 0$ и $\mu_j > 0$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости j -го слоя соответственно ($j = 1, 2, \dots, N$). Слева и справа от этой системы слоев имеются два полубесконечных пространства (далее полупространства \mathbb{R}_-^3 и \mathbb{R}_+^3 соответственно) с физическими параметрами $\varepsilon_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$ (для левого полупространства) и $\varepsilon_{N+1} > 0$ и $\mu_{N+1} > 0$ (для правого полупространства). Каждый слой системы и оба полупространства

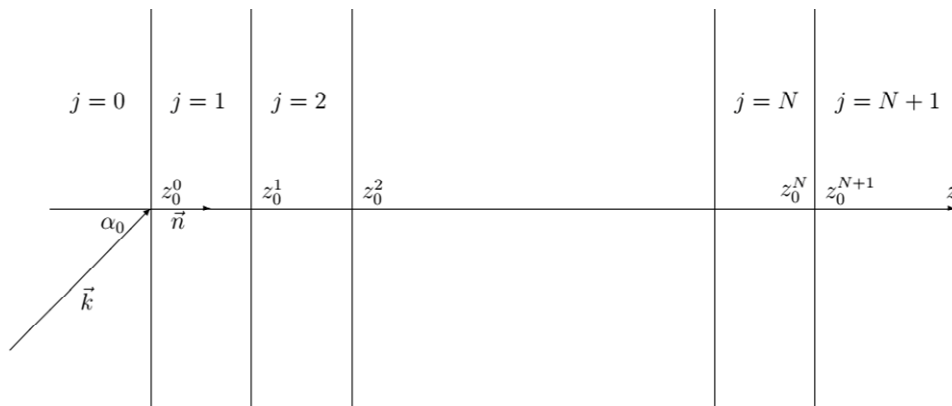


Рисунок. Модель магнитодиэлектрической системы слоев.

Угол падения равен γ . Известны амплитуды напряженности электрического поля волны, прошедшей через МДС и волны, «отраженной от $+\infty$ » на правой границе МДС.

В этой работе рассматривается падение ТЕ-волны (s -поляризация) на МДС. В такой волне векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} имеют компоненты: $\vec{E} = (0, E_y, 0)$, $\vec{H} = (H_x, 0, H_z)$, где $E_y(\vec{r}, t) = E_y(\vec{r}) \exp\{-i\omega t\}$, $H_x(\vec{r}, t) = H_x(\vec{r}) \exp\{-i\omega t\}$, $H_z(\vec{r}, t) = H_z(\vec{r}) \exp\{-i\omega t\}$.

Поскольку по условию поставленной задачи все среды однородны и изотропны, а точки проводимости \vec{j} и свободные заряды ρ отсутствуют, то уравнения Максвелла для каждого слоя будут иметь вид:

$$\operatorname{div} \vec{E}^j = 0, \operatorname{div} \vec{H}^j = 0, \operatorname{rot} \vec{E}^j = -\frac{\mu_j}{c} \frac{\partial \vec{H}^j}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}^j = \frac{\varepsilon_j}{c} \frac{\partial \vec{E}^j}{\partial t}$$

где j – номер слоя ($j = 0, 1, \dots, N+1$).

В дальнейшем вместо ω/c будет использоваться обозначение ω . Введем обозначения:

являются однородными и изотропными средами. Во всех средах, а также на их границах раздела отсутствуют свободные заряды и токи проводимости.

Из левого полупространства на систему слоев падает плоская однородная монохроматическая электромагнитная волна (см. рисунок), в которой колебания напряженности электрического поля совершаются по гармоническому закону:

$$E \sim \exp\{-i\omega t\}$$

$$t_j \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\varepsilon_j \mu_j} (z - z_0^j) \cos \gamma_j \quad p_j \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}}$$

$$\tau_j \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\varepsilon_j \mu_j} (x - x_0^j) \sin \gamma_j.$$

Решение приведенных уравнений Максвелла в рассматриваемом случае ТЕ-волны удобно представить в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} E_y^j \\ H_x^j \\ H_z^j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ c_0^j \begin{pmatrix} -p_j \cos \gamma_j \\ p_j \sin \gamma_j \end{pmatrix} e^{i\omega t_j} + \\ + c_1^j \begin{pmatrix} 1 \\ p_j \cos \gamma_j \\ p_j \sin \gamma_j \end{pmatrix} e^{-i\omega t_j} \end{bmatrix} e^{i\omega \tau_j} \quad (1)$$

где c_0 и c_1 – амплитуды падающей и отраженной волн, γ – угол между направлением распространения волны и положительным направлением оси Oz .

Обозначим $\vec{c}_j = \begin{pmatrix} c_0^j \\ c_1^j \end{pmatrix}$. Тогда из граничных условий для компонент E_y и H_x можно

получить основное рекуррентное соотношение $\overleftarrow{c}_j = T_{j+1} \overleftarrow{c}_{j+1}$, где T_j – матрица передачи j -го слоя. Прямое вычисление приводит к следующему выражению для матрицы передачи j -го слоя:

$$T_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\theta_j)e^{-i\omega v_j} & \frac{1}{2}(1-\theta_j)e^{i\omega v_j} \\ \frac{1}{2}(1-\theta_j)e^{-i\omega v_j} & \frac{1}{2}(1+\theta_j)e^{i\omega v_j} \end{pmatrix} \quad (2)$$

где $\theta_j = \frac{p_j \cos \gamma_j}{p_{j-1} \cos \gamma_{j-1}}$, $v_j = n_j h_j \cos \gamma_j$, h_j – толщина j -го слоя.

Основное соотношение, связывающее амплитуды падающей и отраженной волн в левом полупространстве с амплитудами падающей (отраженной от бесконечности) и прошедшей волн в правом полупространстве:

$$\overleftarrow{c}_0 = T \overleftarrow{c}_{N+1} \quad (3)$$

где $T = \begin{pmatrix} \tau_{00} & \tau_{01} \\ \tau_{10} & \tau_{11} \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^{N+1} T_j$, $\overleftarrow{c}_0 = \begin{pmatrix} c_0^0 \\ c_1^0 \end{pmatrix}$,
 $\overrightarrow{c}_{N+1} = \begin{pmatrix} c_0^{N+1} \\ c_1^{N+1} \end{pmatrix}$.

Определим энергетический коэффициент отражения R в соответствии с формулой:

$$R = \frac{|c_1^0|^2}{|c_0^0|^2} = \frac{F}{|c_0^0|^2} \quad (4)$$

где $F = |c_1^0|^2$ – профилирующая функция. Используя выражение (2) и тот факт, что матрица передачи МДС находится как произведение матриц передачи слоев, несложно показать [3], что для однослойной системы:

$$F = \alpha_0^2 \cos^2 t + \alpha_1^2 \sin^2 t = \alpha_0^2 + (\alpha_1^2 - \alpha_0^2) \sin^2 t \quad (5)$$

где $\alpha_0^2 = \frac{1}{4}(1-\theta)^2$, $\alpha_1^2 = \frac{1}{4}(\theta_2 - \theta_1)^2$, $\theta_1 \theta_2 = \theta = \det T$, $t = \omega n_1 h \cos \gamma$, h – толщина слоя. Обозначим R_F – коэффициент отражения Френеля, т. е. коэффициент отражения при отсутствии МДС – от границы между полупространствами \mathbb{R}_-^3 и \mathbb{R}_+^3 .

$$R_F = \frac{|c_1^0|^2}{|c_0^0|^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}(1-\theta)\right)^2}{|c_0^0|^2} = \frac{\alpha_0^2}{|c_0^0|^2}. \quad (6)$$

Постановка задачи просветления. При фиксированных частоте ω , показателе преломления n_1 и фиксированном интервале углов падения $[\Gamma_1, \Gamma_2]$ для однослойной МДС подобрать параметры p_1 и h таким, чтобы минимизировать по p_1 и h максимальное значение энергетического коэффициента отражения на этой частоте для всех углов падения из заданного промежутка:

$$\max_{[\Gamma_1, \Gamma_2]} R(p_1, h, n_1, \omega, \gamma) \rightarrow \min_{p_1, h}$$

и при этом, чтобы выполнялось неравенство:

$$R(p_1, h, n_1, \omega, \gamma) < R_F(\gamma); \quad \forall \gamma \in [\Gamma_1, \Gamma_2].$$

Определение. Окном просветления (T_1, T_2) будем называть интервал значений t (см. (5)) такой, что $F(t) < \alpha_0^2 \forall t \in (T_1, T_2)$.

Неравенство $R(p_1, h, n_1, \omega, \gamma) < R_F(\gamma); \forall \gamma \in [\Gamma_1, \Gamma_2]$, являющееся необходимым условием просветления, с учетом выражений (4)–(6) можно записать в виде

$$\alpha_1^2(\gamma) < \alpha_0^2(\gamma); \quad \forall \gamma \in [\Gamma_1, \Gamma_2]. \quad (7)$$

В случае, если $R_F(\gamma_0^1) = 0$ просветление, очевидно, невозможно. Угол падения, при котором френелевское отражение отсутствует, находится из уравнения $\alpha_0^2(\gamma_0^1) = 0$:

$$\sin \gamma_0^1 = \frac{n_2}{n_0} \sqrt{\frac{(p_2/p_0)^2 - 1}{(p_2/p_0)^2 - (n_2/n_0)^2}}. \quad (8)$$

Поскольку минимальное и максимальное значения профилирующей функции при $N = 1$ определяется величинами θ и θ_1 ($\theta_2 = \theta/\theta_1$), то найдем зависимость этих величин от угла падения γ :

$$\theta(\gamma) = \frac{p_2 \cos \gamma_2}{p_0 \cos \gamma} = \frac{p_2}{p_0} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \gamma \left(1 - \left(\frac{n_0}{n_2} \right)^2 \right) + 1}. \quad (9)$$

Аналогично находим:

$$\theta_1(\gamma) = \frac{p_1 \cos \gamma_1}{p_0 \cos \gamma} = \frac{p_1}{p_0} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \gamma \left(1 - \left(\frac{n_0}{n_1} \right)^2 \right)} + 1. \quad (10)$$

Параметр $\alpha_0^2(\theta) = \frac{1}{4}(1-\theta)^2$ имеет два участка монотонности: $0 < \theta < 1$, где он убывает и $\theta > 1$, где возрастает.

Как видно из явного представления (9) величины θ , она зависит только от параметров p_0, n_0 и p_2, n_2 левого и правого полупространств \mathbb{R}_-^3 и \mathbb{R}_+^3 , а также от угла падения γ . Найдем такие значения параметра p_1 слоя МДС, чтобы выполнялось необходимое условие просветления (7).

Выбор параметра p_1 слоя МДС

Здесь необходимо рассмотреть два возможных случая:

1. Значение угла $\gamma_0^1 : \alpha_0^2(\gamma_0^1) = 0$ не попадает в интервал $[\Gamma_1, \Gamma_2]$. Вследствие монотонности и непрерывности на участке $[\Gamma_1, \Gamma_2]$ ($0 \leq \Gamma_1 < \Gamma_2 < \pi/2$) функции $\theta(\gamma)$, она принимает наибольшее и наименьшее значения на концах этого промежутка, и все значения между ними достигаются во внутренних точках. При сделанном предположении ($\gamma_0^1 \notin [\Gamma_1, \Gamma_2]$) $\theta(\gamma) \neq 1$ ни в одной точке этого промежутка. Вследствие же монотонного убывания $\alpha_0^2(\theta)$ при $\theta \in (0, 1)$ и монотонного возрастания при $\theta > 1$, оба значения $\alpha_0^2(\theta(\Gamma_1))$ и $\alpha_0^2(\theta(\Gamma_2))$ лежат по одну сторону от прямой $\theta = 1$: либо слева ($\theta(\Gamma_1) < 1$, $\theta(\Gamma_2) < 1$) либо справа ($\theta(\Gamma_1) > 1$, $\theta(\Gamma_2) > 1$).

2. $\gamma_0^1 \in [\Gamma_1, \Gamma_2]$. В этом случае значения $\theta(\Gamma_1)$ и $\theta(\Gamma_2)$ лежат по разные стороны от прямой $\theta = 1$.

Случай 1. $\gamma_0^1 : \alpha_0^2(\gamma_0^1) = 0$, $\gamma_0^1 \notin [\Gamma_1, \Gamma_2]$.

В силу монотонности $\theta(\gamma)$ оба значения

$\theta(\Gamma_1)$ и $\theta(\Gamma_2)$ или меньше 1, или больше 1.

Выполнение равенства:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2(\theta_1, \theta) &= \frac{1}{4} \left(\theta_1 - \frac{\theta}{\theta_1} \right)^2 = \alpha_0^2(\theta) = \\ &= \frac{1}{4} (1-\theta)^2 \Leftrightarrow \left| \theta_1 - \frac{\theta}{\theta_1} \right| = |1-\theta| \end{aligned}$$

возможно только при $\theta_1 = \pm 1$ или $\theta_1 = \pm \theta$. Поскольку $\theta_1 > 0$, то отрицательные значения рассматриваться не будут. Определим, в каком случае $\alpha_1^2(\theta_1, \theta) = 0$. Это равенство выполняется при $\theta_1 = \sqrt{\theta}$. Учитывая, что $\alpha_1^2(\theta_1) \geq 0$ имеем: при $\theta_1 < \sqrt{\theta}$ $\alpha_1^2(\theta_1)$ строго монотонно убывает, а при $\theta_1 > \sqrt{\theta}$ – строго монотонно возрастает. Если $\theta < 1$, то $\theta < \sqrt{\theta} < 1$, а если $\theta > 1$ то $1 < \sqrt{\theta} < \theta$. В обоих этих случаях $\alpha_1^2(\theta_1)$ внутри указанных интервалов достигает нуля, неотрицательна и имеет два участка монотонности. Максимальное значение $\alpha_1^2(\theta_1)$, равное α_0^2 достигается на границе этого множества. Таким образом, при каждом фиксированном значении θ необходимое условие просветления 7 может выполняться только в интервале $(\theta, 1)$ если $\theta < 1$ или в интервале $(1, \theta)$, если $\theta > 1$.

1. Если $\theta(\Gamma_1) < 1$, $\theta(\Gamma_2) < 1$. В этом случае $\theta_1 \in (\theta, 1)$ для каждого значения угла падения $\gamma_0 \in [\Gamma_1, \Gamma_2]$. Тогда необходимо, чтобы $\theta(\gamma) < \theta_1(\gamma) < 1 \forall \gamma \in [\Gamma_1, \Gamma_2]$.

Найдем такие значения параметра p_1 слоя МДС, чтобы выполнялось это двойное неравенство.

$$\begin{aligned} &\frac{p_2}{p_0} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \gamma \left(1 - \left(\frac{n_0}{n_2} \right)^2 \right)} + 1 < \\ &< \frac{p_1}{p_0} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \gamma \left(1 - \left(\frac{n_0}{n_1} \right)^2 \right)} + 1 < 1 \quad \forall \gamma \in [\Gamma_1, \Gamma_2]. \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим для краткости

$$\chi(\gamma) = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \gamma \left(1 - \left(\frac{n_0}{n_1} \right)^2 \right) + 1}. \quad (12)$$

Тогда неравенство (11) для параметра p_1 можно записать в виде:

$$p_0 \frac{\theta(\gamma)}{\chi(\gamma)} < p_1 < \frac{p_0}{\chi(\gamma)} \quad \forall \gamma \in [\Gamma_1, \Gamma_2] \quad (13)$$

или

$$p_0 \max \left(\frac{\theta(\gamma)}{\chi(\gamma)} \right) < p_1 < \frac{p_0}{\max \chi(\gamma)} \quad (13a)$$

где максимум ищется по всем значениям $\gamma \in [\Gamma_1, \Gamma_2]$. Из определения функции $\chi(\gamma)$ (формула (12)) видно, что она монотонно возрастает при $n_1 > n_0$ и убывает при $n_1 < n_0$, а потому

$$\max_{\gamma \in [\Gamma_1, \Gamma_2]} \chi(\gamma) = \max \{ \chi(\Gamma_1), \chi(\Gamma_2) \}.$$

2. Если $\theta(\Gamma_1) > 1$, $\theta(\Gamma_2) > 1$. В этом случае $\theta_1 \in (1, \theta)$ для каждого значения угла падения $\gamma \in [\Gamma_1, \Gamma_2]$. Тогда необходимо, чтобы $1 < \theta_1(\gamma) < \theta(\gamma) \forall \gamma \in [\Gamma_1, \Gamma_2]$, или

$$\frac{p_0}{\chi(\gamma)} < p_1 < p_0 \frac{\theta(\gamma)}{\chi(\gamma)} \quad \forall \gamma \in [\Gamma_1, \Gamma_2] \quad (14)$$

или

$$\frac{p_0}{\min \chi(\gamma)} < p_1 < p_0 \min \left(\frac{\theta(\gamma)}{\chi(\gamma)} \right). \quad (14a)$$

Поведение функции $\frac{\theta(\gamma)}{\chi(\gamma)}$ на промежутке $[\Gamma_1, \Gamma_2]$

Введем обозначения:

$$G = G(\gamma) = \frac{\theta(\gamma)}{\chi(\gamma)}; \quad a = 1 - \left(\frac{n_0}{n_2} \right)^2; \quad b = 1 - \left(\frac{n_0}{n_1} \right)^2;$$

$$x = x(\gamma) = \operatorname{tg}^2 \gamma.$$

Тогда, учитывая эти обозначения, а также формулы (9) и (12):

$$g = g(x) = p_2 \frac{\sqrt{ax+1}}{\sqrt{bx+1}}$$

$$g'_\gamma = \frac{p_2}{bx+1} \left(\frac{a\sqrt{bx+1}}{\sqrt{ax+1}} - \frac{b\sqrt{ax+1}}{\sqrt{bx+1}} \right) x'$$

$$g'_\gamma = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a\sqrt{bx+1}}{\sqrt{ax+1}} - \frac{b\sqrt{ax+1}}{\sqrt{bx+1}} = 0 \\ x' = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ \gamma = 0 \text{ м.к. } \gamma \in [\Gamma_1, \Gamma_2], 0 \leq \Gamma_1 < \Gamma_2 < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Случай $a = b$ возможен только при $n_1 = n_2$, но тогда $G(\gamma) = p_2 \forall \gamma \in [\Gamma_1, \Gamma_2]$, что не представляет интереса. Таким образом, функция $F = \frac{\theta(\gamma)}{\chi(\gamma)}$ не может достигать наибольшего или наименьшего значений во внутренних точках $[\Gamma_1, \Gamma_2]$, т. е. является монотонной.

Производная $x' = \operatorname{tg} \gamma \frac{1}{\cos^2 \gamma} > 0 \forall \gamma \in (0, \Gamma_2]$, $\Gamma_2 < \frac{\pi}{2}$, поэтому возрастание и убывание функции G определяется только знаком выражения $\frac{a\sqrt{bx+1}}{\sqrt{ax+1}} - \frac{b\sqrt{ax+1}}{\sqrt{bx+1}}$.

Производная $x' = \operatorname{tg} \gamma \frac{1}{\cos^2 \gamma} > 0 \forall \gamma \in (0, \Gamma_2]$, $\Gamma_2 < \frac{\pi}{2}$, поэтому возрастание и убывание функции G определяется только знаком выражения $\frac{a\sqrt{bx+1}}{\sqrt{ax+1}} - \frac{b\sqrt{ax+1}}{\sqrt{bx+1}}$.

Производная $x' = \operatorname{tg} \gamma \frac{1}{\cos^2 \gamma} > 0 \forall \gamma \in (0, \Gamma_2]$, $\Gamma_2 < \frac{\pi}{2}$, поэтому возрастание и убывание функции G определяется только знаком выражения $\frac{a\sqrt{bx+1}}{\sqrt{ax+1}} - \frac{b\sqrt{ax+1}}{\sqrt{bx+1}}$.

$$g'_\gamma > 0 \Rightarrow \frac{a\sqrt{bx+1}}{\sqrt{ax+1}} - \frac{b\sqrt{ax+1}}{\sqrt{bx+1}} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{bx+1}{ax+1} > \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} < 1.$$

Рассмотрев четыре возможных случая ($a > 0 \Leftrightarrow n_0 < n_2; b > 0 \Leftrightarrow n_0 < n_1$ и обратные им неравенства), можно получить, что функция g монотонно возрастает, если $n_0 < n_1 < n_2$ или $n_2 < n_1 < n_0$, или $n_1 < n_0 < n_2$, или $n_2 < n_0 < n_1$. Более коротко скажем, что g монотонно возрастает, если промежуточное значение принимает n_0 или n_1 . Кроме этого, g монотонно возрастает, если $n_2 > n_1 = n_0$ или $n_0 = n_2 > n_1$.

Во всех этих случаях $\max\left(\frac{\theta(\gamma)}{\chi(\gamma)}\right) = \frac{\theta(\Gamma_2)}{\chi(\Gamma_2)}$,

$$\min\left(\frac{\theta(\gamma)}{\chi(\gamma)}\right) = \frac{\theta(\Gamma_1)}{\chi(\Gamma_1)}.$$

Аналогичное рассмотрение позволяет сделать вывод, что g монотонно убывает, если промежуточно значение принимает n_2 , или $n_2 < n_1 = n_0$, или $n_0 = n_2 < n_1$. В этих случаях

$$\max\left(\frac{\theta(\gamma)}{\chi(\gamma)}\right) = \frac{\theta(\Gamma_1)}{\chi(\Gamma_1)}, \quad \min\left(\frac{\theta(\gamma)}{\chi(\gamma)}\right) = \frac{\theta(\Gamma_2)}{\chi(\Gamma_2)}.$$

Таким образом, для выполнения необходимого условия просветления (7) необходимо и достаточно, чтобы параметр p_1 удовлетворял одному из неравенств:

$$p_0 \max\left\{\frac{\theta(\Gamma_1)}{\chi(\Gamma_1)}, \frac{\theta(\Gamma_2)}{\chi(\Gamma_2)}\right\} < p_1 < \frac{p_0}{\max\{\chi(\Gamma_1), \chi(\Gamma_2)\}}, \quad (15)$$

если $\theta(\Gamma_1) < 1, \theta(\Gamma_2) < 1$

или

$$\frac{p_0}{\min\{\chi(\Gamma_1), \chi(\Gamma_2)\}} < p_1 < p_0 \min\left\{\frac{\theta(\Gamma_1)}{\chi(\Gamma_1)}, \frac{\theta(\Gamma_2)}{\chi(\Gamma_2)}\right\}, \quad (16)$$

если $\theta(\Gamma_1) > 1, \theta(\Gamma_2) > 1$.

Если же $(\theta(\Gamma_1) - 1)(\theta(\Gamma_2) - 1) < 0$, то никаким выбором параметра p_1 нельзя добиться выполнения необходимого условия просветления (7), поскольку в заданном промежутке углов падения есть такой (определяемый из выражения (8)), при котором правая часть неравенства (7) обращается в нуль (отсутствует френелевское отражение, $R_F = 0$).

Оптические материалы

Одним из важных практических случаев является случай, когда $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1, \varepsilon_2 > \varepsilon_0$. Тогда

$$p_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}} = \sqrt{\varepsilon_i \mu_i} = n_i, \quad i = 0, 1, 2; \quad n_2 > n_0 \quad (17)$$

Т. е. параметр p_1 , обратный импедансу слоя, совпадает с его показателем преломления n_1 .

В этом случае

$$\theta(\gamma) = \frac{n_2}{n_0} \sqrt{\text{tg}^2 \gamma \left(1 - \left(\frac{n_0}{n_2}\right)^2\right) + 1} > 1.$$

Найдем условия, которым должен удовлетворять показатель преломления n_1 слоя, для того чтобы выполнялось необходимое условие просветления. Поскольку $\theta(\gamma) > 1$, то необходимо, чтобы выполнялось неравенство (14), или, учитывая сделанные предположения (17), а также выражения (9) и (12) для $\theta(\gamma)$ и $\chi(\gamma)$ соответственно:

$$\frac{n_0}{\sqrt{\text{tg}^2 \gamma \left(1 - \left(\frac{n_0}{n_1}\right)^2\right) + 1}} < n_1 < n_2 \frac{\sqrt{\text{tg}^2 \gamma \left(1 - \left(\frac{n_0}{n_2}\right)^2\right) + 1}}{\sqrt{\text{tg}^2 \gamma \left(1 - \left(\frac{n_0}{n_1}\right)^2\right) + 1}} \quad \forall \gamma \in [\Gamma_1, \Gamma_2].$$

Решая это двойное неравенство относительно n_1 , получаем, что

$$n_0 \sqrt{2} \cos \Gamma_1 < n_1 < n_0 \sqrt{\frac{n_2^2}{n_0^2} - 1 + 2 \cos^2 \Gamma_2}. \quad (18)$$

Такие значения показателя преломления существуют, если

$$n_0 \sqrt{2} \cos \Gamma_1 < n_0 \sqrt{\frac{n_2^2}{n_0^2} - 1 + 2 \cos^2 \Gamma_2} \Rightarrow \frac{n_2^2}{n_0^2} > 2(\cos^2 \Gamma_1 - \cos^2 \Gamma_2) + 1. \quad (19)$$

Условие (19) позволяет определить, возможно ли, в принципе, подобрать материал

слоя таким, что при заданных значениях показателей преломления n_0 и n_2 (среды и подложки соответственно) выполнялось необходимое условие просветления сразу для всех углов падения волны из промежутка $[\Gamma_1, \Gamma_2]$.

Выбор толщины слоя

Наименьшее значение профилирующей функции (5) есть α_1^2 , однако для различных углов падения это значение различно. Для минимизации наибольшего значения энергетического коэффициента отражения воспользуемся методом подвижного отрезка, подробное изложение которого приведено в работе [3]. Профилирующая функция, как функция переменной t , является периодической, с периодом равным π . Поскольку $t = \omega n_1 h \cos \gamma$, то при каждом фиксированном угле падения $\gamma \in [\Gamma_1, \Gamma_2]$ профилирующая функция, как функция толщины слоя, достигает своего наибольшего и наименьшего значений ($\alpha_0^2(\gamma)$ и $\alpha_1^2(\gamma)$ соответственно). Если толщина слоя будет слишком большой, то может оказаться, что $T_1 = \omega n_1 h \cos \Gamma_2$ и $T_2 = \omega n_1 h \cos \Gamma_1$ будут удовлетворять неравенству:

$$T_2 - T_1 > \pi.$$

В силу непрерывности профилирующей функции по переменной γ , найдется такое значение угла падения γ , что при выбранной толщине слоя:

$$F(\gamma) = \alpha_0^2 + (\alpha_1^2 - \alpha_0^2) \sin^2 t(\gamma) = \alpha_0^2(\gamma).$$

Тогда при такой толщине слоя для этого угла падения не будет выполняться необходимое условие просветления $\alpha_1^2(\gamma) < \alpha_0^2(\gamma)$. Выберем толщину так, чтобы T_1 и T_2 удовлетворяли неравенству $T_2 - T_1 < \pi$ и, кроме того, потребуем, чтобы $t \neq \pi m \forall \gamma \in [\Gamma_1, \Gamma_2], m \in \mathbb{Z}$. Тогда все значения t будут принадлежать одному и тому же окну просветления. Из-за периодичности профилирующей функции, окон просветления может быть бесконечно много.

$F(t)$ имеет в k -м окне просветления минимум при $t_k = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \geq 0$. тогда условие $F(T_1^k) = F(T_2^k)$ выполняется если:

$$T_1^k = \omega n_1 h_k \cos \Gamma_2 = \frac{\pi}{2}(2k+1) - \Delta t,$$

$$T_2^k = \omega n_1 h_k \cos \Gamma_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1) + \Delta t, \quad \Delta t < \frac{\pi}{2}$$

где последнее неравенство является необходимым и достаточным условием того, что концы интервала $[T_1^k, T_2^k]$ окажутся внутри одного и того же окна просветления. При всех промежуточных значениях угла падения $T_1^k \leq t(\gamma) \leq T_2^k$. Это означает, что наибольшее значение $F(t)$ (а вместе с ней и коэффициент отражения) принимает на концах отрезка $[\Gamma_1, \Gamma_2]$. Внутри каждого окна просветления ($\pi k < t < \pi(k+1)$) график профилирующей функции симметричен относительно прямой $t = \frac{\pi}{2}(2k+1)$:

$$F\left(\frac{\pi}{2}(2k+1) - \Delta t\right) = F\left(\frac{\pi}{2}(2k+1) + \Delta t\right).$$

Отсюда приходим к соотношениям:

$$T_1^k + T_2^k = \pi(2k+1) = \omega n_1 h_k (\cos \Gamma_1 + \cos \Gamma_2)$$

$$h_k = \frac{\pi(2k+1)}{\omega n_1 (\cos \Gamma_1 + \cos \Gamma_2)} \quad (20)$$

$$\Delta t = \frac{1}{2} \omega n_1 h_k (\cos \Gamma_1 - \cos \Gamma_2) < \frac{\pi}{2}. \quad (21)$$

Равенство 20 определяет условие, которому должен удовлетворять параметр h (толщина) слоя МДС, чтобы было минимизировано значение энергетического коэффициента отражения на заданной частоте в диапазоне углов падения $[\Gamma_1, \Gamma_2]$.

Второе неравенство определяет наибольшее значение энергетического коэффициента отражения, поскольку при выбранной толщине слоя (удовлетворяющей равен-

ству (20)) однозначно определяется величина Δt , а вместе с ней и наибольшее значение профилирующей функции $F\left(\Delta t + \frac{\pi}{2}\right)$, которая пропорциональна энергетическому коэффициенту отражения.

Подставив в неравенство (21) выражение (20), и выполнив преобразования, находим, что:

$$0 \leq k < \frac{\cos \Gamma_2}{\cos \Gamma_1 - \cos \Gamma_2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (22)$$

Центру k -го окна просветления соответствует значение $t_k = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, а его ширина есть $2\Delta t = \omega n_1 h_k (\cos \Gamma_1 - \cos \Gamma_2)$ (см. (21)), которая зависит от толщины слоя. По мере увеличения толщины слоя (а точнее величины $n_1 h_k$) увеличивается величина Δt , а значение T_2^k , приближается к границе окна просветления, что ведет к росту значения $F(t)$. Таким образом, чем уже окно просветления, тем меньше значения $\max_{[\Gamma_1, \Gamma_2]} F(t)$. Поэтому, среди всех возможных окон просветления (а их конечное число, определяемое неравенством (22)) имеет одно (нулевое окно просветления), где $\max_{[\Gamma_1, \Gamma_2]} F(t)$ достигает минимума. Соответствующая толщина слоя определяется из равенства (20) при $k=0$:

$$h_{\min} = h(k=0) = \frac{\pi}{\omega n_1 (\cos \Gamma_1 + \cos \Gamma_2)}. \quad (23)$$

Заключение

В работе было рассмотрено падение плоской электромагнитной волны s -поляризации в диапазоне углов падения $[\Gamma_1, \Gamma_2]$ на однослойную магнитодиэлектрическую систему.

Была сформулирована и решена задача просветления, а также найдены необходимые и достаточные для существования решений условия (неравенства (15), (16) и равенство (20)), накладываемые на физические параметры слоя и его толщину. Полученное неравенство (22) показывает, что возможно существование лишь конечного числа окон просветления, причем «наилучшим» является нулевое, которому соответствует толщина слоя (23). Кроме того, установлено, что в случае, если в интервал углов падения волны попадает угол, определяемый равенством (8), то поставленная задача просветления заведомо не может иметь решений.

Полученные результаты могут найти свое применение при создании новых оптических покрытий и приборов. Так, например, если показатель преломления слоя удовлетворяет неравенству (18) (которое легко проверяется при заданных значениях показателей преломления среды и подложки, а также при заданном интервале углов падения волны), то этот материал может использоваться в качестве просветляющего покрытия. Толщина покрытия определяется по формуле (20) для тех значений k , которые удовлетворяют неравенству (22). При этом, если таких значений k оказалось несколько, то «наилучшее» просветление будет при минимальной толщине (соответствующей значению $k=0$). Более того, полученные результаты могут быть использованы для того, чтобы определить, в интервале каких углов заданный материал может быть использован как просветляющее покрытие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Путилин Э. С. Оптические покрытия. – ИТМО, 2010.
2. Ершов А. В., Машин А. И. Многослойные оптические покрытия. – НГУ им. Н. И. Лобачевского, 2006.
3. Худак Ю. И. // РТЖ. 2017. Т. 5. № 3. С. 160.

Calculation of single-layer dielectric coatings for antireflection in a given range of angles of incidence

I. L. Shulman, Ya. E. Sadovnikova, A. N. Kobysh, and A. Yu. Rogov

MIREA – Russian Technological University
78 Vernadsky Ave., Moscow, 119454, Russia
E-mail: shulman@mirea.ru

Received September 21, 2021

In this work, the problem of antireflection a single-layer magneto-dielectric system is formulated when a plane electromagnetic wave passes through it in the range of angles of incidence, and necessary and sufficient conditions for the existence of solutions to this problem are obtained.

Keywords: antireflection, optics, optical coatings.

DOI: 10.51368/1996-0948-2021-6-5-13

REFERENCES

1. E. S. Putilin, *Optical coatings* (National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics, 2010) [in Russian].
2. A. V. Ershov and A. I. Manin, *Multilayer optical coatings* (UNN, Lobachevsky University, 2006) [in Russian].
3. Yu. I. Hudak, Russian technological journal **5** (3), 160 (2017).