

УДК 621.385:537.533

## О расчете интенсивных пучков заряженных частиц методом итераций по подобластям без налегания

В. М. Свешников

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
г. Новосибирск, Россия

*Предложена и реализована новая математическая модель задачи расчета интенсивных пучков заряженных частиц, основанная на декомпозиции расчетной области  $G$  на прикатодную  $G_c$  и основную  $G_b$  подобласти, которые сопрягаются без налегания. При этом решение исходной задачи ищется как решение системы нелинейных уравнений, каждое из которых представляет собой разность между нормальными составляющими электрического поля слева и справа от границы сопряжения подобластей  $\Gamma_{cb}$ . Предложен и реализован метод итераций по подобластям для решения данной системы нелинейных уравнений, особенностью которого является то, что при построении решений в  $G_c$  и  $G_b$  на  $\Gamma_{cb}$  в качестве граничного условия задается распределение потенциала электрического поля в обеих подобластях. Даются примеры численных расчетов.*

Метод итераций по подобластям применительно к решению задач расчета интенсивных пучков заряженных частиц, эмиссия которых происходит в режиме ограничения тока объемным зарядом, выполняет две функции. Во-первых, он является методом нахождения плотности тока на катоде и, во-вторых, служит средством выделения прикатодной особенности, состоящей в том, что плотность объемного заряда на катоде обращается в бесконечность. Суть данного метода заключается в декомпозиции расчетной области  $G$  на прикатодную  $G_c$  и основную  $G_b$  подобласти и организации итерационного процесса по "сшивке" подобластей. Решение в прикатодной области строится по аналитическим формулам антипараксиальной теории В. А. Сырового [1], а в основной подобласти находится численно. Такой подход повышает точность расчетов по сравнению с традиционными алгоритмами, использующими закон "3/2" для плоского диода [2], за счет того, что в нем учитываются кривизна катода, неоднородность плотности тока, прикатодная особенность и то, что стартовая поверхность входа частиц в область при численных расчетах отодвигается от особой поверхности катода.

Ранее метод итераций по подобластям без налегания для решения данных задач рассматривался в работах [3, 4], в которых антипараксиальные разложения в прикатодной подобласти строились по распределению нормальной производной от потенциала, а численные расчеты в основной подобласти проводились с использованием распределения самого потенциала на границе сопряжения подобластей  $\Gamma_{cb}$ , т. е. при переходе из одной подобласти в другую менялся тип граничного условия. Особенностью настоящего подхода, его новизной является то, что при проведении итерационного процесса по подобластям их "сшивка" осуществляется без налегания, причем на  $\Gamma_{cb}$  задается распределение потенциала электрического поля в обеих подобластях. При этом решение исходной задачи ищется как решение системы нелинейных уравнений, каждое из которых представляет собой разность между нормальными

составляющими электрического поля слева и справа от  $\Gamma_{cb}$ . Предложен и реализован итерационный метод решения данной системы уравнений. Рассмотрены алгоритмические аспекты проведения вычислений, необходимых для реализации итерационного процесса, в прикатодной и основной подобластях.

Даются результаты численных экспериментов на тестовых задачах, которые свидетельствуют о сходимости предложенного метода и о том, что погрешность решения рассматриваемых задач достигает десятых и даже сотых долей процента на простых по конструкции прямоугольных сетках с числом узлов порядка 2000—8000, характерным для практических расчетов.

### Метод итераций по подобластям

Рассматривается задача расчета интенсивного стационарного пучка заряженных частиц в замкнутой двухмерной области  $\bar{G} = G \cup \Gamma$ , где  $\Gamma$  — граница области  $G$ . Математически данная проблема сводится к решению нелинейной самосогласованной задачи, постановка которой приведена, например, в работе [2]. Ниже рассмотрен практически важный случай, когда эмиссия частиц происходит в режиме ограничения тока объемным зарядом. Данный режим эмиссии имеет следующую специфику: во-первых, плотность тока на катоде является неизвестной величиной, подлежащей определению, и, во-вторых, рассматриваемая задача имеет особенность — плотность объемного заряда на катоде обращается в бесконечность. Соответственно метод итераций по подобластям применительно к решению данных задач выполняет две функции: он является методом нахождения плотности тока на катоде и служит средством выделения прикатодной особенности. Предлагаемый подход заключается в следующем.

Разобьем расчетную область  $G$  линией  $\Gamma_{cb}$  на две подобласти  $G_c$  и  $G_b$  такие, что  $G = G_c \cup G_b \cup \Gamma_{cb}$ . Их

замыкания есть  $\overline{G_c} = G_c \cup \Gamma_c$ ,  $\overline{G_b} = G_b \cup \Gamma_b$ , где границы  $\Gamma_c, \Gamma_b$  удовлетворяют равенствам  $\Gamma_c = \Gamma_c^0 \cup \Gamma_{cb}$ ,  $\Gamma_b = \Gamma_b^0 \cup \Gamma_{cb}$ ,  $\Gamma_c^0 \cup \Gamma_b^0 = \Gamma$ , причем  $\Gamma_c^0$  включает катод  $C$ . В дальнейшем  $\overline{G_c}$  будем называть прикатодной подобластью, а  $\overline{G_b}$  — основной подобластью. Решение исходной задачи будем искать путем построения последовательных приближений в данных подобластях. Каждое приближение в прикатодной подобласти  $\overline{G_c}$  строится на основе аналитической антипараксиальной теории В. А. Сырового [1], а в основной области  $\overline{G_b}$  — численно. Антипараксиальная теория по заданному на  $\Gamma_{cb}$  распределению потенциала дает плотность тока и фазовые координаты пучка, которые затем используются при численном решении самосогласованной задачи с известной плотностью тока в  $\overline{G_b}$ . Проблема заключается в том, чтобы найти на границе  $\Gamma_{cb}$  такое распределение потенциала, которое давало бы решение исходной задачи.

"Сшивку" подобластей будем осуществлять итерационным методом без налегания, который применительно к решению данной задачи рассматривался ранее в работах [3, 4], где на  $\Gamma_{cb}$  в процессе последовательных приближений задавалось распределение производной от потенциала для поиска антипараксиального решения в  $\overline{G_c}$  и распределение самого потенциала — для поиска численного решения в  $\overline{G_b}$ . Антипараксиальные разложения в этом случае имеют меньшую асимптотическую точность по сравнению с тем вариантом, когда они строятся по распределению потенциала на  $\Gamma_{cb}$ . Предлагаемый в настоящей работе подход свободен от указанного недостатка. Его принципиальной новизной является то, что итерационный процесс по подобластям имеет специальный вид, в котором на каждом приближении на  $\Gamma_{cb}$  задается распределение потенциала при построении решения и в той и в другой подобластях.

Запишем условия сопряжения для потенциала  $\varphi$  на границе сопряжения подобластей  $\Gamma_{cb}$  в виде

$$(\varphi)_c = (\varphi)_b, \quad (1)$$

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right)_c = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right)_b, \quad (2)$$

где  $\vec{n}$  — нормаль к  $\Gamma_{cb}$ , а индексы  $c, b$  означают, что величины в скобках относятся, соответственно, к подобластям  $\overline{G_c}$  и  $\overline{G_b}$ .

Направление нормали в данном случае не важно, но для определенности положим, что  $\vec{n}$  — это внутренняя нормаль по отношению к  $\overline{G_b}$ . Условия (1), (2) должны выполняться на решении исходной задачи. Если же на  $\Gamma_{cb}$  задан произвольный потенциал  $u$ , то условие (1) выполняется, а условие (2) — нет. Производные в формуле (2) являются функциями, зависящими от  $u$ . Введем обозначения

$$f_c(u) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right)_c, \quad f_b(u) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right)_b, \quad (3)$$

$$\Phi(u) = f_c(u) - f_b(u).$$

Согласно антипараксиальной теории распределение потенциала  $u$  на  $\Gamma_{cb}$  определяет распределение плотности тока  $j$  на катоде. В связи с этим мы можем сформулировать исходную самосогласованную задачу по отысканию плотности тока  $j$  следующим образом: найти такое распределение потенциала  $u$ , при котором выполняется условие (2), что, в свою очередь, эквивалентно решению нелинейного уравнения

$$\Phi(u) = 0, \quad (4)$$

определенного на  $\Gamma_{cb}$ . Решение уравнения (4) можно осуществлять известными методами решения нелинейных уравнений [5].

При дискретизации потока заряженных частиц катод  $C \in \Gamma$  разбивается на заданное число  $N_t$  интервалов, из центров  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N_t$ ) которых запускаются трубки тока или траектории [2]. Пусть  $\vec{r}_i$  — нормальные проекции  $r_i$  на  $\Gamma_{cb}$ . Рассмотрим уравнение (4) в точках  $\vec{r}_i$ . Тогда  $u = \{u_j\}$  является вектором,  $\Phi = \{\Phi_j\}$  — вектор-функцией, а соотношения (4) представляют собой систему нелинейных уравнений ( $i = 1, 2, \dots, N_t$ ).

В настоящей работе для решения уравнений (4) предлагается итерационный процесс вида

$$u^{n+1} = (I + \tau_n \overline{\Phi}^n) u^n, \quad (5)$$

где  $I$  — единичная матрица,  $\overline{\Phi}^n = \text{diag} \left\{ \frac{\Phi_i^n}{\Phi_i^0} \right\}$  — диагональная матрица, а  $\tau_n$  — числовой параметр, который определяется как

$$\tau_{n+1} = \begin{cases} \tau_n, & \text{если } \|\Phi^{n+1}\| \leq \|\Phi^n\|; \\ \frac{1}{2} \tau_n, & \text{если } \|\Phi^{n+1}\| > \|\Phi^n\|, \end{cases}$$

где  $\|\cdot\|$  — какая-либо норма в метрическом пространстве функций, определенных на  $\Gamma_{cb}$ , а  $\tau_0$  — задано.

Итерационный процесс прекращается при выполнении хотя бы одного из двух условий

$$\frac{\|\Phi^n\|}{\|\Phi^0\|} < \varepsilon, \quad \tau_n < \varepsilon, \quad (6)$$

где  $\varepsilon$  — заданная малая величина.

Выполнение только одного последнего неравенства (6) означает, что выбрано начальное приближение для итерационного процесса (5), далекое от решения. С учетом этого замечания можно утверждать следующее: если итерационный процесс (5) сходится, то он сходится

ся к решению  $u = u^*$  системы уравнений (4) и, с другой стороны, при  $u^n = u^*$  достигается сходимость данного итерационного процесса.

Обычно полагается  $\tau_0 = 1$ . Выбор начального приближения  $u^0$  и  $\Phi^0$  осуществляется следующим образом. До проведения итераций (5) во всей расчетной области  $\bar{G}$  численно решается уравнение Лапласа для потенциала  $\varphi$  с заданными граничными условиями, т. е. рассчитывается внешнее электрическое поле без учета собственного поля пучка заряженных частиц. Вычисляется распределение потенциала  $\hat{u}^0$  на  $\Gamma_{cb}$ , а затем полагается  $u^0 = \omega \hat{u}^0$ , где  $0 < \omega < 1$  – заданный числовой параметр. Далее согласно антипараксиальной теории вычисляются плотность тока, начальные координаты и скорости частиц на  $\Gamma_{cb}$  и численно рассчитывается пучок заряженных частиц в основной подобласти, а затем полагается  $\Phi_i^0 = \Phi_j(u^0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_t$ .

**Расчеты в прикатодной и основной подобластях**

Предположим, что прикатодная подобласть  $\bar{G}_c$  имеет специальный вид, при котором граница сопряжения  $\Gamma_{cb}$  подобластей  $\bar{G}_c$  и  $\bar{G}_b$  представима в виде  $\Gamma_{cb} = \Gamma_{cb}^1 \cup \Gamma_{cb}^2$ , где  $\Gamma_{cb}^1$  является геометрическим местом точек, равноудаленных от катода на малое расстояние  $d$  по нормали к нему, а  $\Gamma_{cb}^2$  — это отрезки нормали, ограничивающие пучок заряженных частиц (рис. 1). Такой выбор прикатодной подобласти обеспечивает, как следует из дальнейшего, равное удаление точек старта заряженных частиц в численных расчетах от особой поверхности катода. Катод  $C$  предполагается кусочно-гладкой кривой, состоящей из  $N_C$  отрезков  $C_i$ , обладающих достаточной для дальнейших выкладок гладкостью, т. е.  $C = \bigcup_{i=1}^{N_C} C_i$ . На каждом из  $C_i$  может

быть построена прикатодная подобласть  $\bar{G}_{c,i}$  со своим характерным расстоянием  $d_i$  так, что  $\bar{G}_c = \bigcup_{i=1}^{N_C} \bar{G}_{c,i}$ , а в каждой подобласти  $\bar{G}_{c,i}$  может быть построено аналитическое решение согласно антипараксиальной теории. В дальнейшем без ограничения общности изложение ведется для одного достаточно гладкого отрезка катода (индекс  $i$  при этом опускается). Отметим также, что на практике катод с приемлемой точностью может быть аппроксимирован отрезками прямых и дугами окружностей, что в данном приближении обеспечивает существование достаточно гладкой границы  $\Gamma_{cb}^1$ .

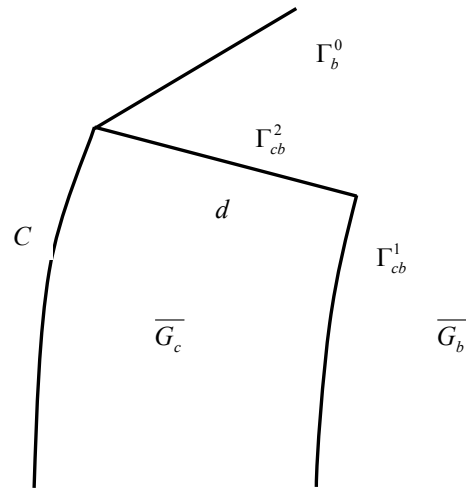


Рис. 1. Прикатодный фрагмент расчетной области

В работе [1] были получены разложения потенциала электрического поля в ряд по степеням малого параметра  $s$ , которые мы запишем в виде

$$\varphi = \left( \frac{j}{c_j} \right)^{2/3} s^{4/3} (F + s^2 L_j); \quad (7)$$

$$F \equiv F(s) = 1 + \frac{8}{15} T s + \frac{83}{225} T^2 s^2 - \frac{7}{18} K s^2; \quad (8)$$

$$L_j = \frac{4}{45} \left( K_1 \bar{j}' - \bar{j}'' \right) + \frac{13}{450} \bar{j}'^2, \quad (9)$$

где

$$\bar{j}' = \frac{j'}{j}, \quad \bar{j}'' = \frac{j''}{j},$$

а  $c_i$  — константа, зависящая от сорта частиц, например, для электронов  $c_j \approx 2,33 \cdot 10^{-6}$ . Здесь предполагается, что в подобласти  $\bar{G}_c$  введена ортогональная система координат  $s, l$  с началом координат в точке, лежащей на катоде, где  $s \leq d$  — расстояние по нормали к катоду, а  $l$  — длина дуги вдоль катода,  $j = j(l)$  — плотность тока на катоде. Величины  $T, K, K_1$ , входящие в формулы (8), (9), — это кривизны катода, которые выражаются как

$$T = \kappa_1 + \kappa_2, \quad K = \kappa_1 \kappa_2, \quad K_1 = -\frac{R'}{R},$$

$$\kappa_1 = -\frac{R''}{Z'}, \quad \kappa_2 = \frac{Z'}{R},$$

где  $r = R(l), z = Z(l)$  — параметрические уравнения катода. В плоских задачах здесь под  $r, z$  понимается, соответственно,  $x, y$  и полагается  $\kappa_2 = K_1 = 0$ .

Эти разложения получили название антипараксиальных, чтобы подчеркнуть тот факт, что они приме-

нимы не только для описания узких пучков вблизи оси симметрии, но и для описания широких пучков большого радиуса.

Антипараксиальные разложения (7)—(9) представляют собой по сути нелинейные дифференциальные уравнения относительно плотности тока  $j$ . В работах В. А. Сырового предлагается решать их итеративно. Аналогичный результат можно получить другим способом, представив плотность тока в точке  $(0, l_0)$  в виде ряда

$$j = A^{3/2} (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2). \quad (10)$$

Здесь  $\lambda = l_c - l_0$ , где  $l_c$  — координата точки на катоде, а коэффициенты  $A, a_1, a_2$  не зависят от  $\lambda$ .

В работе [6] найдены приближенные значения данных коэффициентов, которые вместе с формулой (10) дают следующие выражения для плотности тока и ее производных:

$$j = c_j \frac{u^{3/2}}{d^2 (F + d^2 L)^{3/2}}; \quad (11)$$

$$L = \frac{2}{15} (K_1 \bar{u}' - \bar{u}'') - \frac{1}{600} \bar{u}'^2; \quad (12)$$

$$\bar{j}' = \frac{3}{2} \bar{u}', \quad \bar{j}'' = \frac{3}{4} (\bar{u}'^2 + 2\bar{u}''), \quad (13)$$

где

$$\bar{u}' = \frac{1}{u} \frac{du}{dl}, \quad \bar{u}'' = \frac{1}{u} \frac{d^2 u}{dl^2}.$$

Здесь  $F$  определяется по формуле (8), потенциал  $u$  и его производные рассматриваются в точке  $(d, l_0) \in \Gamma_{cb}^1$ , а  $\bar{l}$  — это длина дуги кривой  $\Gamma_{cb}^1$ , которая отсчитывается от точки, лежащей на данной кривой и представляющей собой нормальную проекцию начала координат системы  $(s, l)$ . Члены  $F, L$  "отвечают", соответственно, за криволинейность катода и за неоднородность плотности тока.

Из последних равенств следует, что  $\bar{L}_i = L$  и потенциал  $\varphi$  во всей прикатодной подобласти  $\bar{G}_c$ , в том числе на  $\Gamma_{cb}^2$ , рассчитывается по формуле

$$\varphi = u \left( \frac{s}{d} \right)^{4/3} \frac{F(s) + s^2 L}{F(d) + d^2 L}. \quad (14)$$

Для реализации итерационного процесса по подобластям необходимо вычисление производных от потенциала на  $\Gamma_{cb}^1$ , входящих в (3). При этом удобнее вместо нормальной производной вычислять производную по  $s$ , которая в отмеченном выше способе аппроксимации катода равна производной по нормали. В прикатодной подобласти  $\bar{G}_c$  она с принятой асимптотической точностью вычисляется как

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)_c = \frac{4u (F(d) + 0,75dF_s'(d) + 2,5d^2L)}{3d (F(d) + d^2L)}.$$

Поверхностью старта заряженных частиц при численных расчетах в основной подобласти  $\bar{G}_b$  является  $\Gamma_{cb}^1$ . Координаты частиц на  $\Gamma_{cb}^1$  в локальной декартовой системе  $X, Y$ , в которой ось  $X$  направлена по нормали к катоду, а  $Y$  — по касательной к нему с началом координат в точке старта, рассчитываются согласно антипараксиальной теории как

$$Y = \frac{\bar{j}'}{10} X^2,$$

а их скорости  $v_{cb}$  вычисляются по формуле  $v_{cb} = \sqrt{-2\eta u}$ , где  $\eta$  — отношение заряда к массе частицы. Расчет объемного заряда осуществляется по алгоритму, изложенному в работе [7].

Вычисление производной на  $\Gamma_{cb}^1$  в  $\bar{G}_b$  осуществляется численно по формуле

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)_b = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \alpha_y,$$

где  $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y$  — направляющие косинусы;  $x, y$  — декартовы или цилиндрические координаты (в последнем случае  $x, y$  означают, соответственно,  $r, z$ ).

Производные  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ , а также потенциал  $u$ , входящий в (14), в точке старта  $\bar{r}_{cb} \in \Gamma_{cb}^1$ , которая в общем случае не совпадает с узлом сетки, вычисляются с помощью билинейной приближающей функции, построенной по значениям соответствующих величин в вершинах сеточного элемента, содержащего  $\bar{r}_{cb}$  [4]. Расчет производных от потенциала вдоль  $\Gamma_{cb}^1$ , входящих в (11)—(13), также проводится по разностным формулам второго порядка точности.

Приведенный алгоритм обеспечивает удаление стартовой поверхности пучка заряженных частиц при численных расчетах от особой поверхности катода  $S$ , но в данном виде сложнее в реализации по сравнению с традиционными алгоритмами, что могло бы служить серьезным тормозом в его практическом применении. Действительно, непосредственная реализация предложенного алгоритма требует описания вместо одной области  $\bar{G}$  двух подобластей  $\bar{G}_c$  и  $\bar{G}_b$  как самостоятельных объектов, хотя такое разделение на подобласти носит искусственный нефизический характер с точки зрения стороннего пользователя.

Этот недостаток можно устранить следующим образом. Покроем всю расчетную область  $\bar{G}$  сеткой  $\Omega_h$ . Множество узлов сетки  $\Omega_h$  можно представить в виде  $\Omega_h = \Omega_c^h \cup \Omega_b^h$ , где  $\Omega_c^h$  — множество узлов прикатод-

ной области, а  $\Omega_b^h$  — множество узлов основной области.

В узлах  $\Omega_c^h$  решение строится по аналитическим формулам антипараксиальной теории. Пусть  $\bar{\Omega}_c^h \subset \Omega_c^h$  — множество узлов  $\Omega_c^h$ , имеющих в качестве соседа хотя бы один узел из  $\Omega_b^h$ . Будем использовать потенциал в узлах  $\bar{\Omega}_c^h$  в качестве граничного условия при численном расчете потенциала в  $\bar{G}_b$ , что означает замену на данном этапе решения задачи границы  $\Gamma_{cb}^1$  ломаной, соединяющей узлы  $\bar{\Omega}_c^h$ . Такой подход упрощает технологию реализации рассмотренного алгоритма итераций по подобластям, делая ее сравнимой с реализацией традиционных алгоритмов, так как при этом не происходит фактического разбиения расчетной области, а декомпозиция осуществляется на сеточном уровне.

Отметим, что размер прикатодной подобласти  $\bar{G}_c$  мы предполагаем таким, что должно выполняться неравенство

$$d > h, \tag{15}$$

где  $h$  — максимальный шаг сетки в подобласти  $\bar{G}_c$ .

### Численные эксперименты

В проведенных численных экспериментах решались задачи расчета сферического диода [8], потока Мельтцера [9] и пушки Пирса [10] по алгоритмам, предложенным в настоящей статье. На примере решения задачи о сферическом диоде демонстрируется влияние криволинейности катода на точность решения, на примере задачи о потоке Мельтцера — влияние неоднородности плотности тока (катод при этом является прямолинейным), а расчет пушки Пирса — это пример расчета элемента практической конструкции. Все задачи имеют аналитические решения.

Расчеты проводились на прямоугольных сетках с различным числом узлов и при различных прикатодных расстояниях. Выбор именно прямоугольных сеток не случаен, так как при этом отслеживается влияние предложенного подхода на точность расчетов, проводимых на простых по конструкции сетках. Параметр релаксации, который фигурирует в описании итерационного алгоритма, полагался равным  $\omega = 0,1$ , а  $\|\Phi\| = \max_i |\Phi_i|$ .

Численные эксперименты показали, что во всех случаях итерационный процесс по подобластям (5) прекращался при выполнении первого неравенства (6). При этом значение итерационного параметра  $\tau_n$  уменьшалось не более чем в 8 раз.

### Сферический диод

Аналитическое решение задачи в сферическом диоде  $r_a \leq r \leq r_c$ , где  $r_a, r_c$  — соответственно, радиусы анода и катода, определяется по формулам [8]

$$j = c_j \frac{\varphi_a^{3/2}}{[-\alpha(r_a)]^2 r_c^2}; \quad \varphi = \varphi_a \left[ \frac{-\alpha(r)}{-\alpha(r_a)} \right]^{4/3}.$$

Здесь  $\alpha$  — функция Ленгмюра, которая представлена в виде ряда

$$-\alpha = -\mu + 0,3\mu^2 - 0,075\mu^3 + 0,0143182\mu^4 - 0,0021609\mu^5 + 0,00026791\mu^6 - \dots,$$

где  $\mu = \ln \frac{r}{r_c}$ .

Расчетная область изображена на рис. 2 и заключена между двумя концентрическими полуокружностями с радиусами анода  $r_a = 1$  и катода  $r_c = 2$ . Задача является осесимметричной. Она рассматривается в цилиндрических координатах, причем ось  $z$  является осью симметрии системы. Расчеты проводились на различных сетках  $\Omega_h^j$  с числом узлов по  $r$  и  $z$ , соответственно,  $m_r^j = 2^{i+3}$ ,  $m_z^j = 2^{i+4}$ ,  $i = 1, 2, 3$  и при различных

прикатодных расстояниях  $d_k = \frac{r_c - r_a}{2^{k+1}}$ ,  $k = 1, 2$ . По-

грешности  $\delta_\varphi^i, i = 1, 2, 3$  рассчитывались, соответственно, в точках  $(1,25; 0), (1,5; 0), (1,75; 0)$ . Погрешности отклонения траекторий  $\delta_t^i, i = 1, 2, \dots, N_t$  в данном случае вычислялись как  $\delta_t^i = \frac{\xi_i}{r_c} 100$ , где  $\xi_i$  — длина

перпендикуляра, проведенного из конечной точки траектории к радиусу, проходящему через ее начальную точку

(в точном решении траектории идут по радиусам).

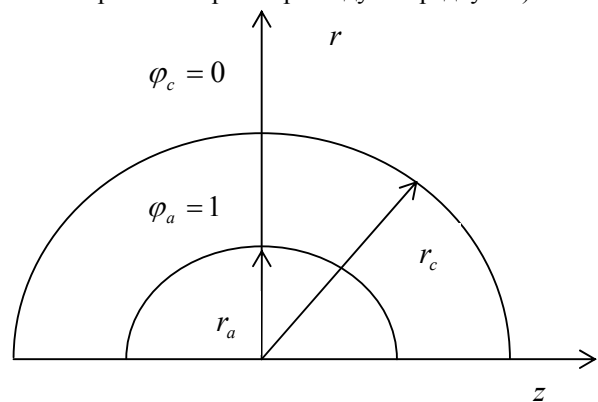


Рис. 2. Расчетная область в задаче о сферическом диоде

Погрешности, полученные в результате численных расчетов, приведены в табл. 1.

Из данной таблицы можно сделать следующие выводы:

- погрешности уменьшаются с увеличением числа узлов сетки;
- уменьшение прикатодного расстояния  $d_k$  приводит к увеличению погрешностей расчета траекторий  $\bar{\delta}_t$ , так как с уменьшением  $d_k$  стартовая поверхность

заряженных частиц в численных расчетах приближается к особой поверхности катода. Поведение остальных погрешностей при этом не является монотонным, что обусловлено сложным характером взаимодействия погрешностей расчетов в прикатодной и основной подобластях.

Таблица 1

Относительные погрешности расчета сферического диода

$\Omega_h^i$		$\delta_\varphi^1$	$\delta_\varphi^2$	$\delta_\varphi^3$	$\bar{\delta}_j$	$\bar{\delta}_t$
16×32	$d_1$	0,46	0,68	1,3	1,1	0,070
	$d_2$	0,90	1,5	1,1	4,5	0,16
32×64	$d_1$	0,12	0,19	0,24	0,66	0,026
	$d_2$	0,18	0,24	0,053	0,44	0,046
64×128	$d_1$	0,030	0,060	0,13	0,34	0,007
	$d_2$	0,033	0,018	0,14	0,20	0,014

Примечание:  $\delta_\varphi^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  — относительные погрешности расчета потенциала в процентах, которые вычисляются как  $\delta_\varphi^i = \left| \frac{\varphi_h^i - \varphi^*}{\varphi^*} \right| 100$ , где  $\varphi_h^i$  — приближенные, а  $\varphi^*$  — точные значения потенциала;

$\bar{\delta}_j$ ,  $\bar{\delta}_t$  — средние относительные погрешности расчета, соответственно, плотности тока и траекторий в процентах, которые вычисляются по формуле  $\bar{\delta} = \frac{1}{N_t} \sum \delta^i$ , где  $\bar{\delta} = \bar{\delta}_j$ ,  $\bar{\delta}_t$ , а  $\delta^i = \delta_\varphi^i$ ,  $\delta_t^i$  — относительные погрешности расчета плотности тока в точках вылета заряженных частиц и относительные погрешности расчета траекторий, выходящих из данных точек, причем  $\delta_j^i$  определяется аналогично  $\delta_\varphi^i$ , а определение  $\delta_t^i$  дается при описании конкретной задачи.

Отметим, что уменьшение погрешностей с увеличением числа узлов сетки является далеко не очевидным результатом для данных задач. Как показали эксперименты, проведенные даже на простейшей задаче о плоском диоде, погрешности в расчетах без выделения прикатодной особенности с увеличением числа узлов сетки не только не уменьшаются, а, наоборот, возрастают [4].

Результаты сходимости итерационного процесса по подобластям представлены в табл. 2, из которой следует, что число итераций  $N_I$  хотя и незначительно, но увеличивается с увеличением числа узлов сетки.

Таблица 2

Число итераций по подобластям в задаче о сферическом диоде

$\Omega_h^j$		16×32	32×64	64×128
$N_I$	$d_1$	8	9	11
	$d_2$	9	9	13

Примечание.  $N_I$  — число итераций, которое потребовалось для сходимости итерационного процесса по подобластям с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Рассматривалась задача о движении электронного пучка в поле, аналитическое выражение для которого есть [9]

$$2\varphi = r^{-2} \sin^{4/3} \left( \frac{3}{2} \psi \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (16)$$

$$\psi = \arctg \frac{x}{y}.$$

В этом случае катодом является отрезок прямой  $x = 0$ , траектории представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат, а плотность тока равна

$$j = \frac{9c_j}{8\sqrt{2}} y^{-5}.$$

Для численных расчетов выбиралась область, изображенная на рис. 3, где показано поведение траекторий (точечные линии). Радиус внешней окружности —  $R = 4$ . Катодом являлся отрезок  $x = 0$ ,  $y_b \leq y \leq y_e$ , где  $y_b = 2$ ,  $y_e = 3,95$ . На границе области ставилось условие для потенциала согласно формуле (16).

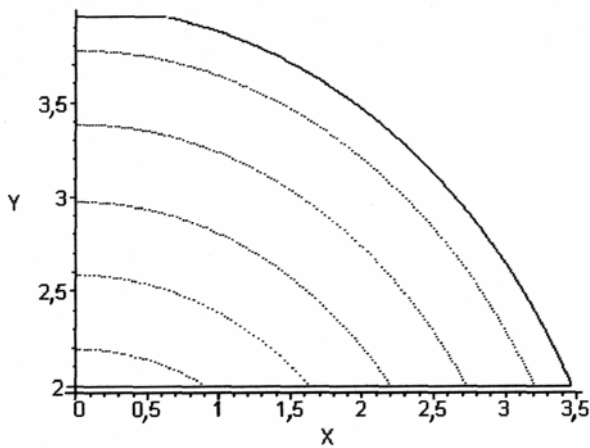


Рис. 3. Расчетная область в задаче о потоке Мельтцера

Расчеты проводились на сетках  $\Omega_h^i$  с числом узлов по  $x$  и  $y$ , соответственно,  $m_x^i = 2^{i+2}$ ,  $m_y^i = 7 \times 2^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , что дает приблизительно равные шаги по обоим переменным. Прикатодные расстояния выбирались равными

$d_k = \frac{R}{7 \times 2^{k-1}}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Погрешности расчета потенциала  $\delta_{\phi}^i$ ,  $i = 1, 2$  вычислялись в точках с координатами по  $x$ , соответственно,  $\frac{R}{14}$ ,  $\frac{3R}{14}$  и при  $y = \frac{y_b + y_e}{2}$ . Величины  $\delta_t^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_t$  в данном случае определяются отклонением численного значения координаты по  $x$  от соответствующего точного значения при заданном  $y$ .

С целью оценки влияния антипараксиальных разложений на точность вычислений прикатодная область рассчитывалась в двух вариантах:

- 1) с учетом производных от плотности тока, т. е. согласно антипараксиальной теории;
- 2) без учета производных от плотности тока, т. е. фактически по закону "3/2" для плоского диода.

В табл. 3, в которой приведены погрешности расчета потока Мельтцера, для каждого набора счетных параметров даны две цифры: верхняя — относится к первому варианту расчета прикатодной области, а нижняя — ко второму. Прочерки в таблице означают, что для данного набора параметров расчеты не проводились из-за того, что не выполнялось неравенство (15).

Таблица 3

Относительные погрешности расчета потока Мельтцера

$\Omega_h^i$	$\delta_{\phi}^1$			$\delta_{\phi}^2$			$\bar{\delta}_j$			$\bar{\delta}_t$		
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_1$	$d_2$	$d_3$
8×14	3,7	7,8	—	1,4	0,97	—	5,2	12	—	3,0	0,73	—
	15	10	—	4,8	0,80	—	23	17	—	9,7	1,5	—

Окончание табл. 3

$\Omega_h^i$	$\delta_{\phi}^1$			$\delta_{\phi}^2$			$\bar{\delta}_j$			$\bar{\delta}_t$		
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_1$	$d_2$	$d_3$
16×28	1,0	1,5	0,77	0,50	0,18	1,8	1,7	1,6	6,8	4,2	1,3	0,24
	12	3,9	0,64	3,6	0,62	1,8	18	6,9	8,4	11	3,6	0,55
32×56	0,45	0,35	0,20	0,36	0,15	0,39	3,0	1,2	1,7	4,5	1,7	0,57
	10	2,7	4,7	3,2	0,37	0,35	16	5,1	2,2	11	4,1	1,3

Приведенные в табл. 3 результаты позволяют сделать следующие выводы:

- погрешности в расчетах с применением антипараксиальной теории приблизительно в 2—10 раз меньше соответствующих погрешностей в расчетах с использованием закона "3/2";
- поведение погрешностей при изменении прикатодного расстояния и числа узлов сетки не является монотонным. Причиной тому может служить сложный характер взаимодействия погрешностей, вносимых на различных этапах решения рассматриваемой самосогласованной задачи [2].

Итерационный процесс по подобластям проводился в два этапа. На первом этапе сходимость с заданной точностью достигалась без учета неоднородности плотности тока вдоль катода, что в данной задаче означает применение закона "3/2" ( $L = 0$  в формуле (11)).

Это вызвано тем, что на первых итерациях приближения далеки от решения, поэтому вычисление производных, входящих в  $L$ , дает большие погрешности. Расчеты второго этапа были продолжением расчетов первого этапа при  $L \neq 0$ . Суммарное по двум этапам число итераций, которые потребовались для достижения заданной точности, приведено в табл. 4, где в скобках указано число итераций первого этапа. Из данной таблицы видно, что число итераций растет с увеличением числа узлов сетки.

Таблица 4

Число итераций по подобластям в задаче о потоке Мельтцера

$\Omega_h^i$	$d_1$	$d_2$	$d_3$
8×14	19(11)	14(9)	—

16×28	27(15)	19(7)	15(9)
32×56	27(17)	26(16)	18(11)

Поведение нормы невязки  $\|\Phi^n\|$  в расчетах на сетке  $\Omega_h^3$  с прикатодным расстоянием  $d_1$  показано на рис. 4. Скачок нормы невязки на 17-й итерации как раз и объясняется включением в расчеты члена  $L$ . Кроме того, из данного рисунка видно, что невязка быстро падает на первых итерациях, и подавляющий объем вычислений приходится на "доитерирование" приближений.

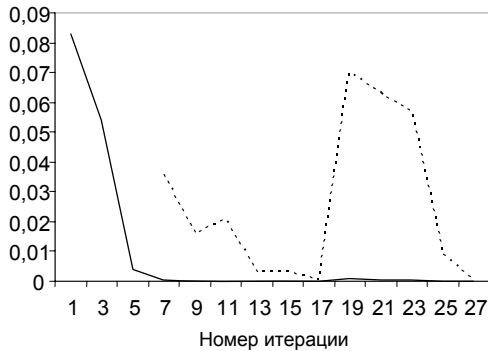


Рис. 4. Поведение невязки в задаче о потоке Мельцера  
 — невязка; - - - невязка×100

**Пушка Пирса**

Рассматривалась задача о расчете пушки Пирса [10], формирующей параллельный поток. Она имеет большое практическое значение, так как пушка Пирса является составляющим элементом многих практических конструкций.

Геометрия расчетной области, поведение траекторий и эквипотенциальных линий показаны на рис. 5. Задача плоская, ось  $x$  — это ось симметрии системы. Катодом является отрезок прямой  $x = 0, |y| \leq y_0$ , где  $y_0 = 1$ . Потенциал в расчетной области вне пучка представлен в виде

$$\varphi = cr^{4/3} \cos\left(\frac{4}{3}\psi\right), \quad r = \sqrt{x^2 + \bar{y}^2},$$

$$\psi = \arctg \frac{\bar{y}}{x}, \quad \bar{y} = |y| - y_0,$$

где  $c$  — константа, которая определяется из граничных условий и размеров системы и в данном случае равна  $c = 5^{-4/3}$ .

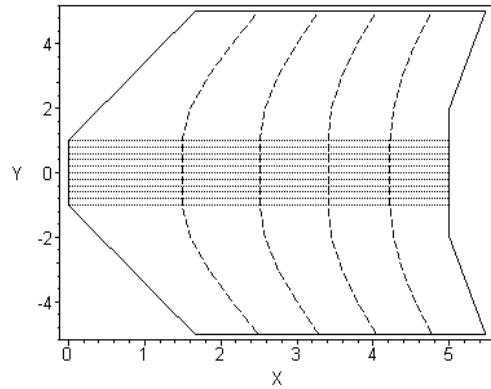


Рис. 5. Расчетная область, траектории, эквипотенциалы в задаче о пушке Пирса

Расчеты проводились на двух сетках и при различных прикатодных расстояниях  $d_k = 2hk, k = 1, 2, 3$ . Максимальные относительные погрешности  $\delta_\varphi, \delta_j, \delta_t$  расчета, соответственно, потенциала, плотности тока и траекторий в процентах приведены в табл. 5.

Таблица 5

Относительные погрешности расчета пушки Пирса

$\Omega_h^i$	$\delta_\varphi$			$\delta_j$			$\delta_t$		
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_1$	$d_2$	$d_3$
40×52	3,2	1,8	0,86	5,8	3,1	1,4	4,2	2,2	1,2
80×104	1,5	0,64	0,60	3,0	1,6	1,1	2,1	1,5	0,46

Из данной таблицы можно сделать выводы, аналогичные выводам из анализа решения двух предыдущих модельных задач, а именно: погрешности уменьшаются с измельчением сетки, т. е. с увеличением числа узлов, а также с увеличением прикатодного расстояния (здесь  $d_1 < d_2 < d_3$ ).

Работа поддержана грантами  
 РФФИ 05-01-00487 и "Университеты России"  
 УР.03.01.194

**Литература**

1. Сыровой В. А. // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36. № 3. С. 540.
2. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. — М.: Наука, 1985.
3. Свешников В. М., Сыровой В. А. // Журн. вычисл. мат. и матем. физики. 1990. Т. 30. № 11. С. 1675.
4. Свешников В. М. // Прикладная физика. 2004. № 1. С. 55.
5. Бахвалов Н. С. Численные методы. — М.: Наука, 1973.
6. Свешников В. М. // Международная конференция по вычислительной математике (МКВМ-2004). — Новосибирск, 2004. С. 642.
7. Свешников В. М. // Прикладная физика. 2004. № 1. С. 50.
8. Lengmuir I., Blodgett K. B. // Phys. Rev. 1924. V. 24. № 1. P. 49.
9. Meltzer B. // J. Electron. 1956. V. 2. № 2. P. 118.
10. Алямовский И. В. Электронные пучки и электронные пушки. — М.: Сов. радио. 1966.

Статья поступила в редакцию 22 декабря 2005 г.



## About calculation of intensive charged particle by the iterative method on subdomains without intersection

V. M. Sveshnikov

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

*The new mathematical model of calculating the charged particle beams, based on decomposition of the initial domain  $G$  to the nearcathode  $G_c$  and the basic  $G_b$  subdomains which are interfaced without intersection is offered and realized. The solution of an initial problem is found as solution of the nonlinear equations system. Every equation in the system is a difference between the normal components of an electric field to the left and to the right from interfaced boundary  $\Gamma_{cb}$ . The iterative process for solving the equations system is offered and realized. In our approach, we use the potential distribution on  $\Gamma_{cb}$  for construction of the solution in both subdomains. Examples of numerical calculations are given.*

УДК 537.533

## Моделирование термоэмиссионных электронных пушек методом конечных элементов

Д. Э. Гринфельд

ФГУП «Научно-производственное объединение "Орион"» — Государственный научный центр РФ, Москва, Россия

*Особенностью численного моделирования термоэмиссионных электронных пушек является необходимость принимать во внимание вклад пространственного заряда электронно-го пучка в распределение электрического потенциала, что делает математическую модель пушки существенно нелинейной. Более того, плотность заряда крайне велика вблизи эмитирующих поверхностей и даже оказывается бесконечной в пределе нулевых начальных энергий эмитированных электронов. Для выделения этой особенности применен специальный полуаналитический подход, который вместе с традиционной техникой конечных элементов позволяет эффективно моделировать термоэмиссионные электронные пушки.*

© Гриффельд Д. Э., 2008

Задача моделирования электронных пушек встает в связи с необходимостью оптимизации конструкции различных типов электронно-лучевого оборудования — от электронных микроскопов до мощных установок технологического назначения.

Традиционная термоэмиссионная электронная пушка содержит накаливаемый катод, анод и, при необходимости, один или несколько дополнительных электродов, которые применяются для регулирования интенсивности электронного пучка и других его оптических характеристик. При математическом моделировании такой пушки также должен учитываться пространственный заряд электронного пучка, искажающий создаваемое электродами поле.

При заданном токе электронного пучка плотность пространственного заряда обратно пропорциональна скорости электронов, которая в свою очередь определяется величиной электрического потенциала. Плотность заряда наиболее велика вблизи поверхности катода, где электроны еще не ускорены полем. Известно, что пространственный заряд может образовывать узкий потенциальный барьер, отражающий некоторые из эмитированных электронов и не позволяющий им покинуть катод. Такой режим работы называют режимом ограни-

чения эмиссии пространственным зарядом (в дальнейшем для краткости —  $C$ -режимом) в отличие от режима ограничения эмиссии температурой ( $T$ -режима), в котором потенциальный барьер отсутствует и все эмитированные при данной температуре катода электроны вносят свой вклад в ток пучка. Для получения высокой яркости пучка пушки часто работают на границе этих двух режимов, когда эмиссия с одних участков катода ограничена пространственным зарядом, а с других — температурой. Компьютерное моделирование в этом случае должно проводиться особенно аккуратно.

Режим эмиссии определяется электрическим полем в ближайшей окрестности поверхности катода шириной всего в несколько микрон. Это обстоятельство определяет необходимость отделять узкую прикатодную область от остального объема пушки и применять в ней совершенно иные вычислительные алгоритмы. Такое разделение приводит к нестабильности математических моделей, в частности, к зависимости численного решения от такого искусственного параметра как ширина выделенной прикатодной области.

Для моделирования электронных пушек применялись различные методы — от модели эквивалентных