

УДК 532.5:532.3.135

Нормальное отражение ударной волны в дисперсных газах

Г. М. Арутюнян, С. П. Аверсьев
ФГУП "ЦНИИМАШ", г. Королев, Россия

В работе впервые получены формулы параметров отраженных ударных волн в дисперсном газе в зависимости от параметров падающей на преграду ударной волны и содержания твердых (или жидких) частиц в газе. Результаты представлены в форме соответствующих математических алгоритмов с подробным анализом последних.

В основу исследования положено полученное одним из авторов [1] уравнение ударной адиабаты для рассматриваемых систем. Стадии процессов до и после отражения ударной волны представлены на рис. 1 и 2. Предполагаются следующие условия: 1) среда — смесь твердых (жидких) частиц и газа; 2) газ идеален; 3) температуры частиц и газа равны; 4) скорости частиц и газа равны; 5) теплоемкости частиц и газа постоянны; 6) реакции между компонентами отсутствуют; 7) частицы несжимаемы.

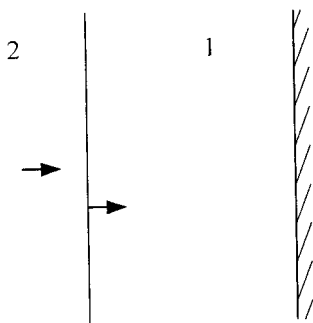


Рис. 1. Стадия набегания ударной волны на преграду: 1 — состояние невозмущенной среды; 2 — состояние среды за набегавшей ударной волной

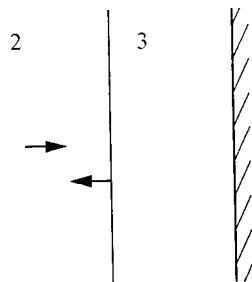


Рис. 2. Стадия отражения ударной волны: 3 — состояние среды за отраженной ударной волной; 2 — см. рис. 1

В работе p , V , T , соответственно, означают: давление, удельный объем, температуру смеси, индексы 1, 2 и 3 относятся, соответственно, к исходному невозмущенному состоянию среды и ее состояниям за падающей и отраженной удар-

ными волнами; индексы ('), (") — к первому (частицы) и второму (газ) компонентам смеси. Под x , γ , c_p , c_v , μ подразумеваются: массовая концентрация, показатель адиабаты, удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме и молекулярный вес газа. R — универсальная газовая постоянная, c — удельная теплоемкость частиц, ρ' — плотность частиц. Положенные в основу исследования условия 1), 2), 5) самоочевидны. Условия же 3), 4) равносильны требованиям

$$\frac{ac\rho'r^2}{\chi''} \ll 1, \quad \frac{a\rho'r^2}{\eta} \ll 1,$$

где l — характерный линейный размер отражающей ударную волну поверхности преграды;

a — скорость звука в исходной смеси;
 χ'' — кинематическая вязкость газа;
 η — теплопроводность частиц;
 r — радиус частиц.

Как и в работах [2] и [3], нами вводится эффективный показатель адиабаты

$$\gamma' = \frac{c + x(c_p - c)}{c + x(c_v - c)}. \quad (1)$$

Однако в отличие от указанных работ, где формулой (1) можно пользоваться, если в областях 1—3 объем газа должен во много раз превосходить объем частиц, ниже предлагается подход, свободный от такого ограничения.

В работе [1], свободной от такого ограничения, было показано, что сжимаемость дисперсного газа в падающей ударной волне определяется соотношениями:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\{1 + 2\delta(x)[1 - \omega(x)]\}p_1 + [1 + 2\delta(x)\omega(x)]p_2}{p_1 + [1 + 2\delta(x)]p_2}, \quad (2)$$

где

$$\delta(x) = \frac{1}{\gamma' - 1}, \quad \omega(x) = \frac{1 - x}{1 + x(\lambda - 1)}, \quad \lambda = \frac{V_1''}{V_1'}$$

По аналогии с выражением (2) для падающей волны для отраженной от преграды ударной волны будем иметь:

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{[1 + 2\delta(1 - \omega')]p_2 + [1 + 2\delta\omega']p_3}{p_2 + (1 + 2\delta)p_3}, \quad (3)$$

$$\omega' = \frac{V_1}{V_2} \omega.$$

Поскольку среда в областях 1 и 3 покоится относительно преграды, то это равносильно требованию

$$(p_2 - p_1)(V_1 - V_2) = (p_3 - p_2)(V_2 - V_3),$$

откуда с учетом (2) и (3), приходим к соотношению:

$$(p_2 - p_1) \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) = \frac{2\delta(1 - \omega')(p_3 - p_2)^2}{p_2 + (1 + \delta)p_3}. \quad (4)$$

Воспользовавшись далее в (4) выражением (2) для V_2/V_1 , приходим к квадратному относительно p_3 уравнению:

$$[p_3 - p_1] \{ p_2 [(3 + 2\delta)p_2 - p_1] - [(1 + 2\delta)p_1 + p_2] p_3 \} = 0.$$

Определяемый из условия равенства нулю выражения в фигурных скобках, реальный корень для p_3 сводится к выражению:

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{p_2 (3\gamma' - 1) p_2 - (\gamma' - 1) p_1}{p_1 (\gamma' - 1) p_2 + (\gamma' + 1) p_1}, \quad (5)$$

что по форме совпадает с известной формулой Гюгоню для совершенного газа. Из (5) с учетом соотношений

$$\frac{d\gamma'}{dx} = \frac{c(c_p - c_v)}{[c - x(c - c_v)]^2} > 0 \quad (0 < x < 1),$$

нетрудно убедиться, что

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{p_3}{p_1} \right) = \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \times \frac{2c(c_p - c_v)(p_2 - p_1)^2}{[c - x(c - c_v)]^2 [(\gamma' - 1)p_2 + (\gamma' + 1)p_1]^2}. \quad (6)$$

Из (6), как это показывают расчеты,

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{p_3}{p_1} \right) > 0, \quad \left(\frac{p_2}{p_1} < \frac{2c - c_p - c_v}{c_p - c_v} \right),$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{p_3}{p_1} \right) < 0, \quad \left(\frac{p_2}{p_1} > \frac{2c - c_p - c_v}{c_p - c_v} \right). \quad (7)$$

Учитывая, наконец, что

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{p_3}{p_1} \right) > 0 \quad (0 < x < 1), \quad (8)$$

на основании соотношений (7), (8) можно утверждать, что при заданном p_2/p_1 зависимость p_3/p_1 имеет вид, представленный на рис. 3.

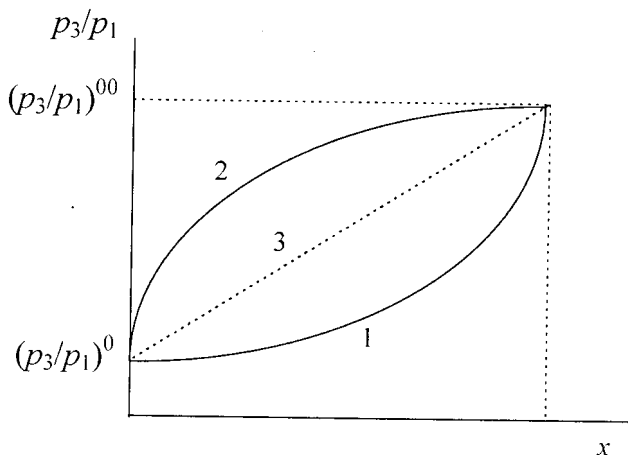


Рис. 3. Зависимость перепада давления в отраженной ударной волне от содержания газа в смеси

Видно, что с ростом x все кривые монотонно растут. Однако в силу первого из неравенств (7) соответствующая кривая 1 (линия 1) обращена выпуклостью вниз, тогда как в силу третьего из неравенств (7) она (линия 2) обращена выпуклостью вверх. Пунктирной прямой (3) соответствует нормальное отражение ударной волны с интенсивностью

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2c - (c_p + c_v)}{c_p - c_v}.$$

Нижняя и верхняя точки на рис. 3 имеют ординаты:

$$\left(\frac{p_3}{p_1} \right)^0 = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^2, \quad \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{00} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \frac{(3\gamma - 1)p_2 - (\gamma - 1)p_1}{(\gamma - 1)p_2 + (\gamma + 1)p_1}.$$

Нетрудно также убедиться, что перепад температур между конечным и исходным состояниями среды определяется формулой

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{p_1 + (\gamma' - 1)p_2}{\gamma' p_1} \left[\frac{(3\gamma' - 1)p_2 - (\gamma' - 1)p_1}{(\gamma' - 1)p_2 + (\gamma' + 1)p_1} \right].$$

Сжимаемость среды определяется соотношением

$$\frac{V_3}{V_1} = 1 + \frac{xRT_1 [(\gamma' + 1) p_1^2 - (3\gamma' - 1) p_2^2 + 2(\gamma' - 1) p_1 p_2]}{\gamma' p_2 [(1 - x) \mu p_1 V_1' + xRT_1] [(\gamma' - 1) p_1 + (\gamma' + 1) p_2]}, \quad (9)$$

откуда, как нетрудно убедиться,

$$\frac{V_3}{V_1} \rightarrow \frac{(\gamma+1)p_1^2 + (\gamma-1)^2 p_2^2 + (\gamma-1)(\gamma+2)p_1 p_2}{\gamma p_2 [(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2]} \quad (x \rightarrow 1),$$

т. е. приходим к соответствующему выражению для газа [4], и

$$\frac{V_3}{V_1} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

при полном отсутствии газа.

Максимальная сжимаемость рассматриваемой смеси при отражении ударных волн находится из условия

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{V_3}{V_1} \right) = 0$$

и после соответствующего дифференцирования приходим к следующему алгебраическому уравнению относительно x_m :

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 = 0,$$

где $\alpha_0 \dots \alpha_5$ означают:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 8c^3 p_2^4; \\ \alpha_1 &= 2c^2 \{ 2\lambda c p_1^2 p_2^2 + [9c_v (\gamma-1) - 16c] p_2^4 \}; \\ \alpha_2 &= c \{ c^2 (52 - 28\lambda) + c_v (\gamma-1) \times \\ &\quad \times [18c(\lambda-4) + 13c_v (\gamma-1)] \} p_2^4 + \\ &\quad + cc_v (\gamma-1) [7c_v (\gamma-1) + 4c(4\lambda-3)] \times \\ &\quad \times p_1 p_2^3 + 4\lambda c^2 [c_v (\gamma-1) + \\ &\quad + 4c(\lambda-2)] p_1^2 p_2^2 - 2\lambda c^2 c_v (\gamma-1) p_1^3 p_2; \\ \alpha_3 &= [cc_v^2 (\gamma-1)^2 (17\lambda-39) + 54c^2 c_v \times \\ &\quad \times (\gamma-1)(2-\lambda) - 16c^3 (5-3\lambda) + \\ &\quad + 3c_v^3 (\gamma-1)^3] p_2^4 + c_v (\gamma-1) \times \\ &\quad \times [cc_v (\gamma-1)(16\lambda-17) + 4c^2 \times \\ &\quad \times (3\lambda^2 - 9\lambda + 5) + 5] + 3c_v^2 (\gamma-1)^2 \times \\ &\quad \times p_1 p_2^3 + \lambda c [c_v^2 (\gamma-1)^2 + 4c^2 (13-8\lambda) - \\ &\quad - 2cc_v (\gamma-1)(\lambda+3)] p_1^2 p_2^2 - 2\lambda cc_v (\gamma-1) \times \\ &\quad \times [c_v (\gamma-1) + c(2\lambda-1)] p_1^3 p_2; \\ \alpha_4 &= [cc_v^2 (\gamma-1)^2 (31-22\lambda) + 6c^2 c_v (\gamma-1)(\lambda-4) - \\ &\quad - 8c^3 (4\lambda-5) + 3c_v^3 (\gamma-1)^3 \times \\ &\quad \times (\lambda-1)] p_2^4 + c_v (\gamma-1)(\lambda-1) [3c_v (\gamma-1) - 4c] \times \\ &\quad \times [c_v (\gamma-1) + c(3\lambda-2)] p_1 p_2^3 + \lambda c \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times [2c_v^2 (\gamma-1)^2 (\lambda-3) + 2cc_v (\gamma-1) \times \\ &\times (2\lambda+15) + 32c^2 (\lambda-1) - 6cc_v] p_1^2 p_2^2 - \lambda cc_v (\gamma-1) \times \\ &\times [3\lambda c_v (\gamma-1) - 2c(4\lambda+1)] p_1^3 p_2; \\ \alpha_5 &= (\lambda-1) [3c_v (\gamma-1) - 4c] \times \\ &\times \{ c [3c_v (\gamma-1) - 2c] + c_v^2 (\gamma-1)^2 (\lambda-1) \} p_2^4 + \\ &\quad + \{ \lambda [2c(1+2\lambda) + \lambda c_v (\gamma-1)] \times \\ &\quad \times [c_v^2 (\gamma-1)^2 - 3cc_v (\gamma-1) - 2c^2] - \\ &\quad - \lambda c (\lambda-1) [c_v (\gamma-1) - 2c] [3c_v (\gamma-1) - 4c] \} \times \\ &\quad \times p_1^2 p_2^2 + \lambda [2c(2\lambda+1) + \lambda c_v (\gamma-1)] \times \\ &\quad \times c_v (\gamma-1) [c_v (\gamma-1) - c] p_1^3 p_2. \end{aligned}$$

На основании выражения (9) производились расчеты зависимости V_3/V_1 от x для различных значений интенсивности падающей волны (рис. 4). Видно, что во всех случаях с ростом x значение V_3/V_1 сначала падает и, достигнув при некотором значении x_m минимального значения, далее монотонно возрастает.

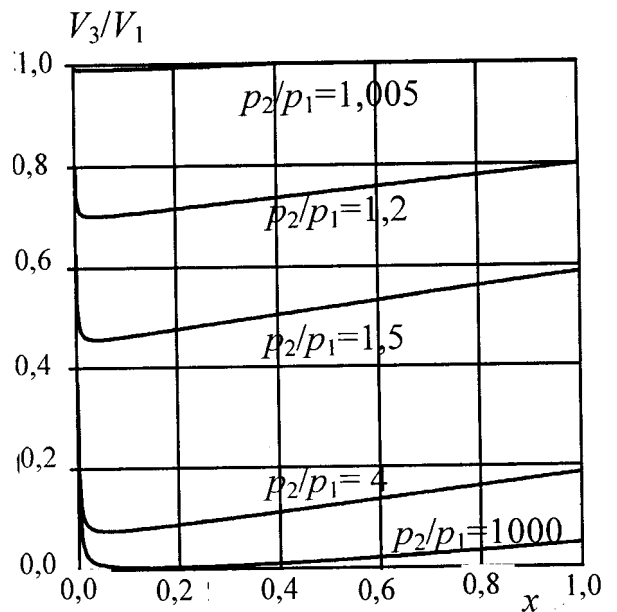


Рис. 4. Зависимость сжимаемости в отраженной ударной волне от содержания газа в смеси для различных интенсивностей падающей на преграду ударной волны

Зависимость x_m от интенсивности падающей ударной волны представлена на рис. 5. Видно, что с ростом интенсивности падающей волны значение x_m монотонно растет, асимптотически приближаясь к значению 0,155.

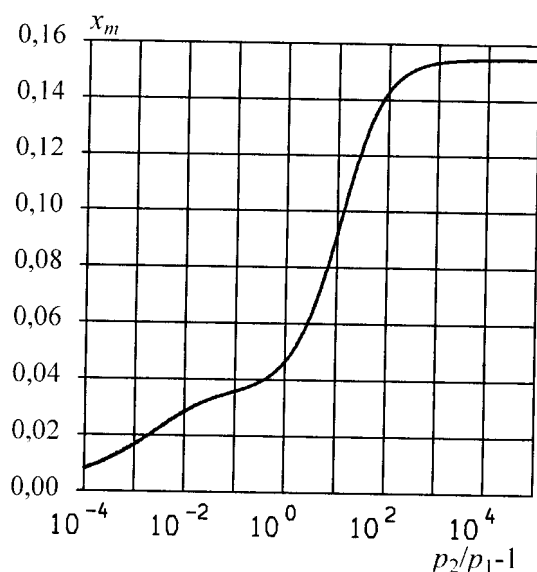


Рис. 5. Значение содержания газа в смеси в зависимости от интенсивности падающей ударной волны, при котором достигается наибольшая сжимаемость смеси

Авторы благодарят профессора А. А. Рухадзе за обсуждение полученных авторами результатов и ценные советы.

Литература

1. Арутюнян Г. М. Условия применимости результатов гидродинамики совершенного газа к дисперсным средам// Изв. АН СССР. МЖГ, 1979. № 1. С. 157.
2. Сидоркина С. И. О некоторых движениях аэрозоля// Докл. АН СССР, 1957. Т. 112. № 3.
3. Marble F. E. Dynamics of dusty gases// Ann. Rev. Fluid Mech., 1970. V. 2. Palo Alto, Calif.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1984.

Статья поступила в редакцию 23 января 2004 г.

Normal reflection of a shock wave in dispersed gases

G. M. Arutjunjan, S. P. Avershiev

Central Research Institute of Machinebuilding, Korolev, Russia

The article discusses formulas derived for the first time for parameters of reflected shock waves in a dispersed gas as a function of parameters of a shock wave which is incident on an obstacle as well as a function of content of solid (or liquid) particles in the gas. The results are presented in the form of appropriate mathematical algorithms being analyzed in detail.

УДК 533.6:621.52

Уравнение Больцмана и стохастическая модель потока разреженного газа

Ю. М. Печатников

Государственный политехнический университет, Санкт-Петербург, Россия

Феноменологически построено кинетическое уравнение для описания неравновесных течений разреженного газа, которое включает как парные, так и групповые межмолекулярные взаимодействия. Это уравнение решено при вероятностном подходе к задаче расчета газовых потоков в вакуумных каналах в молекулярно-вязкостной области при числах Кнудсена от 0,01 до 100.

На современном уровне для вычисления газовых потоков при среднем вакууме, как правило, применяют два подхода:

первый — используются полуэмпирические или оценочные формулы на базе макроскопических параметров (давление, температура) [1];

второй — используются численные приближенные методы на базе микроскопических

уравнений движения и законов взаимодействия молекул [2—4].

Эмпирическая формула Кнудсена широко используется в вакуумной технике для расчета газового потока, протекающего через круглую длинную трубу при малых перепадах давлений на ее концах, и она является практически единственной формулой, построенной на базе