

8. Глебов Г. А., Молчанов А. Я. Модель турбулентности для расчета высокоскоростных реагирующих струй/В кн.: Исследование теплообмена в летательных аппаратах// Тематический сборник научных трудов МАИ—М.: МАИ, 1982. С. 6.

9. Nordgard J. D., Smith G. S. Electromagnetic Simulation of Missile Exhaust Plumes. // IEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 1987. V. EMC-29. № 2. P. 157.

10. Аверенкова Г. И., Ашратов Э. А. Волконская А. Г. и др. Сверхзвуковые струи идеального газа. — М.: МГУ, 1970. Ч. 1; 1971. Ч. 2.

11. Dash S. M., Pergament H. S. A Computational System for the Analysis of Mixing Chemical Shock Processes in Supersonic Internal and Exhaust Plume Flow fields. AIAA-Paper, 1980, № 80—1255.

12. Термодинамические свойства индивидуальных веществ / Под ред. В. П. Глушко — М.: Наука, 1978. Т. 1, 2; 1979. Т. 3; 1981. Т. 4.

Статья поступила в редакцию 5 июля 2004 г.

## Electromagnetic radiation in hypersonic ionized turbulent gas jets

K. B. Galitseyskiy

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

*The problem of radiation-convective heat and mass transfer in chemically reacting supersonic turbulent gas jet is considered. The methods of the calculation of electromagnetic radiation due to the ionization of high-temperature jets, the problem of heat and mass transfer in chemically reacting flow are analyzed. The results of numerical calculations of the spectral intensity of ionized supersonic turbulent jet are discussed.*

УДК 537.52

## О балансе энергии плазмы высокочастотного индукционного разряда атмосферного давления вблизи оси плазменного сгустка

А. В. Герасимов, А. П. Кирпичников

Казанский государственный технологический университет, г. Казань, Россия

*На основе анализа системы уравнений баланса энергии в приосевой области плазмоида высокочастотного индукционного разряда в рамках двухтемпературной модели получены аналитические зависимости для расчета полей температур в этой области в двумерной постановке задачи.*

В работе [1] авторами был изучен баланс энергии плазмы высокочастотного индукционного (ВЧИ) разряда атмосферного давления в приосевой области плазменного сгустка с учетом выноса энергии из этой зоны излучением. При этом был предложен относительно простой метод расчета двумерного поля температур равновесной ВЧИ-плазмы в канале индукционного ВЧ-плазмотрона, обобщающий известное одномерное решение Эккерта [2, 3] для центральной области плазмоида.

Между тем известно, что даже при атмосферном давлении в ВЧИ-разряде существует значительный отрыв температур атомно-ионного газа от электронной температуры, разность которых на практике, особенно в области скин-слоя, может достигать величины нескольких тысяч градусов [4, 5].

Вопрос об особенностях энергообмена между электронным и атомно-ионным газом в данном случае имеет как чисто научный, так и значительный самостоятельный интерес в связи с задачей оптимизации эффективности нагрева газообразных сред в различного рода плазменных устройствах, использующих принцип ВЧИ-нагрева газа.

В тех случаях, когда электронную и газовую температуры в разряде уже нельзя считать равными, необходимо рассматривать такую модель теплообмена в ВЧИ-разряде, которая учитывает обмен энергией между электронным газом и атомно-ионным газом тяжелых частиц.

Очевидно, что в этом случае полученное в работе [1] уравнение энергии с учетом теплообмена излучением

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 (\lambda T)}{\partial z^2} + \sigma E_{\phi}^2 = Q_r$$

расщепляется на систему двух уравнений [6], аналогичную системе уравнений, использованной в работе [7] при построении двухтемпературной каналовой модели дугового разряда,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 (\lambda_e T_e)}{\partial z^2} -$$

$$- \frac{3}{2} k \delta \nu n_e (T_e - T) + \sigma E_\phi^2 = 0; \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 (\lambda T)}{\partial z^2} + \frac{3}{2} k \delta \nu n_e (T_e - T) = Q_r, \quad (2)$$

где  $T_e$  и  $T$  — температура электронного газа и атомно-ионного газа тяжелых частиц, соответственно;

$\lambda_e$  и  $\lambda$  — коэффициенты теплопроводности электронного и атомно-ионного газа;

$k$  — постоянная Больцмана;

$n_e$  — концентрация электронов в разряде;

$\delta$  — доля энергии, теряемой электронами при соударении с тяжелыми частицами;

$\nu$  — частота этих столкновений;

$\sigma$  — проводимость в разряде;

$E_\phi$  — напряженность азимутального электрического поля;

$Q_r$  — плотность энергии излучения в центральной области плазмоида.

Уравнение (1) выражает баланс энергии для электронного газа, уравнение (2) — баланс энергии для атомов и ионов. Член, учитывающий потери на излучение в приосевой области плазмоида в соответствии с соображениями, изложенными в [1, 3], запишем в следующем виде:

$$Q_r(r, z) = \frac{3}{2} k \delta \nu n_e (T_e - T) + Q_r(0, z). \quad (3)$$

Это означает, что вся энергия, полученная атомно-ионным газом за счет столкновений тяжелых частиц с электронами и выделяющаяся в центральной зоне плазмоида, выносится оттуда излучением. При этом коэффициенты теплопроводности  $\lambda$  и  $\lambda_e$ , значение удельной электропроводности  $\sigma$ , а также  $n_e$ ,  $\delta$  и  $\nu$  в приосевой области плазмоида приближенно можно положить постоянными, поскольку профили температур в этой области имеют характер "плато", т. е. температуры изменяются незначительно. С точки зрения математики такая процедура означает принятие линейного приближения для уравнений (1), (2).

Зависимость (3) является более точной, чем принятая в [6] зависимость

$$Q_r(r, z) = \sigma E_\phi^2(r, z) + Q_r(0, z),$$

в связи с чем результаты данной работы точнее результатов, полученных в работе [6].

С учетом изложенного выше уравнения (1) и (2) обратятся в систему

$$\frac{1}{r} \lambda_e \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) + \lambda_e \frac{\partial^2 T_e}{\partial z^2} -$$

$$- \frac{3}{2} k \delta \nu n_e (T_e - T) = -\sigma E_\phi^2;$$

$$\frac{1}{r} \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = Q_r(0, z). \quad (5)$$

Вблизи оси плазмоида [8—10]

$$E_\phi(r, z) = \frac{\omega H_z(0, 0)}{2c} r \cos(bz);$$

$$Q_r(0, z) = Q_r(0, 0) \cos^2(bz),$$

$$\text{где } b = \frac{1}{L} \arccos \left( \frac{H_z(0, L)}{H_z(0, 0)} \right);$$

$H_z$  — продольная составляющая напряженности магнитного поля в нагруженном плазмой индукторе;

$L$  — длина расчетной области вдоль оси плазмоида;

$\omega$  — частота колебаний ВЧ-поля;

$c$  — скорость света в вакууме.

Решение уравнений (4), (5), очевидно, будет иметь вид [1]

$$T(r, z) = T(0, 0) I_0(gr) \cos(gz) + \frac{Q_r(0, 0)}{8\lambda} r^2 +$$

$$+ \frac{Q_r(0, 0)}{8\lambda b^2} [I_0(2br) - 1] \cos(2bz), \quad (6)$$

$$\text{где } g = \frac{1}{L} \arccos \left( \frac{T(0, L)}{T(0, 0)} \right);$$

$I_0$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

В этом случае уравнение переноса тепла для электронного газа в свою очередь примет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 (\lambda_e T_e)}{\partial z^2} - \frac{3}{2} k \delta \nu n_e (T_e - T) =$$

$$= - \frac{\sigma \omega^2 H_z^2(0, 0)}{8c^2 \lambda_e} r^2 [1 + \cos(2bz)] + \frac{3}{2} \frac{k \delta \nu n_e}{\lambda_e} \times$$

$$\times \left[ T(0, 0) I_0(gr) \cos(gz) + \frac{Q_r(0, 0)}{8\lambda} r^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{Q_r(0, 0)}{8\lambda b^2} [I_0(2br) - 1] \cos(2bz) \right] \quad (7)$$

или

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_e}{\partial z^2} - d^2 T_e = -\frac{1}{2} \alpha r^2 -$$

$$- \frac{1}{2} \alpha r^2 \cos(2bz) + d^2 T(0, 0) I_0(gr) \cos(gz) + \quad (8)$$

$$+ d^2 \frac{Q_r(0, 0)}{8\lambda} r^2 + d^2 \frac{Q_r(0, 0)}{8\lambda b^2} [I_0(2br) - 1] \cos(2bz),$$

где

$$d^2 = \frac{3}{2} \frac{k \delta v n_e}{\lambda_e};$$

$$\alpha = \frac{\sigma \omega^2 H_z^2(0,0)}{4 \lambda_e c^2}.$$

Следуя работе [1], будем искать частные решения неоднородного уравнения (7) в виде

$$T_e(r, z) = f_1(r) + f_2(r) \cos(2bz) + f_3(r) \cos(gz).$$

В этом случае, очевидно, уравнение (7), должно преобразоваться в систему

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f_1}{\partial r} \right) - d^2 f_1 &= -\frac{1}{2} \alpha r^2 + \frac{d^2 Q_r(0,0)}{8 \lambda} r^2; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f_2}{\partial r} \right) - 4 b^2 f_2 - d^2 f_2 &= -\frac{1}{2} \alpha r^2 + \\ &+ \frac{d^2 Q_r(0,0)}{8 \lambda b^2} [I_0(2br) - 1]; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f_3}{\partial r} \right) - g^2 f_3 - d^2 f_3 &= d^2 T(0,0) I_0(gr). \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Частные решения каждого из трех неоднородных уравнений (9) можно найти стандартными методами математической физики (например, [11, 12]), так что в итоге, взяв несколько табличных интегралов [13, 14], мы получим

$$f_1(r) = -\frac{1}{d^4} \left[ \frac{d^2 Q_r(0,0)}{2 \lambda} - 2 \alpha \right] \left[ I_0(dr) - 1 - \frac{d^2 r^2}{4} \right];$$

$$f_2(r) = -\frac{d^2 Q_r(0,0)}{8 \lambda b^2 (4b^2 + d^2)} \left[ I_0(\sqrt{4b^2 + d^2} r) - 1 \right] -$$

$$-\frac{2 \alpha}{(4b^2 + d^2)^2} \left[ I_0(\sqrt{4b^2 + d^2} r) - 1 - \frac{(4b^2 + d^2) r^2}{4} \right] -$$

$$-\frac{Q_r(0,0)}{8 \lambda b^2} \left[ I_0(\sqrt{4b^2 + d^2} r) - I_0(2br) \right];$$

$$f_3(r) = -T(0,0) \left[ I_0(\sqrt{g^2 + d^2} r) - I_0(2gr) \right].$$

Общее решение однородного уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - d^2 f = 0, \quad (10)$$

соответствующего неоднородному уравнению (7), также легко находится применением к нему метода Фурье (метода разделения переменных), в результате чего мы получим

$$f = T_e(0,0) I_0(\sqrt{d^2 + g_e^2} r) \cos(g_e z),$$

где

$$g_e = \frac{1}{L} \arccos \left( \frac{T_e(0,L)}{T_e(0,0)} \right),$$

так что в итоге имеем

$$T_e(r, z) = T_e(0,0) I_0(\sqrt{d^2 + g_e^2} r) \cos(g_e z) -$$

$$-\frac{1}{d^4} \left[ \frac{d^2 Q_r(0,0)}{2 \lambda} + 2 \alpha \right] \left[ I_0(2dr) - 1 - \frac{d^2 r^2}{4} \right] -$$

$$-\left[ \frac{d^2 Q_r(0,0)}{8 \lambda b^2 (4b^2 + d^2)} \left[ I_0(\sqrt{4b^2 + d^2} r) - 1 \right] - \right. \quad (11)$$

$$\left. -\frac{2 \alpha}{(4b^2 + d^2)^2} \left[ I_0(\sqrt{4b^2 + d^2} r) - 1 - \frac{(4b^2 + d^2) r^2}{4} \right] - \right.$$

$$\left. -\frac{Q_r(0,0)}{8 \lambda b^2} \left[ I_0(\sqrt{4b^2 + d^2} r) - I_0(2br) \right] \right] \cos(2bz) -$$

$$-T(0,0) \left[ I_0(\sqrt{g^2 + d^2} r) - I_0(2gr) \right] \cos(gz).$$

Проанализируем полученное решение. Во-первых, заметим, что хотя формулы (6), (11) и носят на первый взгляд несколько громоздкий характер, практическое применение их не представляет никаких формальных трудностей.

Из полученных соотношений следует также, что в одномерном случае (т. е., когда постоянные расщепления  $b = g = 0$ ) решение (6), (11) запишется в виде

$$T(r) = T(0) + \frac{1}{4} \frac{Q_r(0)}{\lambda} r^2; \quad (12)$$

$$T_e(r) = T_e(0) I_0(dr) - T(0) [I_0(dr) - 1] -$$

$$-\frac{1}{d^4} \left[ \frac{d^2 Q_r(0)}{\lambda} + 4 \alpha \right] \left[ I_0(dr) - 1 - \frac{d^2 r^2}{4} \right], \quad (13)$$

который, очевидно, является двухтемпературным аналогом одномерной формулы Эккерта [3]

$$T(r) = T(0) + \frac{1}{4} \frac{Q_r(0)}{\lambda + \lambda_e} r^2, \quad (14)$$

имеющей место в том случае, когда приближенно можно считать  $T(r) = T_e(r)$  внутри плазмоида.

Укажем также, что соответствующая формуле (14) двумерная зависимость температурного профиля ВЧИ-разряда, полученная в работе [1], имеет вид

$$T(r, z) = T(0,0) I_0(gr) \cos(gz) + \frac{Q_r(0,0)}{8(\lambda + \lambda_e)} r^2 +$$

$$+ \frac{Q_r(0,0)}{8(\lambda + \lambda_e) b^2} [I_0(2br) - 1] \cos(2bz). \quad (15)$$

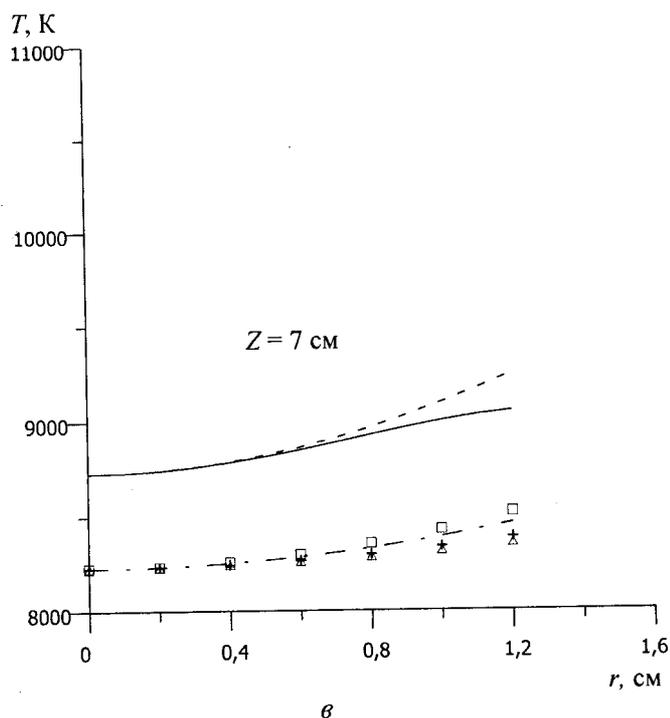
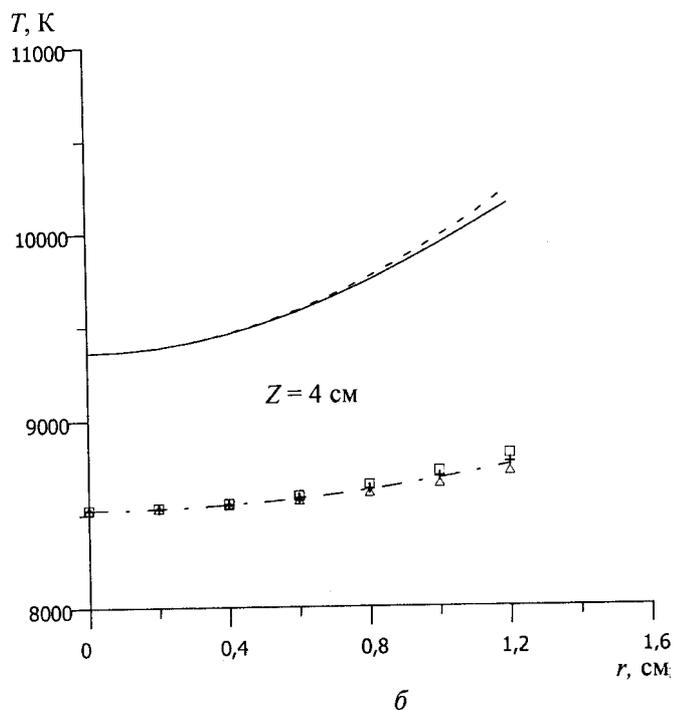
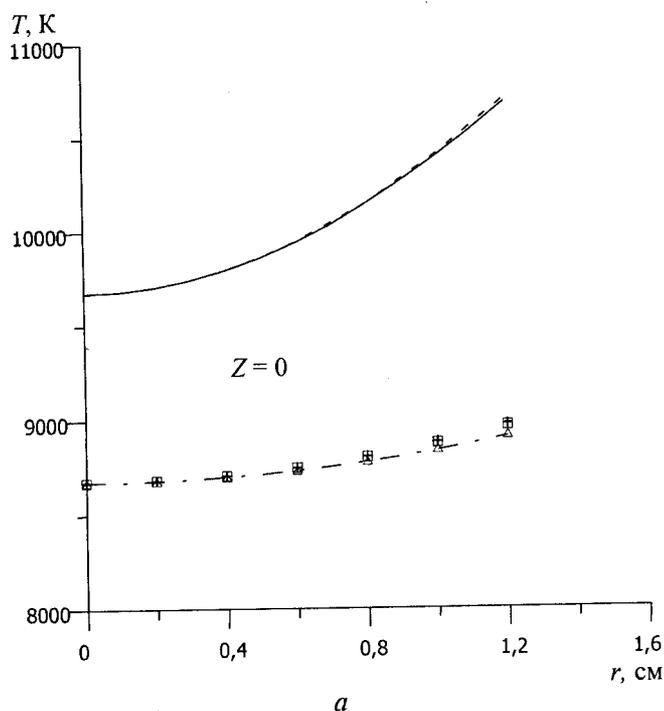
На рисунке приведены результаты расчетов, выполненных для различных сечений плазмоида ВЧИ-разряда и проводимых для воздушной плазмы при атмосферном давлении.

Значение коэффициента теплопроводности атомно-ионного газа для заданного интервала температур бралось из работы [15], коэффициент теплопроводности электронного газа вычислялся в соответствии с [16].

Величины  $n_e$ ,  $\delta$  взяты из работы [17], значение  $\nu$  определялось в соответствии с [18], величина  $Q_r$  рассчитывалась по данным [19].

Результаты, представленные на рисунке,  $a$ — $в$ , показывают, что в тот разрыв между электрон-

ной и атомно-ионной температурами, который существует в приосевой области плазмоида, с большой точностью сохраняется вплоть до области, вплотную прилегающей к скин-слою (в данном случае скин-слой находится на расстоянии порядка 2 см от оси индуктора). Расчеты, проведенные по формулам (6), (12) для атомно-ионного газа, дают значения распределения температуры в приосевой области, имеющие характер "плато", что хорошо согласуется с многочисленными данными как экспериментальными, так и расчетными. Для электронной температуры явление "плато" выражено слабее, хотя тоже имеет место.



**Радиальное распределение температур для сечения плазмоида:**

$a$  —  $Z = 0$  см;  $б$  —  $Z = 4$  см;  $в$  —  $Z = 7$  см,

+ — расчет по формуле (6) двухмерной модели для атомно-ионного газа;

----- — расчет по формуле (11) двухмерной модели для электронного газа;

□ — расчет по формуле (12) одномерной модели для атомно-ионного газа;

— — расчет по формуле (13) одномерной модели для электронного газа;

· · · — расчет по формуле (14) одномерной

однотемпературной модели Эккерта [3];

△ — расчет по формуле (15) двухмерной однотемпературной модели [1]

Также видно, что двухмерная модель учитывает граничные эффекты, которые проявляются при расчетах по всей длине индуктора. Это означает, что лишь в центральном сечении плазмоида профиль температуры, рассчитанный по формулам одностепенной модели [1] (формула (15)), практически совпадает с эккертовским, проходя, однако, несколько выше последнего. В дальнейшем, при продвижении по направлению к срезу индуктора вниз по потоку, этот профиль, как и следовало ожидать, опускается, хотя и незначительно, ниже эккертовского, прижимаясь по всей своей длине к оси абсцисс.

Особый интерес представляют графики, рассчитанные по формулам двухтемпературных моделей (6), (11) и (12), (13). Как видим, для обеих моделей (одно- и двухмерной) профиль атомно-ионной температуры газа тяжелых частиц, незначительно изменяясь при движении вдоль оси индуктора, образует характерное "плато", хорошо известное специалистам в области физики и техники индукционной плазмы атмосферного давления. Вначале его значения превышают соответствующий эккертовский одностепенный профиль, а затем на выходе из индуктора опускаются несколько ниже последнего, оставаясь, однако, качественно близким к нему. Тем самым можно утверждать, что расчеты, проведенные по формуле Эккерта (14) (как и по соответствующей формуле (15)), учитывающей двухмерные эффекты в ВЧИ-плазме) тяготеют более к атомно-ионной температуре газа тяжелых частиц, чем к соответствующей электронной температуре. В свою очередь двухтемпературная модель (12), (13), не учитывающая краевых эффектов, как видно из графиков, также дает характерное "плато" на профиле газовой температуры, которое остается качественно близким к эккертовской модели, вследствие чего можно утверждать, что в реальных ВЧ индукционных устройствах такое "плато" обязано своим происхождением в первую очередь выносу энергии из центральной зоны плазмоида излучением, причем вынос энергии может усиливаться эффектом существенной двухмерности, проявляющейся в кондуктивном выносе тепла через торцевые области плазменного сгустка при индукционном нагреве плазмообразующего газа в индукторе конечной длины.

Укажем также, что полученные формулы сохраняют свою работоспособность вплоть до зна-

чений радиальной координаты  $r$  порядка одной трети радиуса плазменного сгустка.

В целом полученная в настоящей работе система формул достаточно точно описывает распределение температурных полей вблизи оси плазменного сгустка и может быть полезна при решении достаточно широкого круга задач теплообмена в области физики и техники ВЧ-низкотемпературной плазмы.

### Литература

1. Герасимов А. В., Кирпичников А. П. О структуре поля температур высокочастотного индукционного разряда атмосферного давления вблизи оси плазменного сгустка // ТВТ. 1998. Т. 36. № 2. С. 342.
2. Eckert H. U. Analysis of thermal induction plasmas dominated by radial conduction losses // J. Appl. Phys. 1970. V. 41. № 4. P. 1520.
3. Eckert H. U. Analytical treatment of radiation and conduction losses in thermal induction plasmas // J. Appl. Phys. 1970. V. 41. № 4. P. 1529.
4. Райзер Ю. П. Физика газового разряда. — М.: Наука, 1987.
5. Дресвин С. В., Бобров А. А., Лелёвкин В. М. и др. Низкотемпературная плазма. Т. 6. ВЧ- и СВЧ-плазмотроны. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1991.
6. Герасимов А. В., Кирпичников А. П. Двухтемпературная модель баланса энергии плазмы высокочастотного индукционного разряда вблизи оси плазменного сгустка // ТВТ. 2000. Т. 38. № 5. С. 710.
7. Кирпичников А. П. Двухтемпературная каналовая модель дуги постоянного тока // Известия вузов. Сер. Физика. 1990. № 7. С. 80.
8. Кирпичников А. П. О структуре квазистационарного электромагнитного поля ВЧ индукционного разряда при атмосферном давлении // Там же. 1994. № 2. С. 77.
9. Кирпичников А. П. Структура квазистационарного электромагнитного поля высокочастотного индукционного разряда вблизи оси плазменного сгустка // ТВТ. 1995. № 1. Т. 33. С. 139.
10. Кирпичников А. П., Герасимов А. В. Структура высокочастотного индукционного разряда вблизи оси плазмоида в случае индуктора конечных размеров // Плазмотехнология-95: Сб. науч. тр.-Запорожье, 1995. С. 28.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
12. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.
13. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983.
14. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. — М.: Наука, 1986.
15. Атлас газодинамических функций при больших скоростях и высоких температурах воздушного потока / Под ред. чл.-кор. АН СССР А. С. Предводителя. — М.—Л.: Госэнергоиздат, 1961.
16. Протасов Ю. С., Чувашев С. Н. Физическая электроника газоразрядных устройств. Плазменная электроника. В 2 ч. Ч. 2. — М.: Высш. шк., 1993.
17. Дресвин С. В., Донской А. В., Гольдфарб В. М., Клубникин В. С. Физика и техника низкотемпературной плазмы. — М.: Атомиздат, 1972.
18. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.
19. Оптические свойства горячего воздуха / Под ред. проф. Л. М. Бибермана. — М.: Наука, 1970.

Статья поступила в редакцию 16 марта 2004 г.

## **About balance of energy of plasma of the high-frequency induction discharge of atmospheric pressure near to an axis of a plasma torch**

*A. V. Gerasimov, A. P. Kirpichnikov*  
Kazan State Technology University, Kazan, Russia

*On the basis of the analysis of system of equations of balance of energy in near areas axis of a plasmoid of the high frequency induction discharge within the framework of two-temperature model are obtained analytical dependences for account of fields of temperatures in this area in a two-dimensional statement of problem.*

\* \* \*