

About calculation of intensive charged particle by the iterative method on subdomains without intersection

V. M. Sveshnikov

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

The new mathematical model of calculating the charged particle beams, based on decomposition of the initial domain G to the nearcathode G_c and the basic G_b subdomains which are interfaced without intersection is offered and realized. The solution of an initial problem is found as solution of the nonlinear equations system. Every equation in the system is a difference between the normal components of an electric field to the left and to the right from interfaced boundary Γ_{cb} . The iterative process for solving the equations system is offered and realized. In our approach, we use the potential distribution on Γ_{cb} for construction of the solution in both subdomains. Examples of numerical calculations are given.

УДК 537.533

Моделирование термоэмиссионных электронных пушек методом конечных элементов

Д. Э. Гринфельд

ФГУП «Научно-производственное объединение "Орион"» — Государственный научный центр РФ, Москва, Россия

Особенностью численного моделирования термоэмиссионных электронных пушек является необходимость принимать во внимание вклад пространственного заряда электронного пучка в распределение электрического потенциала, что делает математическую модель пушки существенно нелинейной. Более того, плотность заряда крайне велика вблизи эмитирующих поверхностей и даже оказывается бесконечной в пределе нулевых начальных энергий эмитированных электронов. Для выделения этой особенности применен специальный полуаналитический подход, который вместе с традиционной техникой конечных элементов позволяет эффективно моделировать термоэмиссионные электронные пушки.

Задача моделирования электронных пушек встает в связи с необходимостью оптимизации конструкции различных типов электронно-лучевого оборудования — от электронных микроскопов до мощных установок технологического назначения.

Традиционная термоэмиссионная электронная пушка содержит накаливаемый катод, анод и, при необходимости, один или несколько дополнительных электродов, которые применяются для регулирования интенсивности электронного пучка и других его оптических характеристик. При математическом моделировании такой пушки также должен учитываться пространственный заряд электронного пучка, искажающий создаваемое электродами поле.

При заданном токе электронного пучка плотность пространственного заряда обратно пропорциональна скорости электронов, которая в свою очередь определяется величиной электрического потенциала. Плотность заряда наиболее велика вблизи поверхности катода, где электроны еще не ускорены полем. Известно, что пространственный заряд может образовывать узкий потенциальный барьер, отражающий некоторые из эмитированных электронов и не позволяющий им покинуть катод. Такой режим работы называют режимом ограни-

чения эмиссии пространственным зарядом (в дальнейшем для краткости — C -режимом) в отличие от режима ограничения эмиссии температурой (T -режима), в котором потенциальный барьер отсутствует и все эмитированные при данной температуре катода электроны вносят свой вклад в ток пучка. Для получения высокой яркости пучка пушки часто работают на границе этих двух режимов, когда эмиссия с одних участков катода ограничена пространственным зарядом, а с других — температурой. Компьютерное моделирование в этом случае должно проводиться особенно аккуратно.

Режим эмиссии определяется электрическим полем в ближайшей окрестности поверхности катода шириной всего в несколько микрон. Это обстоятельство определяет необходимость отделять узкую прикатодную область от остального объема пушки и применять в ней совершенно иные вычислительные алгоритмы. Такое разделение приводит к нестабильности математических моделей, в частности, к зависимости численного решения от такого искусственного параметра как ширина выделенной прикатодной области.

Для моделирования электронных пушек применялись различные методы — от модели эквивалентных диодов [1] до непосредственного

расчета множества траекторий электронов с заданным распределением начальных скоростей [2]. В настоящей работе разработан универсальный подход к задаче расчета термоэмиссионных электронных пушек, основанный на методе конечных элементов. Такой подход обладает рядом преимуществ, весьма существенных с учетом особенностей решаемой задачи:

конечно-элементная сетка может быть легко сгущена вблизи катода и кроссовера, причем скорость расчета траекторий электронов остается практически такой же, что и при использовании регулярной сетки;

применение элементов различной формы позволяет точно описать границы электродов сложной формы, включая катод;

учет распределения пространственного заряда в уравнении Пуассона производится естественным образом как соответствующий вклад в функционал энергии.

Вблизи катода применены точные полуаналитические алгоритмы, основанные на предложенной В. А. Сыровым и развитой в работах В. М. Свешникова [3, 4] теории антипараксиальных разложений. Это позволило преодолеть трудности численного расчета вблизи сингулярности распределения пространственного заряда.

Выделение прикатодной области

Расчетная область электронной пушки автоматически разбивается на множество элементов треугольной формы, причем плотность разбиения вблизи катода и кроссовера в несколько раз выше, чем в остальной части области. Примыкающие к катоду элементы рассматриваются иначе, чем остальные элементы, поскольку в их объеме плотность пространственного заряда может иметь сингулярность. Распределение пространственного заряда, как и электрического потенциала, на остальных элементах является гладкой функцией, за исключением, быть может, острых углов электродов, где также требуется сгущение сетки.

На рис. 1 показаны треугольные элементы в прикатодной области. Те из них, которые касаются поверхности катода, по крайней мере, одним из своих углов составляют подобласть Ω' , остальные элементы — подобласть Ω .

Локальные координаты u и v вводятся внутри каждого элемента подобласти Ω как показано на рис. 2. Электрический потенциал локально выражается через них суммой полиномов второго порядка

$$\Phi(z, r) = \sum_{i=1}^6 \Phi_i \Psi_i [u(z, r), v(z, r)],$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= (1-u-v)(1-2u-2v); & \Psi_4 &= u(1-u-v); \\ \Psi_2 &= u(2u-1); & \Psi_5 &= \Phi_5 4v(1-u-v); \\ \Psi_3 &= v(2v-1); & \Psi_6 &= 4uv. \end{aligned} \quad (1)$$

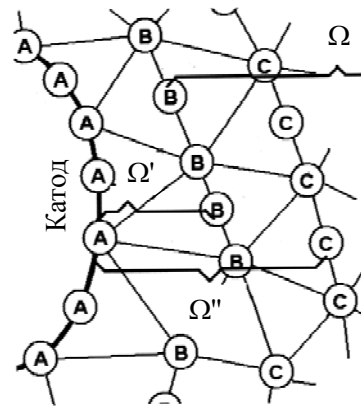


Рис. 1. Построение конечно-элементной сетки и выделение прикатодной области

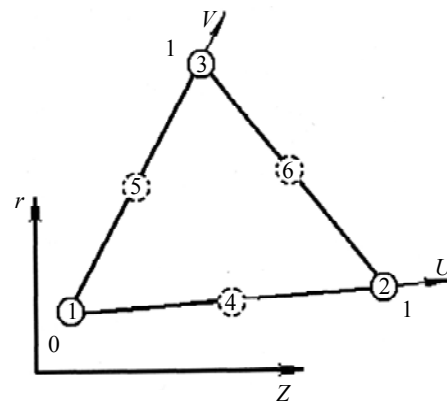


Рис. 2. Локальные координаты на конечном элементе треугольной формы

При таком выборе базисных функций (1) неизвестные коэффициенты Φ_i ($i = 1-6$) представляют собой значения электрического потенциала в шести узловых точках, показанных кружками на рис. 2. Если пары функций $Z_k(t)$, $r_k(t)$ описывают элементарные токи I_k , проходящие через объем элемента, то вклад последнего в функционал энергии составляет

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 w_{ij} \Phi_i \Phi_j + 4\pi \sum_{i=1}^6 \rho_i \Phi_i, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} w_{ij} &= \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \frac{r(u, v)}{J(u, v)} \times \\ &\times \left[K_{uu} \frac{\partial \Psi_i}{\partial u} \frac{\partial \Psi_j}{\partial u} - K_{uv} \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial v} \frac{\partial \Psi_j}{\partial u} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial u} \frac{\partial \Psi_j}{\partial v} \right) + \right. \\ &\quad \left. + K_{vv} \frac{\partial \Psi_i}{\partial v} \frac{\partial \Psi_j}{\partial v} \right]; \\ K_{uu} &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u} \right)^2; \\ K_{uv} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial v}; \end{aligned}$$

$$K_w = \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2;$$

$$\rho_i = I_k \sum_k \int \Psi_i [z_k(t), r_k(t)] dt. \quad (3)$$

Для вычисления электрического поля необходимо просуммировать вклады (2) от всех элементов подобласти Ω и найти значения неизвестных коэффициентов Φ_i , минимизирующие полученную сумму при условии соблюдения граничных условий. При этом условие на границе с подобластью Ω' определяется специальным итерационным алгоритмом гладкой сшивки с полем в прикатодной области.

Структура прикатодной особенности плотности пространственного заряда

Эффект ограничения тока диода был теоретически рассмотрен Чайлдом [5] и Ленгмюром [6, 7] в 1911—1923 гг. При заданном анодном потенциале ток эмиссии не может превосходить определенное значение, выше которого пространственный заряд электронов становится настолько большим, что при этом напряженность электрического поля на катоде была бы отрицательной, делая невозможной эмиссию с его поверхности.

Если принимать в расчет начальные тепловые скорости, то электроны могут покинуть катод и при некоторой отрицательной напряженности поля на его поверхности, но только часть из них сможет преодолеть потенциальный барьер, сформированный пространственным зарядом на небольшом расстоянии от катода. При анодном напряжении в несколько киловольт и типичном тепловом энергетическом разбросе электронов менее 1 эВ вершина потенциального барьера располагается очень близко к поверхности катода, и рассмотрение только лишь предельного случая нулевых начальных скоростей не исказит сильно результаты численного моделирования. В этом предположении плотность пространственного заряда на самом катоде становится бесконечной, однако уравнения движения электронов остаются интегрируемыми, хотя и нарушаются условия теоремы о единственности решения задачи Коши. Последнее обстоятельство позволяет плотности тока на поверхности катода зависеть от распределения поля.

Выпишем ряд уравнений, описывающих поток электронов вблизи катода. Уравнение Пуассона в тензорном виде имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x^i} = -4\pi\rho, \quad (4)$$

где Φ — потенциал электрического поля;

ρ — плотность пространственного заряда.

Поскольку тепловые скорости электронов принимаются нулевыми, то траектории последних не пересекаются, по крайней мере, в достаточно узкой прикатодной области. Это позволяет применять гидродинамическую модель, введя поле скоростей

электронов V^i . Теперь мы можем записать стационарное уравнение Эйлера в виде

$$V^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} = \frac{e}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad (5)$$

а также его первый интеграл (интеграл энергии)

$$V^j V_j = 2 \frac{e}{m} \Phi + \text{const}, \quad (6)$$

где e и m — элементарный заряд и масса электрона, соответственно.

Наконец, мы будем использовать уравнение неразрывности потока электронов в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\rho V^i) = 0. \quad (7)$$

Решение уравнений (4), (5) и (7) должно удовлетворять следующим граничным условиям на поверхности катода:

$$\Phi = 0; \quad (8)$$

$$V^i \rightarrow 0; \quad (9)$$

$$\rho V^i = -Jn^i, \quad (10)$$

где n^i — единичный вектор нормали к поверхности катода;

J — плотность эмитируемого катодом электрического тока, взятая с обратным знаком (чтобы сделать величину J положительной, будем предполагать, что $-J$ — есть ток электронов, несущих отрицательный заряд).

Из условий (8)—(10) следует, что аддитивная константа в правой части (6) равна нулю и что плотность заряда ρ должна быть на поверхности катода бесконечно большой, чтобы два последних условия выполнялись одновременно.

Можно показать, что ротор поля скоростей $\varepsilon_{ijk}(\partial V^j / \partial x_k)$ равен нулю на самом катоде и остается постоянным вдоль линий тока. Это позволяет ввести потенциал скоростей V по формуле $V^i = \partial V / \partial x_i$. На него мы накладываем дополнительное граничное условие $V = 0$ на поверхности катода.

Рассмотрим аксиально-симметричную поверхность катода, параметризованную функциями $z = Z(s)$; $r = R(s)$, где параметр s — длина дуги, так что $Z'^2 + R'^2 \equiv 1$.

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по параметру s .

Пусть другая координата h представляет собой расстояние от катода вдоль нормали к нему. Третьей координатой будет служить азимутальный угол ψ . Координаты (s, h, ψ) образуют криволинейную систему координат (рис. 3) с диагональным метрическим тензором, т. е. имеем:

$$g_{ss} = (1 + k_0 h)^2; \quad g_{hh} = 1; \quad g_{\psi\psi} = R^2(1 + k_1 h)^2,$$

где введены коэффициенты меридиональной и сагитальной кривизны катода:

$$k_0(s) = Z'R'' - R'Z''; \quad k_1(s) = -Z'/R, \text{ соответственно.}$$

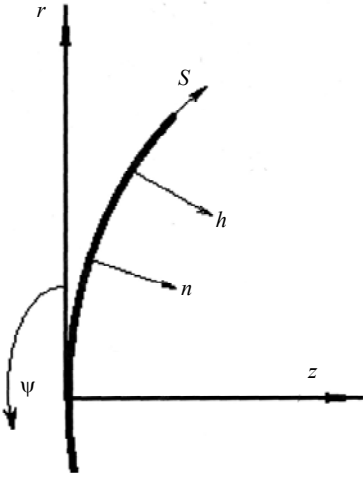


Рис. 3. Криволинейная система координат в прикатодной области

В введенных криволинейных координатах уравнение Пуассона (4) записывается в виде

$$\Delta_0 \Phi = -4\pi\rho,$$

где $\Delta_0 = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$ — оператор Бельтрами-Лапласа, принимающий вид

$$\Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial h^2} + \left(\frac{k_0}{1 + k_0 h} + \frac{k_1}{1 + k_1 h} \right) \frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{(1 + k_0 h)^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \left(\frac{k_1' h}{1 + k_1 h} - \frac{k_0' h}{1 + k_0 h} + k_R \right) \frac{\partial}{\partial s} \right]$$

$$\text{и } k_R = \frac{R'}{R}.$$

Уравнение неразрывности (7) и интеграл энергии (6) принимают вид

$$\frac{1}{(1 + k_0 h)^2} \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h} \right)^2 = \frac{2e}{m} \Phi$$

и $\rho \Delta_0 V + \frac{\partial \rho}{\partial h} \frac{\partial V}{\partial h} + \frac{1}{(1 + k_0 h)^2} \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{\partial V}{\partial s} = 0$, соответственно.

Теперь будем искать решения этих уравнений в виде степенных рядов вблизи $h = 0$. В зависимости от знака напряженности поля на поверхности катода

$E(s) = \lim_{h \rightarrow +0} \partial \Phi / \partial h$ мы получаем три различных вида решений. При $E < 0$ ток эмиссии $J = 0$, и получаем следующее разложение для электрического потенциала:

$$\Phi = Eh - \frac{k_0 + k_1}{2} E h^2 + \left[\frac{k_0^2 + k_0 k_1 + k_1^2}{3} E - \frac{1}{6} (E'' + k_R E') \right] h^3 + \dots \quad (11)$$

При $E > 0$ имеет место эмиссия, ограниченная температурой (T -режим) и $J = J_s$, где плотность тока насыщения J_s определяется температурой катода согласно закону термоэмиссии Ричардсона-Дэшмана. В T -режиме разложение для потенциала принимает вид

$$\Phi^{(t)} = E + E_1^{(t)} h^{3/2} + E_2^{(t)} h^2 + E_3^{(t)} h^{5/2} + E_4^{(t)} h^3 + \dots, \quad (12)$$

$$\text{где } E_1^{(t)} = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} \sqrt{\frac{m}{e}} \frac{J_s}{\sqrt{E}};$$

$$E_2^{(t)} = -\frac{k_0 + k_1}{2} E - \frac{3}{16} \frac{E_1^{(t)2}}{E};$$

$$E_3^{(t)} = \frac{3}{32} \frac{E_1^{(t)3}}{E^2} - \frac{11}{20} (k_0 + k_1) E_1^{(t)};$$

$$E_4^{(t)} = \frac{k_0^2 + k_0 k_1 + k_1^2}{3} E + \frac{1}{16} \frac{E_1^{(t)2}}{E} \left[\frac{9}{5} (k_0 + k_1) - \frac{E_1^{(t)2}}{E^2} \right] - \frac{1}{6} [E_1^{(t)''} + k_R E_1^{(t)'}].$$

Аналогичные разложения для режима ограничения эмиссии пространственным зарядом (C -режим) при $E = 0$ и $0 < J < J_s$ предложены В. А. Сыровым [8]. Запишем их в форме, удобной для дальнейшего использования,

$$\Phi^{(c)} = E_1^{(c)} h^{4/3} + E_2^{(c)} h^{7/3} + E_3^{(c)} h^{10/3} + \dots, \quad (13)$$

где коэффициенты равны, соответственно:

$$E_1^{(c)} = \left(\frac{81\pi^2}{2} \frac{m}{e} \right)^{1/3} J^{2/3}, \quad (14)$$

$$E_2^{(c)} = -\frac{8}{15} (k_0 + k_1) E_1^{(c)}; \quad (14a)$$

$$E_3^{(c)} = \left[\frac{83}{225} (k_0 + k_1)^2 - \frac{7}{18} k_0 k_1 \right] E_1^{(c)} - \frac{1}{600 E_1^{(c)}} \left(E_1^{(c)'} \right)^2 - \frac{2}{15} [E_1^{(c)''} + k_R E_1^{(c)'}]. \quad (15)$$

Разложения (11)—(13) дают нам значения электрического потенциала вблизи катода во всех трех режимах эмиссии с точностью не хуже h^3 . В каждом из этих режимов коэффициенты при h в высших степенях выражаются через коэффициент при h в низшей степени и его производные по параметру s . Зная функции $E(s)$ и $E_1^{(c)}$ в виде сплайнов достаточной гладкости, можно восстановить распределение электрического поля в окрестности катода.

Вместе с тем в тех областях, где плотность тока эмиссии J приближается к нулю, применимость антипараксиальных разложений (13) ограничена. Действительно, коэффициент (15) перед $h^{10/3}$ становится бесконечно большим в точке, где $J = 0$ и $J' \neq 0$.

В. А. Сыровой показал, что предположения гидродинамики нарушаются вблизи таких точек катода. Тем не менее вклад таких пограничных точек между областями с C -режимом эмиссии и областями с отсутствием эмиссии в полный ток пучка и плотность заряда должен быть весьма малым.

В наших алгоритмах численного моделирования мы должны избегать вычислений по формуле (13) в таких точках и использовать только C^1 -аппроксимации напряженности поля на катоде.

Решение самосогласованной задачи

Выделение прикатодных элементов из расчетного объема предполагает использование процедуры гладкого сшивания полуаналитического решения вблизи катода с численным решением. Для этого предположим, что разложения (11)—(13) применимы не только в прикатодной области Ω' , но и в несколько более широкой полосе Ω'' , содержащей также элементы, касающиеся прикатодных элементов (см. рис. 1).

Таким образом, оба решения — полуаналитическое и численное — одновременно существуют в области Ω''/Ω' , что делает возможной гладкую сшивку этих решений без дифференцирования численного решения. Для получения самосогласованного решения применяется следующий итерационный алгоритм.

Сначала мы находим распределение электрического потенциала Φ_0 на элементах, покрывающих всю расчетную область $\Omega \cup \Omega'$ в пренебрежении пространственным зарядом. Это распределение служит начальным приближением, с помощью которого мы вычисляем напряженность электрического поля $E_0(s) = \partial\Phi_0 / \partial h$ в узлах на поверхности катода, помеченных на рис. 1 буквой "А". В соответствии со знаком E_0 мы приписываем каждому такому узлу один из двух режимов эмиссии: T -режим при $E_0 > 0$ или режим с отсутствием эмиссии — в противном случае.

Следующий шаг состоит в вычислении достаточно количества траекторий электронов, стартующих с узлов с эмиссией в T -режиме и их окрестностей. На этом этапе начальные тепловые скорости электронов уже нельзя не принимать во внимание, поскольку тепловой разброс определяет размер кроссовера и плотность пространственного заряда в нем. Для вычисления

траекторий с ненулевыми начальными скоростями, а также стартующих с узловых точек применяется метод тау-вариаций [9] первого порядка, что значительно ускоряет вычисления.

Найдя коэффициенты влияния пространственного заряда (3) для всех узлов подобласти Ω , пересчитываем электрический потенциал Φ_1 в этой подобласти, взяв граничное условие Дирихле в узлах "В" (см. рис. 1) из результата предыдущей итерации.

Таким образом, мы получаем уточненные значения потенциала в узлах сетки, помеченных буквой "С", вычисленные с учетом пространственного заряда. Эти значения используются для уточнения прикатодного электрического поля в узлах "А".

Предположим, что распределения поля на катоде, $E(s)$ на участках с эмиссией в T -режиме и $E_1^{(c)}(s)$ — на участках с эмиссией в C -режиме представлены кубическими сплайнами с непрерывной второй производной, построенными на узловых точках "А". С помощью разложений (12) и (13) получаем значения потенциала $\Phi_c[E, E_1^{(c)}]$ в узлах "С", зависящие от набора значений E и $E_1^{(c)}$ в узлах "А". Составим функционал невязки

$$G[E, E_1^{(c)}] = \sum_c [\Phi_c[E, E_1^{(c)}] - \Phi_{1c}]^2,$$

где Φ_{1c} — значения численного решения уравнения Пуассона в тех же узлах "С", а суммирование проводится по всем этим узлам.

Значения E и $E_1^{(c)}$, минимизирующие эту невязку, приписываются узлам "А" на следующей итерации. При этом необходимо придерживаться ряда правил для правильного переключения режимов эмиссии:

- если новое значение E в узле, находящемся в T -режиме, становится нулевым, то этому узлу приписывается C -режим, причем теперь для этого узла требуется найти значение $E_1^{(c)}$;
- если значение E меняет знак от отрицательного к положительному, то узлу также приписывается C -режим; таким образом, за одну итерацию переход от режима без эмиссии к T -режиму невозможен;
- если узел работает в C -режиме и уточненное значение $E_1^{(c)}$ становится нулевым, то узлу приписывается режим отсутствия эмиссии; наоборот, если $E_1^{(c)}$ превосходит значение насыщения, которое можно получить из (14) подстановкой $J = J_s$, то узел переходит в T -режим.

После нескольких итераций мы получаем стационарное самосогласованное решение для электрического потенциала и плотности тока эмиссии. Пример моделирования трехэлектродной термоэмиссионной пушки иллюстрируется на рис. 4. На данном рисунке представлены геометрия электродов пушки, которая состоит из катода, формирующего электрода с потенциалом

минус 200 В по отношению к катоду, и анода, потенциал которого равен 10 кВ. Показаны также эквипотенциали электрического поля. Плотность тока эмиссии на поверхности катода представлена на рис. 5, а. Центр катода эмитирует в С-режиме, в то время как отрицательная прикатодная напряженность электрического поля (см. рис. 5, б) препятствует эмиссии с периферии катода.

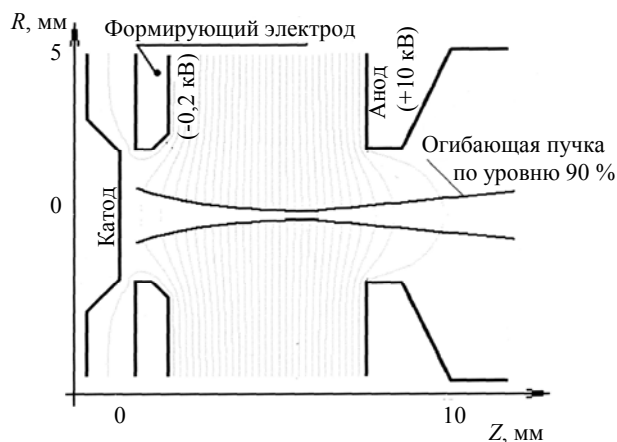


Рис. 4. Конструкция трехэлектродной электронной пушки

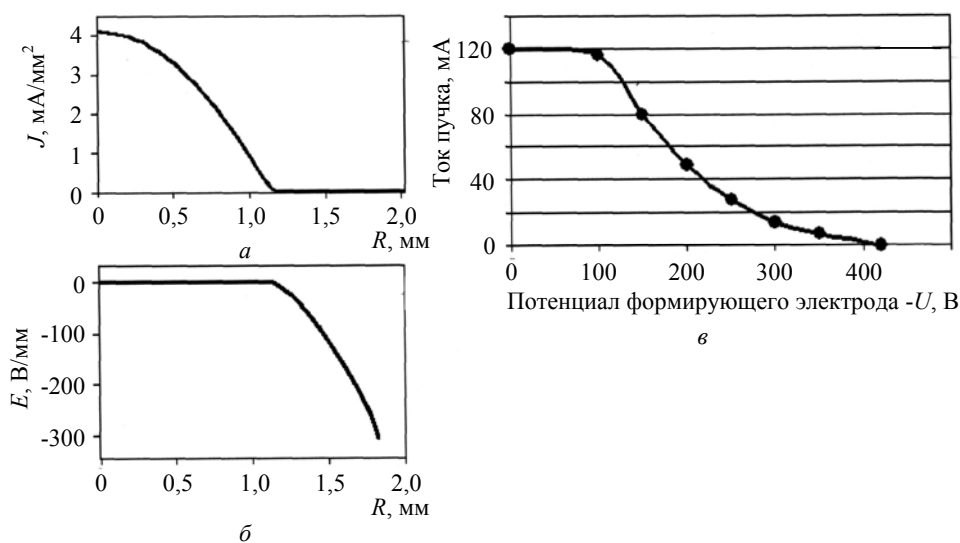


Рис. 5. Плотность тока эмиссии (а) и напряженность электрического поля (б) на поверхности катода. Вольтамперная характеристика (в) электронной пушки, изображенной на рис. 4

На рис. 5, в показана вольтамперная характеристика пушки, представляющая собой зависимость величины тока электронного пучка от потенциала формирующего электрода.

Литература

1. Белуга И. Ш., Соколова И. М.// Прикладная физика. 1997. № 2—3.
2. Monastyrsky M. A., Murav'ev A. G., Tarasov V. A. Iterative solution of the self-consistent problem for electron gun with arbitrary shaped cathode, based on combined finite difference — integral equation approach// Proceedings SPIE. 1999. V. 4187. P. 2—13.
3. Свешников В. М. Расчет прикатодной области в электронно-оптических системах, формирующих интенсивные пучки заряженных частиц// Прикладная физика. 2004. № 1. С. 50—55.
4. Свешников В. М. Повышение точности расчета интенсивных пучков заряженных частиц// Там же. С. 55—65.
5. Child C. D. Discharge from hot cathode// Phys. Rev. 1911. V. 32. № 5.
6. Langmuir I. The effect of space charge and residual gases on thermionic currents in high vacuum// Ibid. 1913. V. 2. № 6.
7. Langmuir I., Blodgett K. Currents limited by space charge between coaxial cylinders// Ibid. 1923. V. 21. № 4.
8. Сыровой В. А.// Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36. № 8. С. 540.
9. Монастырский М. А.// Прикладная физика. 1996. № 3. С. 7—27.

Автор благодарен В. М. Свешникову, В. А. Сыровому и М. А. Монастырскому за плодотворное обсуждение материалов статьи. Работа поддержана в рамках федеральной целевой научно-технической программы "Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития науки и техники" на 2002—2006 гг.

Статья поступила в редакцию 22 декабря 2005 г.

D. E. Greenfield

ORION Research-and-Production Association, Moscow, Russia

The peculiarity of the numeric simulation of the thermoemission electron guns consists in the principal necessity of taking into account the contribution of the electrons' charge into the potential distribution in the beam formation region. This fact makes the mathematical model essentially nonlinear especially in the high-perveance operation mode. Moreover, the charge density is extremely high in the vicinity of emitting surfaces, rising infinitely in the limit of zero initial velocities. A special semi-analytical approach has been applied to deal with the charge singularity. Being combined with traditional finite-element numerical techniques, this approach provides an efficient way to simulate thermoemission electron guns.

УДК 537.533

Методы возмущений в задачах вычислительной оптики заряженных частиц

Д. Э. Гринфельд

ФГУП "Научно-производственное объединение "Орион" — Государственный научный центр РФ, Москва, Россия

М. А. Монастырский, В. А. Тарасов

Институт общей физики РАН им. А. М. Прохорова, Москва

На основе теории возмущений рассмотрены решения ряда важных проблем вычислительной оптики заряженных частиц. Среди них вычисление возмущений электрических и магнитных полей, вызванных малыми отклонениями формы электродов или магнитных полюсов от вращательной или планарной симметрии, включая краевые эффекты. В общем тензорном виде рассмотрен абберрационный анализ пучков заряженных частиц. Показано, что методы теории возмущений в сочетании с другими численными подходами, такими как метод тау-вариаций и обобщенный метод варьирования начальных параметров, оказываются эффективными в задачах расчета механических допусков, а также моделирования кулоновского расталкивания и рассеяния частиц на сетках.

**Общая постановка задачи расчета
возмущений потенциала.**

Интегральные уравнения в вариациях

Задача расчета возмущений потенциала, обусловленных малыми отклонениями размеров и потенциалов граничных электродов от номинальных, занимает важное место в вычислительной оптике заряженных частиц. Указанная проблема является ключевой для абберрационного анализа траекторий, расчета допусков корпускулярно-оптических приборов, оптимизации и синтеза электронных линз и т. д.

Ограничимся для простоты случаем потенциальной краевой задачи и сформулируем ее как задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi_P = 0; P \in \Omega; \varphi|_{\Gamma} = U_Q; Q \in \Gamma \quad (1)$$

в области Ω с границей Γ (рис. 1).

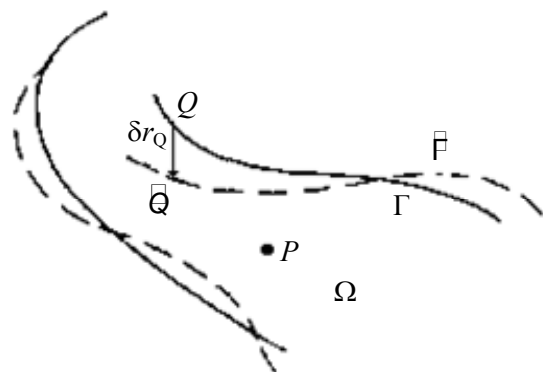


Рис. 1. К формулировке проблемы возмущений границы

Область Ω может быть неограниченной и иметь границу Γ в виде конечного множества связанных компонент $\Gamma_i, i = 1, \dots, n$, так, что $\Gamma = \bigcup \Gamma_i$. В случае неограниченности области Ω краевая задача (1) должна быть дополнена условием на бесконечности $\varphi_P \rightarrow \infty$ при $P \rightarrow \infty$.