Письма в редакцию

О доказательстве "Великой теоремы Ферма" методами школьной математики

А. А. Рухадзе
Институт общей физики РАН, Москва, Россия

Мысль об опубликовании этой заметки родилась после более чем двухлетней дискуссии с А. В. Бобровым, который опубликовал простое доказательство этой теоремы еще в 1993 г. в журнале "Вопросы истории естествознания и техники" РАН № 3. Работа прошла незамеченной, хотя проведенная в ней аргументация
довольно обоснованная, и, возможно, подобное доказательство и было приведено самим П. Ферма (1601—1665 гг.) на полях книги "Арифметика" Диофента. Я ниже воспроизведу это доказательство и укажу то "тонкое" место, которое обесценивает, с моей точки зрения, доказательство этой великой теоремы[*]. Окончательно моя мысль созрела в конце 2005 г., когда вначале по телевизору, а потом в Интернете появилось сообщение "Великая теорема Ферма" доказана? (http://2005.novayagazeta.ru/nomer/ 2005/61n/n61n-soo.shtml).

Омскому математику, проф. А. И. Ильину удалось доказать теорему весьма просто, причем омские ученые, считая доказательство правильным, передали его в комиссию РАН для экспертизы. Ниже я это доказательство в том виде, как оно приведено в Интернете, воспроизведу и укажу на ошибку, допущенную с моей точки зрения. Если читатели заинтересуются проблемой и укажут на мои ошибки либо сами пришлют свои доказательства, обещаю их рассмотреть и откликнуться. Добавлю, что несмотря на публикацию 1995 г., Геттингенское математическое общество принимает простые доказательства теоремы до 2007 г. и обещает победителю вознаграждение в 1 млн дол. США.[**]

Теорема Ферма формулируется следующим образом: "Равенство $a^n + b^n = c^n$ не может иметь места для одновременно целых положительных чисел *a, b, c* и *n*, если $n > 2$".

- Начнем с доказательства А. В. Боброва.

Рассмотрим равенство

$$c^n - b^n = A. \qquad (1)$$

Очевидно, что оно существует для целых положительных чисел *A, b, c* и *n*. Ограничимся рассмотрением случая, когда числа *A*, *b* и *c* — взаимно простые, т. е. не имеющие общих целых множителей. В этом случае два числа из трех – нечетные, одно — четное. Пусть *A* – четное число, *b* и *c* – нечетные. Любую пару наперед заданных нечетных чисел единственным образом можно представить в виде суммы и разности двух других целых положительных чисел, одно из которых четное, другое — нечетное, т. е. $c = x + y$; $b = x - y$. Тогда равенство (1) примет вид

$$(x + y)^n - (x - y)^n \equiv A(x, y); \qquad (2)$$

$$c^n = (x + y)^n,\ b^n = (x - y)^n. \qquad (3)$$

С помощью равенств (3) для каждого *n* можно представить все нечетные числа натурального ряда, а их разностью будут все соответствующие четные числа, причем числа *A, b* и *c* однозначно определяются числами *x* и *y* и наоборот. Раскрыв скобки и произведя вычитание, получим:

для нечетных:

$n = 1,\ c - b = 2y;$

$n = 3,\ c^3 - b^3 = 2y(3x^2 + y^2);$

$n = 5,\ c^5 - b^5 = 4xy(3x^4 + 10x^2y^2 + 3y^4);$

$n = 2^{m+1},\ c^{2m+1} - b^{2m+1} = 2y{\cdot}f_2(x, y);$

для четных:

$n = 2,\ c^2 - b^2 = 4xy;$

$n = 4,\ c^4 - b^4 = 8xy(x^2 + y^2);$

$n = 6,\ c^6 - b^6 = 2y(5x^4 + 10x^2y^2 + y^4)$

....

$n = 2m,\ c^{2m} - b^{2m} = 2^pxy\,f_1(x, y),$

где $A_1 = 2y$ или $A_1 = 2^pxy$ — четные множители числа *A*, соответственно для нечетных или четных *n*, $A_2 = f_2(x, y)$ или $A_2 = f_1(x, y)$ — нечетные множители.

Тождество (2) примет вид:

$$\begin{aligned}&\textbf{для нечетных } n — (x+y)^n - (x - y)^n \equiv 2yA_2;\\ &\textbf{для четных } n — (x+y)^n - (x - y)^n \equiv 2^pxyA_2.\end{aligned} \qquad (4)$$

В общем случае ограничимся рассмотрением тождества (4), в котором для нечетных *n* имеет место $p = 1$, $1 = x^0$.

Поскольку сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n, отметим, что для $n \le 2$ выполняется $p = n$, $A_2 = 1$, а для $n > 2$ всегда $p < n$. Число *A* из равенства (1) — есть действительное положительное число, которому, в соответствии с определением показательной функции, соответствует единственное значение $-\infty < r < +\infty$ такое, что имеет место равенство $A = a^r$, где $a \neq 1$ – произвольно выбранное положительное число. Пусть $a = 2^ka_1$ — целое положительное число, где 2^k — количество двоек; a_1 — нечетный целый множитель.

Предположим, существует целое число $r = n$, при котором выполняется равенство

$$c^n - b^n = A = a^n = 2^{kn}a_1{}^n = 2^pxyA_2. \qquad (5)$$

---

[*] Эта теорема строго была доказана в 1995 г. Э. Уайлсом и Р. Тейлором, однако это доказательство опирается на самые последние достижения математики и содержит более сотни страниц. После появления этой публикации многие начали поиски простых доказательств, понимая, что Ферма в то время не мог обладать такими знаниями.

[**] Правда, имеется одна существенная оговорка: великая теорема признается доказанной лишь через 2 года после опубликования, если за это время не появится опровержение.

Из равенства (5) следует

$$\frac{xyA_2}{a_1^n} = 2^{kn-p} = d, \qquad (6)$$

где d — целое положительное число, полученное путем конечного числа арифметических операций сложения, вычитания, умножения, включая возведение в степень, и деления над полем целых чисел c, b, x, y, 2, p, n, k и a_1, т. е. является результатом упрощения рационального аналитического выражения, его каноническим представлением – тождественной ему несократимой дробью.

То, что d всегда является именно числом, а не алгебраическим (аналитическим) выражением, следует из равенства $2^{kn-p} = d$ и определения показательной функции, в соответствии с которыми всякому показателю степени $-\infty<(kn-p)<+\infty$ и числу $\neq 1$ (в нашем случае это число 2) соответствует единственное значение действительного положительного числа d так, что выполняется приведенное выше равенство.

По определению, всякое действительное положительное число в нулевой степени равно 1. Это свойство чисел вытекает непосредственно из условий выполнимости операций сложения, вычитания, умножения, включая возведение в степень, и деления, кроме деления на 0, над полем действительных чисел, т. е. присуще всем без исключения действительным числам (см., например, С. И. Новосёлов. "Специальный курс элементарной алгебры": Учебник для физ.-мат. факультетов вузов/Под ред. П. С. Моденова. — М.: Советская наука. 1958. С. 104, 139 и 421).

По определению, $d^0 = 1$, т. е. для всякого действительного положительного числа d должны существовать действительные положительные числа x, y, A_2, a_1, n, k и p, удовлетворяющие равенству

$$d^0 = 1 = \frac{xyA_2}{a_1^n} = 2^{kn-p}. \qquad (7)$$

Это условие выполнимо при $kn - p = 0$, откуда следует, что для $n > 2$ число $k = p/n$ всегда является правильной рациональной дробью, т. е. число $a = 2^k \cdot a_1$ есть число иррациональное, либо при $xyA_2 = a_1^n$, тогда из равенства (4) следует

$$c^n - b^n = 2^p \cdot a_1{}^n,$$

т. е. в равенстве $2^p \cdot a_1{}^n = a^n$ числа a и a_1 могут быть одновременно целыми только при $n = p = 1$ или $n = p = 2$, что и требовалось доказать.

- Бином Ньютона был исследован уже после смерти Ферма, поэтому он, возможно, имел в виду другой вариант доказательства. Действительно, числа c^n и b^n из равенства (1) можно представить в виде $c^n=(x+y)^2$, $b^n = (x-y)^2$, в этом случае числа x и y не обязательно целые, но зависимость между b, c, x и y однозначна, а произведение xy есть всегда рациональное число. Тогда

$$c^n - b^n = (x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy = 2^{kn}a_1{}^n,$$

откуда $d^0 = 1 = \dfrac{xy}{a_1^n} = 2^{kn-2}$ с теми же выводами.

Для случая, когда четным числом в равенстве (1) является c, доказательство аналогично.

С моей точки зрения ошибка в доказательстве А. В. Боброва состоит в неправильном переходе из формулы (6) к (7). При возведении соотношения (6) в нулевую степень надо производить эту операцию с обеими частями равенства, а не только с одной, как это делает автор при получении (7). При этом вместо (7) получим тождество: 1 = 1.

Таким образом, соотношение (7) неверно. А. В. Бобров с этим не согласен. Прошу читателей рассудить нас!

- Рассмотрим теперь доказательства Великой теоремы Ферма профессором А. И. Ильиным. Я его воспроизведу по выставленному Г. Бородянским (г. Омск) в Интернете тексту.

Итак, требуется доказать, что если x и y — целые числа в уравнении $x^n + y^n = z^n$, то z при $n > 2$ — всегда нецелое. Прежде чем браться за Ферма, повторим теорему Пифагора: "Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов". Мы вправе для ее написания использовать любые переменные. Запишем ее таким образом: $x^2 + y^2 = r^2$,
где x, y, r — целые числа, а z, по утверждению Ферма, — нецелое.

Попробуем доказать это. Понятно, z не равно r при одних и тех же x, y. Легко доказуемо алгебраически, да и просто логически, что z всегда меньше, чем r. Когда мы возводим x и y в более высокую степень, то умножаем их на самих себя. Потом их складываем и получаем z в той же степени n. А при возведении их в r каждое слагаемое надо умножить на r, которое больше, чем x и y.

К примеру, $(x^2 + y^2)r = r^3 = x^2r + y^2r$.

Что делает Ильин? — Записывает длины сторон треугольника xyz в тригонометрическом виде: $x = r\sin A$, $y = r\cos A$, а это значит, $x^n + y^n = z^n = r^n(\sin^n A + \cos^n A)$. Что такое корень, Вы не забыли? — Отлично.

$z = r(\sin^n A + \cos^n A)^{1/n}$. Ранее мы доказали, что z всегда меньше r, т. е. $\sin^n A + \cos^n A < 1$. Такую тригонометрическую функцию можно найти в любом учебнике старших классов и убедиться (по графику или по таблице), что если значение функции < 1, то угол A больше 60° и больше 90°. А что произойдет в этом случае с прямым углом B, находящимся между катетами? Он больше уже не будет прямым и окажется в тех же пределах $60° < B < 90°$. Недаром, "девяносто, шестьдесят, девяносто" считается идеалом гармонии. Любой десятиклассник с ходу воспроизведет Вам формулу соотношения сторон треугольника $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos B$. В этом выражении при $60° < B < 90°$ $\cos B$ — число нецелое. А значит, и z является таковым при целых значениях x и y, что и требовалось доказать.

С моей точки зрения, все рассуждения здесь правильны до момента, пока пишется величина z^n через sinA и cosA. Очевидно, здесь опечатка, и должно быть $z^n = r^n(\sin^n A + \cos^n A)$, и поэтому правильная формула *записывается в виде* $z = r(\sin^n A + \cos^n A)^{1/n}$.

Так как $z < r$, *имеем очевидное неравенство* $\sin^n A + \cos^n A < 1$. *Последнее соотношение выполняется, если* $n > 2$; *при* $n = 2$ *имеем равенство. Также очевидно, что* $z < r$ *только при* $n > 2$. *Что касается величины* $\sin A + \cos A$, *то легко показать, что* $\sin A + \cos A > 1$. *Действительно, если* $\sin A$ *и* $\cos A$ *положительны, то, возведя эту величину в квадрат, имеем* $\sin^2 + \cos^2 A + 2\sin A\cos A > 1$.

Таким образом, доказательство академика А. И. Ильина также несостоятельно.

Дорогие читателя, может я не прав, поэтому жду Вашего мнения.

С уважением, А. А. Рухадзе, профессор, член редколлегии журнала "Прикладная физика".

Поступила в редакцию 17 марта 2006 г.

Evidences of Great Ferma Theorem Using the Methods of Elementary Mathematics

A. A. Rukhadze
General Physics Institute, Moscow, Russia

* * *