

3. Справочник по специальным функциям/Под ред. А. Аб-
рамовица, И. Стиган: Пер. с англ./ Под ред. В. А. Диткина,
Л. Н. Карамзиной. — М.: Наука, 1979.

4. Власова Е. А., Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Прибли-
женные методы математической физики: Учеб. для вузов/
Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. — М.: Изд-во
МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001.

5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для науч-
ных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974.

6. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике. — М.:
Наука, 1967.

7. Трубицын А. А.// ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 5. С. 126.

8. Заиквара В. В., Корсунский М. И., Космачев О. С.// Там
же. 1966. Т. 36. Вып. 1. С. 132.

9. Engelhardt H. A., Back W., Menzel D.// Rev. Sci. Instr.
1981. V. 52. № 6. P. 835.

10. Матышев А. А. Изотраекторная корпускулярная опти-
ка. — СПб.: Наука, 2000.

Статья поступила в редакцию 14 ноября 2007 г.

The software "Focus" modelling axi-symmetric electron-optical systems: algorithms and characteristics

A. A. Trubitsyn

Ryazan State Radio Engineering University, Ryazan, Russia

In work the technique of numerical modelling electron- and ion-optical systems is advanced, algorithms and methods of high accuracy maintenance of function evaluation of potential distribution are offered by a boundary elements method, the technique of search of conditions of angular and spatial high orders focussing is developed. On a database of these methods the software for the path analysis of corpuscular optics systems is created, research of calculations errors and detailed testing on model tasks is carried out.

УДК 537.626:537.533:519.632

Гибридный метод расчета магнитных систем с насыщаемыми материалами

Д. Э. Гринфельд

ФГУП «НПО "Орион"» — Государственный научный центр РФ, Москва, Россия

А. П. Шуленок

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

Математическое моделирование электронно-оптических устройств часто требует высокой точности и гладкости расчета электрических и магнитных полей во всем рабочем объеме, а не только вблизи оси симметрии, что необходимо для построения аберрационных рядов в окрестности произвольного главного луча. Для решения этой проблемы предложен эффективный метод моделирования нелинейных задач магнитостатики, основанный на декомпозиции расчетной области на подобласти, в которых применяются различные расчетные подходы (методы) конечных и граничных элементов. Сшивка решений на границах подобластей гарантируется применением единого итерационного процесса минимизации функционала энергии. Разработанный метод позволяет моделировать магнитные поля с большей точностью и меньшими вычислительными затратами.

Магнитная фокусировка электронных пучков находит широкое применение в электронной оптике, делая актуальной проблему численного моделирования магнитных полей. В настоящее время для решения нелинейных задач магнитостатики обычно используются компьютерные алгоритмы, основанные на методе конечных элементов (МКЭ), что объясняется их эффективностью при

учете насыщения материалов магнитопроводов, распределенного тока соленоидов и наличия постоянных магнитов.

Метод конечных элементов был впервые использован в задачах вычислительной электронной оптики в диссертационной работе Е. Манро [1] и развит им в книге [2]. Эффективные алгоритмы построения двух- и трехмерных сеток [3—5] дали

дополнительный импульс практическому использованию МКЭ и воплощению его в ряде компьютерных программ, предназначенных для моделирования электронно-оптических устройств [6—11], включая программу, разработанную авторами настоящей статьи [12].

В то же время широко применяемые в вычислительной оптике заряженных частиц методы теории аббераций требуют определения электрических и магнитных полей с очень высокой точностью. С этой точки зрения метод конечных элементов часто оказывается неудовлетворительным, особенно для моделирования широкоугольных электронно-оптических систем (изображающие ЭОП, ионные ловушки, магнетроны и т. д.), при котором высокая точность расчета поля требуется во всем рабочем объеме, а не только на оси симметрии. В рамках МКЭ повышение точности может быть достигнуто лишь ценой больших вычислительных затрат с увеличением числа элементов сетки до нескольких сотен тысяч [6, 7].

Другим не менее важным требованием к расчету поля является гладкость получаемой функции распределения потенциала, т. е. возможность ее многократного дифференцирования без снижения точности. Необходимо различать такие качества решения как точность и гладкость несмотря на то, что они очевидным образом связаны. Относительная точность расчета поля на уровне достижимой погрешности изготовления магнитопроводов (около 10^{-4}) может стать вполне достаточной и для моделирования работы прибора. Однако математические выражения для абберационных коэффициентов в окрестности оси симметрии, таких как коэффициенты сферической и хроматической аббераций, комы, астигматизма и дисторсии, содержат члены, зависящие от вторых производных магнитного потенциала [13, 14], поэтому на точность вычисления этих производных также налагаются жесткие требования. Ситуация становится еще более сложной, если требуется вычисление коэффициентов абберационного ряда в окрестности произвольной главной траектории. В этом случае необходимая точность должна сохраняться уже при четырех последовательных дифференцированиях магнитного потенциала [15]. На первый взгляд применение аппроксимационных схем второго [11, 16] и более высоких порядков может решить проблему гладкости, однако даже они не могут гарантировать непрерывности вектора магнитного поля на границах элементов, применяемых в МКЭ нерегулярных сеток. Построение же интерполирующих функций в классе гладкости C^1 представляет собой сложную проблему [17], не говоря о возможности четырехкратного дифференцирования.

Альтернативный метод интегральных уравнений, или метод граничных элементов (МГЭ), дает большую точность и гладкость решения, что обусловило его широкое применение при моделировании электростатических полей. Сравнение МКЭ и МГЭ в задачах электронной оптики можно найти в работах [18, 19]. Моделирование магнитных линз с помощью МГЭ было предложено в серии работ Каспера и Строера [20—22], однако непосредственное использование метода граничных элементов в задачах магнитостатики усложняется необходимостью учета магнитного насыщения и распределенных токов, для решения которых требуется вычисление не только поверхностных, но и объемных интегралов.

Для объединения достоинств сеточных методов и метода граничных элементов в работе [22] предложено сначала вычислять распределение векторного магнитного потенциала методом конечных элементов, а затем использовать это решение как граничное условие Дирихле для решения полевой задачи в области вакуума методом граничных элементов. Совмещение метода конечных разностей и МГЭ было предложено в работе [23]. Для моделирования магнитных линз с "открытым" магнитопроводом Ленкова и Ленк использовали одновременно МГЭ и МКЭ первого порядка [24]. В настоящей работе эти подходы обобщены для расчета магнитных систем с кусочно-постоянной магнитной проницаемостью материалов и построены алгоритмы, многократно повышающие эффективность вычислений.

Основная идея предлагаемого метода состоит в декомпозиции расчетной области Ω на три подобласти $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)} \cup \Omega^{(3)}$, как показано на рис. 1. Подобласть $\Omega^{(1)}$ не содержит насыщаемых материалов, но может содержать распределенный по ее площади электрический ток. Кроме того, в данном случае не накладываются ограничения на зависимость магнитной проницаемости от координат, но она не должна зависеть от напряженности поля. В эту подобласть можно включить, например, соленоиды. В подобласть $\Omega^{(2)}$ включаются насыщаемые материалы, магнитная проницаемость $\mu(B)$ которых является функцией абсолютной величины напряженности поля. Для простоты изложения в данной статье вынесен случай анизотропных материалов и постоянных магнитов за ее рамки, но отмечено, что обобщение на случай тензорной магнитной проницаемости и наличия коэрцитивной силы не вызывает методологических затруднений. И, наконец, в третью подобласть $\Omega^{(3)}$ включены ненасыщаемые среды с кусочно-постоянной проницаемостью. Эта подобласть может быть бесконечной и, очевидно, включает в себя и область вакуума.

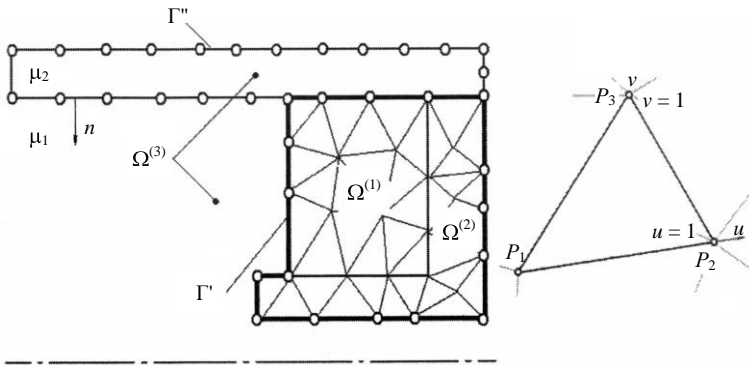


Рис. 1. Декомпозиция расчетной области на три подобласти:

$\Omega^{(1)}$ — обмотка соленоида; $\Omega^{(2)}$ — насыщаемая часть магнитопровода; $\Omega^{(3)}$ — материалы с постоянной магнитной проницаемостью, включая вакуум. Рисунок справа поясняет построение аффинной системы локальных координат на конечном элементе треугольной формы

Сеткой конечных элементов покрываются только первые две подобласти, в третьей подобласти использован метод граничных элементов. Соответственно, разбиению на одномерные элементы подлежит лишь граница $\partial\Omega^{(3)}$ и границы между ее подобластями с различными константами магнитной проницаемости. Для сшивки решений важной является согласованность дискретизации подобластей на их общей границе: граничные элементы должны совпадать с ребрами конечных элементов. Далее необходимо вывести выражения для функции Лагранжа магнитного поля, часто называемой интегралом энергии, в рамках обоих подходов — МКЭ и МГЭ.

Представление интеграла энергии в МКЭ

Из вариационного исчисления известно, что решение уравнения магнитостатики для случая аксиальной симметрии относительно сагиттальной компоненты векторного магнитного потенциала A

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{\partial B_z}{\partial r} \frac{1}{\mu} - \frac{\partial B_r}{\partial z} \frac{1}{\mu} = \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\nabla(rA)}{r} \right) = -4\pi j,$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA)}{\partial r}, \quad B_r = -\frac{\partial A}{\partial z}$$

эквивалентно минимизации интегрального функционала

$$W = \iint U(B) - A j \, 2\pi r dr dz,$$

$$U(B) = \frac{1}{4\pi} \int_0^B \frac{B'}{\mu(B')} dB' \quad (1)$$

на пространстве функций $A(z, r)$ с кусочно-непрерывными частными производными.

Здесь $j(z, r)$ — плотность тока;

$B = \sqrt{B_z^2 + B_r^2}$ — модуль вектора магнитной индукции.

Лагранжиан магнитного поля (1), или интеграл энергии, является краеугольным камнем метода конечных элементов. Численный поиск распределения магнитного потенциала, минимизирующего

интеграл энергии, требует конечномерной аппроксимации задачи, для чего искомая функция A приближенно представляется в пределах покрытых сеткой подобластей $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ линейной комбинацией базисных функций

$$A(z, r) = \sum_{i=1}^N A_i \Psi_i(z, r). \quad (2)$$

Подстановка (2) в (1) приводит к аппроксимации функционала энергии функцией N переменных A_i , причем поиск решения сводится к поиску минимума этой функции в N -мерном пространстве. Поскольку далее речь будет идти только о приближенном численном решении, то будем обозначать эту функцию той же буквой, как $W(A_1 \dots A_N)$.

В простейшем варианте метода конечных элементов базисные функции Ψ_i задаются на треугольном элементе в аффинной системе локальных координат (см. рис. 1) формулами:

$$\Psi_{p1} = r(1-u-v), \quad \Psi_{p2} = ru,$$

$$\Psi_{p3} = rv, \quad (3)$$

каждая из которых соотнесена с одним из узлов сетки.

Таким образом, число линейно-независимых базисных функций N равно числу узлов сетки. Множитель $r(u, v)$, представляющий собой радиальную координату, внесен в выражения (3) для улучшения качества аппроксимации в окрестности оси симметрии, где магнитный потенциал всегда обращается в нуль. Алгоритм автоматической генерации конечно-элементной сетки подробно описан в [12].

Численный поиск минимума функционала энергии может проводиться одним из известных итерационных методов спуска, описанных, например, в монографиях [25, 26]. Здесь мы не будем подробно останавливаться на этом вопросе, отметив лишь необходимость введения предобуславливающих коэффициентов. Скорость сходимости при поиске минимума функции многих переменных зависит от размерности пространства: увели-

чение числа узлов сетки приводит как к возрастанию числа необходимых для достижения заданной точности итераций, так и к повышению вычислительных затрат на каждую итерацию.

Задача существенно упрощается, если моделируемая система не содержит насыщаемых магнитных сред. В этом случае функция плотности энергии магнитного поля U в формуле (1) принимает вид $U(B) = B^2 / 8\pi\mu$, а сам функционал энергии в конечномерной аппроксимации становится суммой квадратичной и линейной форм

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^N \omega_{km} A_k A_m - \sum_{k=1}^N \gamma_k A_k, \quad (4)$$

коэффициенты которых определяются через квадратуры. Поиск минимума (4) сводится к решению линейной системы уравнений

$$\sum_{m=1}^N \omega_{km} A_m = \gamma_k \quad (5)$$

с разреженной матрицей. Уравнение (5) можно решать как итерационным методом, так и прямым методом исключения Гаусса (с выделением главного элемента в столбце). Последний метод на современных компьютерах с достаточным объемом оперативной памяти оказывается даже предпочтительнее итерационных при размерности системы $N < 10^5$.

Для решения задач магнитостатики с учетом насыщения материала метод исключения непосредственно неприменим, однако его можно с большой эффективностью использовать для уменьшения размерности системы нелинейных уравнений путем выделения линейной подобласти $\Omega^{(1)}$ в один или несколько суперэлементов. Термин "суперэлемент" будем использовать здесь по аналогии с методом Федоренко [27], в котором вводятся специальные конечные элементы, обладающие внутренней структурой.

Рассмотрим подобласть $\Omega^{(1)}$ (или ее часть), покрытую сеткой, содержащей K узлов (рис. 2). Без потери общности предположим, что нумерация узлов сетки такова, что первые M из них лежат на границе подобласти. Симметричная матрица $\omega_{km}^{(1)}$ ($1 \leq k, m \leq K$) квадратичной формы вклада подобласти в интеграл энергии разбивается на четыре подматрицы – две квадратные с размерностями $M \times M$ и $(K - M) \times (K - M)$ и две прямоугольные с размерностью $M \times (K - M)$:

$$\omega^{(1)} = \left\| \begin{array}{c|c} \omega^A & \omega^C \\ \hline \omega^{C^T} & \omega^B \end{array} \right\|.$$

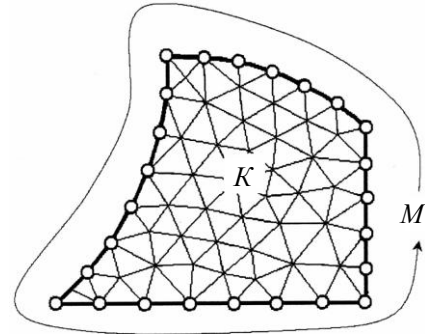


Рис. 2. Нумерация узлов в линейной подобласти

Аналогично разобьем вектор коэффициентов линейной формы $\gamma^{(1)} = \gamma^A | \gamma^B{}^T$ на два вектора размерности M и $K - M$, соответственно. Теперь мы можем начать минимизацию функционала энергии с поиска минимума в $(K - M)$ -мерном пространстве значений коэффициентов $A_{M+1} \dots A_K$, задающих потенциал во внутренних узлах подобласти. Потенциал на границе $\partial\Omega^{(1)}$ при этом будем полагать фиксированным. Легко показать, что условный минимум достигается при

$$A_n = \sum_{m=M+1}^K \omega_{nm}^B{}^{-1} \left(\gamma_m^B - \sum_{k=1}^M \omega_{mk}^C A_k \right), \quad n = M + 1 \dots K, \quad (6)$$

Элементы матрицы $\omega^B{}^{-1} \omega^C$ и вектора $\omega^B{}^{-1} \gamma^B$ можно получить методом исключения Гаусса.

С учетом (6) вклад линейной подобласти в интеграл энергии можно представить в виде суммы квадратичной и линейной форм, зависящих только от первых M неизвестных коэффициентов. С точностью до несущественной аддитивной константы получаем:

$$W^{*(1)}[A_1 \dots A_M] = \frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^M \omega_{km}^* A_k A_m - \sum_{k=1}^M \gamma_k^* A_k \quad (7)$$

с коэффициентами

$$\omega_{km}^* = \omega_{km}^A - \sum_{i,j=M+1}^K \omega_{ki}^C \omega_{ij}^B{}^{-1} \omega_{mj}^C, \quad (8)$$

$$\gamma_m^* = \gamma_m - \sum_{i,j=M+1}^K \omega_{ki}^C \omega_{ij}^B{}^{-1} \gamma_j. \quad (9)$$

Формулы (7)–(9) позволяют на этапе решения системы нелинейных уравнений исключить из рассмотрения внутренние узлы линейной области $\Omega^{(1)}$. И хотя матрица ω_{km}^* уже не является разре-

женной, число уравнений в системе значительно сокращается, ускоряя итерационный процесс поиска решения. После нахождения распределения потенциала в граничных узлах линейной подобласти решение во внутренних узлах восстанавливается по формуле (6).

Представление интеграла энергии в МГЭ

Для решения уравнения поля (1) с нулевой правой частью и кусочно-постоянной магнитной проницаемостью введем функцию Грина, удовлетворяющую уравнению

$$\operatorname{div} \frac{\nabla(rG(z-z', r, r'))}{r} = -4\pi\delta(z-z')\delta(r-r')$$

и убывающую на бесконечности. В явном виде функция Грина дается эллиптическим интегралом

$$G(z-z', r, r') = \frac{4r'}{\sqrt{z-z'^2 + (r+r')^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2\psi)d\psi}{\sqrt{1-k\cos^2\psi}},$$

$$k = \frac{4r'r}{z-z'^2 + (r+r')^2},$$

имеющим логарифмическую особенность в пределе совпадения $z = z'$ и $r = r'$.

Параметризуем границу подобласти $\Omega^{(3)}$ кусочно-непрерывными функциями $r_{s'}$ и $z_{s'}$ параметра длины дуги s' . Введем также функции $r_{s''}$ и $z_{s''}$, параметризующие совокупность границ Γ'' , разделяющих области с различными константами μ_k внутри $\Omega^{(3)}$. Зададим неизвестные распределения плотности виртуальных токов $I_{s'}$ и $I_{s''}$ на $\Gamma' = \partial\Omega^{(3)}$ и Γ'' , соответственно, и представим магнитный потенциал в точке $(z, r) \in \Omega^{(3)}$ в виде суммы интегралов

$$A(z, r) = \int_{\Gamma'} I_{s'} G(z-z_{s'}, r, r_{s'}) ds' + \int_{\Gamma''} I_{s''} G(z-z_{s''}, r, r_{s''}) ds'' \quad (10)$$

Энергия поля, заключенная в подобласти $\Omega_k^{(3)} \subset \Omega^{(3)}$ с постоянной магнитной проницаемостью μ_k , равна

$$W_k = \frac{1}{\mu_k} \iint \frac{B^2}{8\pi} 2\pi r dr dz = \frac{1}{4\mu_k} \iint \left[\frac{\nabla rA}{r} \right]^2 dr dz. \quad (11)$$

С помощью тождества $\operatorname{div}[A\nabla rA] = \left[\frac{\nabla rA}{r} \right]^2 / r + rA \operatorname{div} \left[\frac{\nabla rA}{r} \right]$ уравнения поля (1) с нулевой правой частью и теоремы Гаусса интеграл (11) преобразуются к интегралу по границе подобласти, т. е. будем иметь:

$$W_k = -\frac{1}{4\mu_k} \int_{\partial\Omega_k^{(B)}} A n_s \cdot \nabla rA ds, \quad (12)$$

где n_s — внутренняя нормаль.

Тангенциальная компонента вектора магнитной индукции на внутренней стороне границы равна

$$\left(n_s \frac{\nabla rA}{r} \right) = D_s[I] - 2\pi I_s,$$

где D_s представляет собой интегральный оператор на совокупности токов $I = I_{s'}, I_{s''}$

$$D_s = \frac{1}{r_s} \int_{\Gamma'} I_{s'} n_s \cdot \nabla [rG(z-z_{s'}, r, r_{s'})] ds' \Big|_{r=r_s, z=z_s} + \frac{1}{r_s} \int_{\Gamma''} I_{s''} n_s \cdot \nabla [rG(z-z_{s''}, r, r_{s''})] ds'' \Big|_{r=r_s, z=z_s} \quad (13)$$

и дает среднюю по обеим сторонам границы тангенциальную компоненту индукции.

Можно показать, что ядро оператора (13) интегрируемо и имеет особенность в пределе совпадения не сильнее логарифмической. Суммируя интегралы типа (12) для всех подобластей с постоянной магнитной проницаемостью, мы получаем вклад подобласти $\Omega^{(3)}$ в интеграл энергии

$$W^{(3)} = \int_{\Gamma'} \frac{2\pi I_{s'} - D_{s'}[I]}{4\mu} A_s r_s ds' + \int_{\Gamma''} \left\{ 2\pi I_{s''} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} D_{s''}[I] \right\} \frac{A_{s''} r_{s''}}{4\mu_1 \mu_2} ds'' \quad (14)$$

где μ — магнитная проницаемость среды, примыкающей к "внешней" границе Γ' , отделяющей $\Omega^{(3)}$ от подобластей, в которых используется МКЭ;

μ_1 и μ_2 — проницаемости сред по обе стороны от "внутренних" границ Γ'' ;

функции $A_{s'}$ и $A_{s''}$ — распределения магнитного потенциала на границах Γ' и Γ'' , соответственно.

По аналогии с методом конечных суперэлементов предварительно минимизируем интеграл энергии по распределению $A_{s''}$, что немедленно дает нам интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$2\pi I_{s''} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} D_{s''}[I] = 0, \quad (15)$$

физический смысл которого состоит в требовании неразрывности тангенциальной компоненты вектора $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ на Γ'' . В силу этого уравнения второй член в (14) обращается в нуль. Фиксируя магнитный потенциал на границе Γ' , запишем интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_{\Gamma'} I_{s'} G(z_{s'} - z_{\sigma'}, r_{s'}, r_{\sigma'}) d\sigma' + \int_{\Gamma''} I_{s''} G(z_{s'} - z_{s''}, r_{s'}, r_{s''}) ds'' = A_{s'} \quad (16)$$

Совместное решение (15) и (16) определяет совокупность токов как линейный оператор $I = I_{s'}, I_{s''} = I[A_{s'}]$. Подстановка этого оператора в оставшийся первый член в правой части (14) даст интеграл энергии поля в виде квадратичного функционала в пространстве распределений магнитного потенциала $A_{s'}$ на границе подобласти $\Omega^{(3)}$.

Для численного решения проводится дискретизация границ Γ' и Γ'' на совокупность отрезков s_k, s_{k+1} , а функции $I_{s'}$, $I_{s''}$ представляются в виде линейных комбинаций базисных функций, определенных на этих отрезках формулами

$$\Psi_k = r_s \frac{s_{k+1} - s}{s_{k+1} - s_k} |s - s_k|^{-\gamma_k};$$

$$\Psi_{k+1} = r_s \frac{s - s_k}{s_{k+1} - s_k} |s - s_{k+1}|^{-\gamma_{k+1}}. \quad (17)$$

Построение системы базисных функций типа (17) иллюстрируется рис. 3, а. Для узлов, лежащих на гладких участках границ, показатель особенности γ_k полагаем нулевым. Принципиально важным является аналитическое выделение особенностей плотности токов вблизи острых углов магнитопроводов и точек сопряжения трех и более сред с различными значениями магнитной проницаемости.

Для узлов, расположенных в таких точках, показатель γ_k положителен, а его значение определяется геометрией системы и величинами μ прилегающих сред. Поскольку объем статьи не позволяет подробно осветить вопрос определения показателей особенностей, мы приведем ссылки на работы, в которых он решается для задач электростатики и теории упругости, математически близких к решаемой нами задаче [28—30].

На рис. 3, б показана зависимость показателя γ для распространенного частного случая острого ребра магнитопровода от величины угла α при вершине ребра и магнитной проницаемости материала. В предельном случае $\mu \gg 1$ показатель особенности можно приближенно вычислить по формуле $\gamma \approx (\pi - \alpha)/(2\pi - \alpha)$.

Для численного нахождения оператора $I A_{s'}$ невязка системы интегральных уравнений (15)—(16) взвешивалась методом Галеркина и приравнивалась нулю. Матрица полученной системы линейных уравнений обращалась методом Гаусса. Далее вычислялись коэффициенты квадратичной формы, определяющей функционал

$$W^{*(3)}[A_{s'}] = W^{(3)} I[A_{s'}], A_{s'}$$

через потенциал в узлах разбиения границы Γ' .

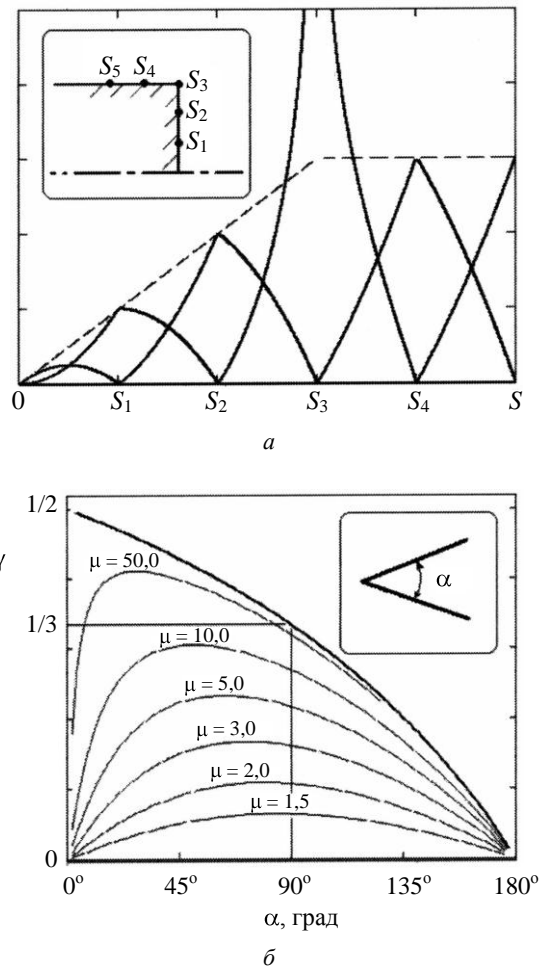


Рис. 3. Построение системы базисных функций: а — пример построения базисных функций для аппроксимации плотности тока; пунктир показывает значение радиальной координаты r_s ; б — зависимость показателя особенности плотности тока от угла при вершине ребра магнитопровода

Сшивка решений и тестирование алгоритма

Полученные в предыдущих разделах формулы позволяют различными способами выразить вклад в интеграл энергии всех трех подобластей, при этом вклад "линейных" подобластей $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(3)}$ представляется суммой квадратичных и линейных форм, зависящих только от коэффициентов A_k , соответствующих узлам сетки на границах. Поскольку распределение потенциала ищется в классе непрерывных функций, то будем полагать коэффициенты в граничных узлах одинаковыми для подобластей по обе стороны от границы и запишем полный интеграл энергии как сумму трех слагаемых

$$W = W^{*(1)} + W^{(2)} + W^{*(3)},$$

поиск минимума которой проводится итерационным методом в пространстве размерности $N^* \leq N$ значений магнитного потенциала в узлах, лежащих на разделяющих подобласти границах, и внутренних узлах только "нелинейной" подобласти $\Omega^{(2)}$. Такой подход автоматически гарантирует нахождение распределения магнитного потенциала на границах подобластей, обеспечивающего правильную сшивку решений. Потенциал во внутренних точках подобласти $\Omega^{(1)}$ рассчитывается по формуле (6) исходя из найденных значений A_k на ее границе.

В подобласти $\Omega^{(3)}$ сначала вычисляется распределение виртуальных токов на ее границе и на границах, разделяющих ее подобласти с различными значениями магнитной проницаемости. Затем это распределение токов используется при вычислении магнитного потенциала во внутренних точках по формуле (10). Вычисление вектора магнитной индукции и старших производных магнитного потенциала проводится путем дифференцирования ядра под знаком интеграла, что обеспечивает высокую точность их расчета, по крайней мере, на расстояниях от границы не менее размера элемента дискретизации.

Для оценки точности была решена простая тестовая задача. Вычислялось поле соленоида прямоугольного сечения (возбуждение 100 ампервитков), как показано на рис. 4, а. Результат расчета магнитной индукции и производных ее z -компоненты сопоставлялся с результатом интегрирования по закону Био-Савара. В таблице приведены значения сравниваемых величин при различных числах конечных элементов N , на которые разбивается сечение соленоида. Верные десятичные знаки выделены жирным шрифтом.

На рис. 4, б приведена зависимость относительной точности расчета величины магнитной индукции от мелкости разбиения. Очевидно, что источником погрешности расчета является ошибка аппроксимации поля на сетке конечных элементов внутри области соленоида и плотности виртуальных токов на его границе. Точность $\delta B_z / B_{\max} = 10^{-4}$ достигается уже при использовании сетки, содержащей $N = 2000$ элементов. Три последних столбца таблицы показывают точность дифференцирования z -компоненты магнитной индукции.

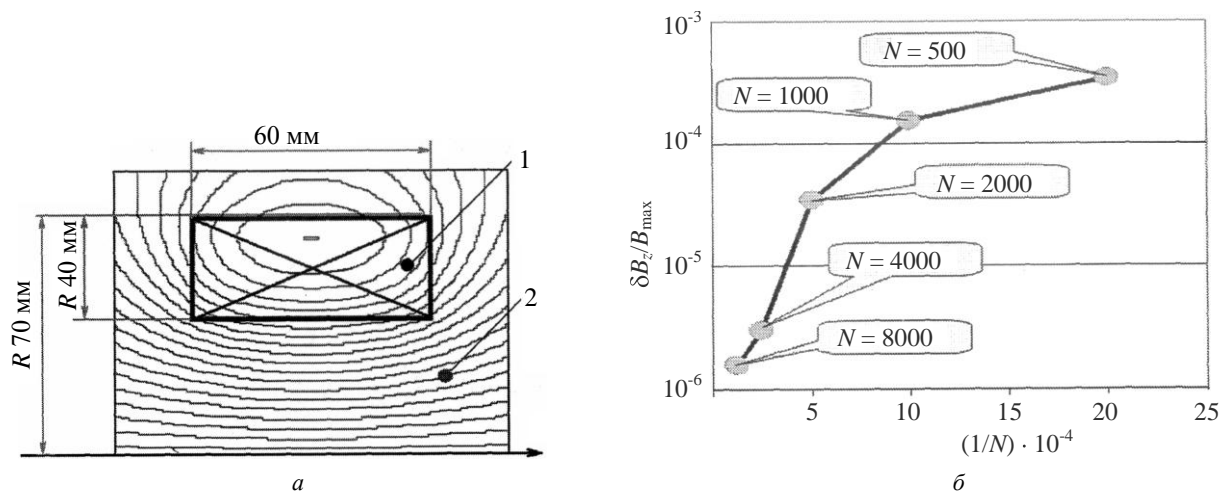


Рис. 4. Тестовая задача расчета поля соленоида 1 с прямоугольным сечением во внеосевой точке 2: а — геометрия системы; б — зависимость относительной точности решения B_z от числа N конечных элементов дискретизации области обмотки соленоида

Наименование	B_z , Гс	$\partial B_z / \partial z$, Г/см	$(\partial^2 B_z / \partial z^2) \cdot 10^{-3}$, Г/мм ²	$(\partial^3 B_z / \partial z^3) \cdot 10^{-4}$, Г/мм ³
Точное решение	7,88731	-0,168586	-1,4323	4,825
$N = 500$	7,891	-0,1688	-1,428	4,83
$N = 1000$	7,889	-0,1687	-1,4325	4,83
$N = 2000$	7,888	-0,16861	-1,431	4,823
$N = 4000$	7,88727	-0,168588	-1,4319	4,822
$N = 8000$	7,88729	-0,16858	-1,4317	4,821

При четырехкратном дифференцировании магнитного потенциала ($\partial^3 B_z / \partial z^3 = r^{-1} \partial^4 r A / \partial z^3 \partial r$) верными сохраняются три—четыре десятичные значащие цифры, что позволяет с уверенностью вычислять абберационные коэффициенты третьего порядка.

На рис. 5 приведен пример расчета поверхности идеальной фокусировки электронно-оптического преобразователя с одновременной магнитной и электростатической фокусировкой. Расчет пучков электронов, вышедших с различных точек фотокаатода, проводился с точностью до аббераций третьего порядка методом главного луча, которым служила траектория электрона с нулевой начальной скоростью.

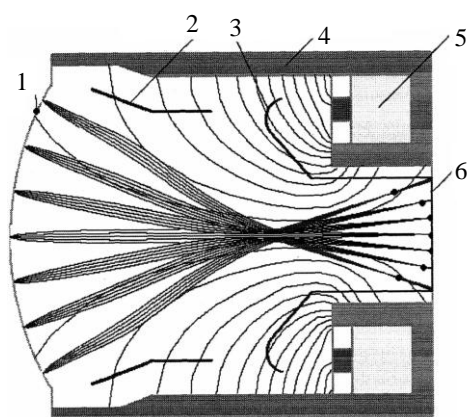


Рис. 5. Пример расчета поверхности фокусировки широкоугольного электронно-оптического преобразователя с совмещенной магнитной и электростатической фокусировкой:

- 1 — фотокаатод; 2 — электрод; 3 — анод;
- 4 — магнитопровод; 5 — соленоид; 6 — экран

Выводы

Декомпозиция расчетной области и одновременное использование в различных подобластях метода конечных элементов и метода граничных элементов позволяют достичь ряда преимуществ при численном решении нелинейных задач магнитостатики.

1. При сохранении точности решения (около тысячи узлов по сравнению с сотнями тысяч в стандартном МКЭ) многократно уменьшается необходимое число конечных элементов в расчетной области.

2. Скорость расчета становится существенно выше, чем при использовании аналогичных по точности конечно-элементных алгоритмов.

3. Распределение магнитного потенциала в области вакуума может быть многократно дифференцируемо без потери точности.

Преимущества предложенного подхода совместно с применением метода главного луча делают

возможными расчет и исследование аббераций широкоугольных электронно-оптических приборов с магнитной фокусировкой.

Работа поддержана Президентским грантом МК-2123.2006.2.

Литература

1. Munro E. *Dissertation Ph. D.* Computer-aided-design methods in electron optics// Trinity College. — Cambridge, 1971.
2. Munro E. In *Image processing and computer-aided design in electron optics*, ed. P. W. Hawkes// Academic Press. — London, 1973.
3. Tanizume Y., Yamashita H., Nakamae E. Tetrahedral elements generation using topological mapping and space dividing for 3-D magnetic field FEM// *IEEE Trans. Magnetics*. 1990. V. MAG-26. № 2. P. 775—778.
4. George P. L., Hecht F., Saltel E. Automatic 3D mesh generation with prescribed mesh boundaries// *Ibid.* P. 771—774.
5. Tarnhuvud T., Reichert K., Skoczylas J. Problem-oriented adaptive mesh-generation for accurate finite-element calculation// *Ibid.* P. 779—781.
6. Lencová B. Accurate computation of magnetic lenses with FOFEM// *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. Sec. A*. 1999. V. 427. P. 329—337.
7. Lencová B., Wisselink G. Program package for computation of lenses and deflectors// *Nucl. Instr. & Meth. in Phys. Res., Sec. A*. 1990. V. 298. P. 56—66.
8. Мельников А. А., Васичев Б. Н. Численный расчет магнитного поля в аксиально-симметричных фокусирующих системах с учетом реальных характеристик ферромагнетиков// *Известия академии наук. Сер. физическая*. 2003. Т. 67. № 4. С. 534—538.
9. Becker R. Magnetic field calculated by INTMAG compared with analytical solutions and precision measurements// *Nucl. Instr. & Meth. in Phys. Res., Sec. A*. 1990. V. 298. P. 13—21.
10. Рапоцевич Е. А. РЭМП: пакет программ для моделирования электро- и магнитостатических полей// *Прикладная физика*. 1996. № 3. С. 37—39.
11. Hodkinson J., Tahir K. Saturated electron lens design using a second-order finite element method// *Proc. SPIE*. 1995. V. 2522. P. 264—269.
12. Гринфельд Д. Э., Шуленок А. П. Математическое моделирование магнитных электронных линз// *Прикладная физика*. 2007. № 2. С. 12—17.
13. Глазер В. Основы электронной оптики. — М.: Госизд-во технико-теоретической лит-ры, 1957.
14. Хокс П., Каснер Э. Основы электронной оптики. Т. 1 — М.: Мир, 1993.
15. Monastyrskiy M. A., Greenfield D. E., Tarasov V. A. Perturbation techniques in the problems of computational charged particle optics// *Proceedings SPIE*. 2006. V. 6278. P. 15—29.
16. Zhu Xieqing, Munro Eric. A computer program for electron gun design using second-order finite elements// *J. Vacuum Science and Technology*. 1989. V. B7. P. 1862—1869.
17. Khurshed. A. High order interpolation methods for finite-element solved potential distributions in the two dimensional rectangular coordinate system// *Proc. SPIE*. 1996. № 2858. P. 115—125.
18. Lencová B. On magnetic lens computations with FEM and BEM// *Nuc. Inst. Meth. Phys. Res., Sec. A*. 2004. V. 519 № 1—2. P. 133—140.
19. Cubric D., Lencova B., Read F. H., Zlamal J. Comparison of FDM, FEM and BEM for electrostatic charged particle optics, *Nucl. Instr. & Meth. in Phys. Res. Section A*. 1999. V. 427. P. 357—362.

20. Kasper E., Ströer M. A new method for the calculation of magnetic fields in systems with unsaturated yokes and its application in electron optics// Optik. 1989. V. 83. № 3. P. 93—100.
21. Kasper E. An advanced boundary element method for the calculation of magnetic lenses// Nucl. Instr. & Meth. in Phys. Res., Sec. A. 2000. V. 450. P. 173—178.
22. Kasper E., Ströer M. A new method for the calculation of magnetic fields// Inid. 1990. V. 298. P. 1—9.
23. Weth A. V. D., Becker R. A hybrid method using BEM and FDM for the calculation of 2 D magnetic fields including materials with field-dependent permeability// Ibid. V. 427. P. 399—403.
24. Lencová B., Lenc M. The computation of open electron lenses by coupled finite-element and boundary integral methods// Optik. 1984. V. 68. № 1. C. 37—60.
25. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. "Численные методы". — М.: Изд-во БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.
26. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. "Численные методы". — М.: Физматлит, 2004.
27. Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику. — М.: Изд-во МФТИ, 1994.
28. Birkhoff G. Angular singularities of elliptic problems// J. Approximation Theory. 1972. V. 6. P. 215—230.
29. Веселов Г. И., Платонов Н. И. Определение электромагнитного поля в окрестности ребер диэлектрического стержня с подложкой// Известия вузов МВ и ССО СССР. Сер. Радиотехника. 1985. Т. 28. № 2. С. 92—94.
30. Mantič V., Paris, F., Berger J. Singularities in 2D anisotropic potential problems in multi-material corners. Real variable approach// Int. J. of Solids and Structures. 2003. V. 40. P. 5197—5218.

Статья поступила в редакцию 14 ноября 2007 г.

Hybrid method of modeling magnetic system with saturable materials

D. E. Greenfield

Orion Research-and-Production Association, Moscow, Russia

A. P. Shulenok

Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia

Mathematical modeling of electron-optical instrumentation often requires high accuracy and smoothness of the calculated electric and magnetic fields within the entire work region, not only at the axis of symmetry, which is necessary to construct aberrational expansions in the vicinity of any arbitrary principle trajectory. Here we propose an effective method of solving the non-linear magnetostatic problems, which is based on decomposition of the computational domain into a few subdomains with different numerical approached being used within them: the method of finite elements and the method of boundary elements. Joining the solution at the subdomain boundaries is guaranteed by employing a single iterative process to minimize the energy integral. The method developed in this way allows modeling the magnetic fields with better accuracy at lower numerical expenses.

УДК 537.534.2

Исследование ионно-оптических характеристик инжектора ионов

С. Н. Мордик, В. И. Возный, В. И. Мирошниченко, В. Е. Сторишко, Д. П. Шульга

Институт прикладной физики НАН Украины, г. Сумы, Украина

Разработан, изготовлен и испытан макет ионного инжектора для ускорительных приложений, который объединяет геликоновый источник ионов и фильтр Вина. Получены следующие параметры источника ионов инжектора электростатического ускорителя: плотность плазмы 10^{11} — $9 \cdot 10^{12}$ см⁻³; плотность ионного тока 10—130 мА/см²; яркость ~100 А/(м² рад² эВ); энергетический разброс 30 эВ при ВЧ-мощности, вводимой в плазму, 40—400 Вт и рабочем давлении в разрядной камере 2—10 мТорр. Методом матрицантов проведен расчет эволюции фазовых множеств в инжекторе ионов.

Инжектор ускорителя ионов должен обеспечивать следующие основные параметры: высокую яркость однородного и контролируемого по составу ионов в пучке малый энергетический разброс;

большой срок службы (не менее 1000 ч); экономичный режим работы (источник ионов должен работать с минимально возможным количеством рабочего вещества, с минимальным уровнем вво-