

УДК 537.531:621.373:537.567

## О концепции индуцированного излучения в пучковых системах

М. А. Горбунов, А. Н. Лебедев

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

*Рассмотрено ограничение концепции индуцированного излучения в классических пучковых системах, связанное с учетом сопутствующего спонтанного излучения (радиационного трения). Показано, что при укорочении длины волны в лазерах на свободных электронах (ЛСЭ) спонтанное излучение оказывает существенное влияние на фазировку частиц. Это приводит к практически важному ограничению на длину излучающей системы, которое не может быть скомпенсировано увеличением тока пучка.*

### Введение

Увеличение интереса к источникам коротковолнового излучения привело к интенсивному развитию ЛСЭ, которые в настоящее время уверенно претендуют на ультрафиолетовый и рентгеновский диапазоны длин волн, где возможности квантовых генераторов весьма проблематичны.

В отличие от устройств, работающих на тормозном излучении и имеющих широкий спектр, ЛСЭ, хотя и являются весьма дорогостоящими системами, рассматриваются как наиболее перспективные для получения рентгена с большой спектральной яркостью.

### Индуцированное излучение в классических системах

Механизм работы пучковых излучающих систем основан на индуцированном излучении, но понятие "индуцированное" имеет несколько другую интерпретацию, нежели в квантовых лазерах. Описание системы электронов для ЛСЭ является чисто классическим в том смысле, что расстояние между энергетическими уровнями (если они вообще существуют) гораздо меньше энергии излучаемых фотонов. В этих условиях концепция индуцированного излучения сводится не к известным квантово-механическим соотношениям Эйнштейна для вероятности излучения и поглощения отдельных квантов, а к представлению о фазировке частиц в поле индуцирующей волны и возникновении когерентности в их излучении по законам классической электродинамики.

Концепция индуцированного излучения в пучковых системах основана на тех же эффектах, что и принцип автофазировки. В отличие от ускорителей, где автофазировка удерживает частицы в синхронизме с волной ускоряющего поля, для излу-

чающих систем бóльший интерес представляют не захваченные частицы, имеющие небольшое отклонение от синхронной энергии. Благодаря воздействию поля индуцирующей волны они группируются по фазе, образуя когерентно-излучающие при положительной расстройке или поглощающие сгустки (рис. 1).

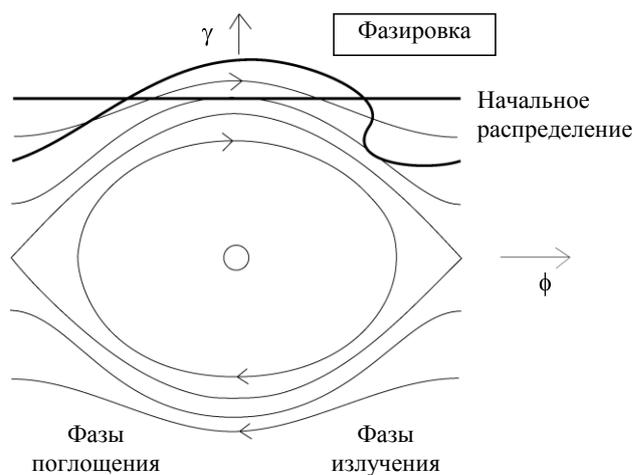


Рис. 1. Фазировка частиц на фазовой плоскости (схематично)

Первое обстоятельство ведет к усилению индуцирующего сигнала, а второе — к его поглощению. Заметим, что при начальном случайном равномерном распределении частиц пучка по фазе когерентного излучения нет, так как каждой частице найдется пара, излучающая в противофазе. Сказанное в общем случае справедливо только для неограниченного пучка, но в большинстве задач для ЛСЭ практически всегда можно пренебречь крайними эффектами.

Подобный подход влечет за собой парадоксальную ситуацию мысленного эксперимента: когерентность может установиться между сколь

удобно удаленными излучателями, если время их взаимодействия достаточно велико. Это заставляет искать принципиальные ограничения физического характера, препятствующие развитию индуцированного излучения в пучковых системах, в первую очередь достаточно разреженных.

Авторы статьи сознательно не затрагивают ограничения практического характера: влияние случайных возмущений движения, дифракционных явлений, конечный эмиттанс пучка и т. д., так или иначе принципиально решаемые с развитием пучковой техники. Важнее выяснить принципиальные физические ограничения описанного механизма вообще, а также то, могут ли они быть достигнуты и проверены на существующих и проектируемых системах.

По нашему мнению, таких ограничений существует, по крайней мере, пять:

1. Квантовые флуктуации мощности излучения, ведущие к сбою фазовых соотношений между излучающими частицами и волной. Особенно существенно это может сказаться при излучении жесткого фотона. В сильном релятивизме, требование к которому возрастает по мере укорочения излучаемой длины волны, реализуемая плотность тока пучка по техническим причинам неизбежно уменьшается. Значит, малое число частиц, а в предельном случае — одиночная частица может принять на себя импульс отдачи излученного фотона. В результате частицу буквально "выбивает" из синхронизма с волной, что исключает ее участие в когерентном излучении. (Последовательное обсуждение этого эффекта будет проведено отдельно).

2. Дроб-шум в электронном потоке, связанный с малой плотностью последнего и нарушающий представление о нем как о сплошной активной среде. Особенно это относится к режиму SASE — индуцированному усилению собственных шумов. На интуитивном уровне кажется, что необходимым критерием индуцированного излучения должно быть достаточно большое "кооперативное" число электронов на длине формирования излучения (для собственной системы отсчета —  $\lambda^3 = \text{объем}$ ), предполагающее возможность интерпретации пучка как активной усиливающей среды.

3. Влияние радиационного трения из-за некогерентного излучения. Именно этому уделено основное внимание в данной работе.

4. Временная когерентность и ее нарушение из-за недостаточной длины взаимодействия, которая в собственной системе может оказаться короче густка.

5. Развитие динамического хаоса. В результате нелинейности активная среда пучка заряженных частиц постоянно претерпевает изменения, что не может не сказаться на ее свойствах. Благодаря

этому оптимальные для усиления моды меняют одна другую. Монохромность излучения — пожалуй, одно из самых сильных приближений, принимаемых в анализе фазовых соотношений. Здесь ограничимся предположением, что, по крайней мере, на ранних этапах развития индуцированного процесса оптимальные условия для усиления имеет одна мода.

### Влияние радиационного трения

Рассмотрим только третью из перечисленных причин. Заметим, что концепция самосогласованного поля излучения исключает учет собственного поля индивидуальной частицы на фоне дальнего радиационного поля остальных частиц, т. е. пренебрежение "радиационным трением". Собственное радиационное поле индивидуальной частицы вдали от нее действительно мало, но на нее саму оно действует на протяжении всего процесса и, что главное, не зависит от фазы, в которой находится частица относительно внешнего самосогласованного поля. Учет потерь на спонтанное излучение меняет представление об индуцированных эффектах как о беспороговых, так как сигнал, инициирующий фазовую группировку частиц, может быть меньше потерь частицы на спонтанное излучение.

Как известно [1, 2], процесс самофазировки частиц, квазисинхронных с волной, в простейшем одномерном случае можно описать с помощью уравнений

$$\frac{d\Delta}{dz} = g \cos \varphi; \quad \frac{d\varphi}{dz} = \alpha \Delta. \quad (1)$$

Уравнения (1) описывают передачу энергии от волны частице,

где  $\Delta$  — отклонение безразмерной энергии  $\gamma$  от синхронного значения;

$g$  — максимальная энергия, которую может получить частица от волны на единице длины взаимодействия;

$\varphi$  — фаза частицы, остающаяся постоянной при полном синхронизме.

Коэффициент проскальзывания для несинхронных частиц мы возьмем в виде  $\alpha \approx 2\pi/\lambda\gamma^3$ , где  $\lambda$  — длина волны, характерная для коротковолнового ЛСЭ. Заметим, что под синхронностью мы понимаем приближенное равенство скорости частицы фазовой скорости либо электромагнитной волны (черенковское излучение), либо волны пандеромоторной силы (ондуляторный ЛСЭ).

Для учета радиационного трения можно модифицировать уравнения (1), добавив в них член, описывающий потери на спонтанное излучение. Он не зависит от фазы частиц, а следовательно, действует на всей длине взаимодействия:

$$\frac{d\Delta}{dz} = g \cos \varphi - w; \quad \frac{d\varphi}{dz} = \alpha\Delta.$$

Для упрощения будем считать величину  $w$  не зависящей от  $\Delta$ . Подчеркнем, что спектрально-угловой состав спонтанного излучения не имеет ничего общего с индуцирующей волной.

Величина  $g$ , пропорциональная амплитуде волны, определяет аксептанс системы, т. е. площадь на фазовой плоскости, попадая в которую частица захватывается волной (рис. 2). Величина  $w$  определяет величину "зазора" между сепаратрисами, попав в который частица теряет энергию в основном на спонтанное излучение и быстро выходит из синхронизма.

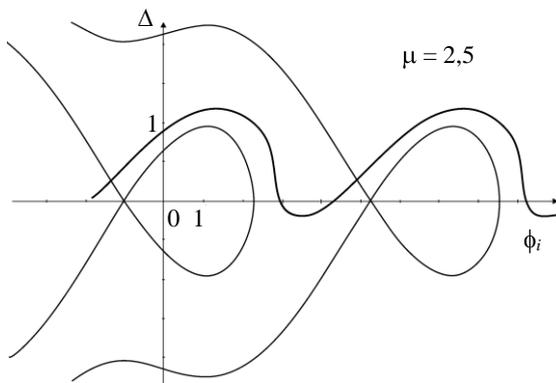


Рис. 2. Структура фазовых траекторий при  $w \neq 0$ .

Величина  $\mu$  — кинематический набег фазы из-за начального отклонения энергии от равновесной

Как известно [1, 2], при начальном случайном равномерном распределении по фазам в оптимальных условиях (с точки зрения индуцированного излучения) находятся частицы, имеющие небольшую положительную начальную расстройку по энергии, обеспечивающую на длине взаимодействия набег фазы около 2,6 радиан. Из рис. 2 ясно, что при малых  $g$  и достаточно больших  $w$  этот набег фазы может быть вообще не достигнут, поскольку частица на фазовой плоскости "проваливается" в упомянутый зазор. Аналогом такой ситуации является случай, когда в циклическом резонансном ускорителе равновесная фаза мала или вообще отсутствует [3].

Как правило, параметры  $g$  и  $w$  малы, что позволяет использовать теорию возмущений, предполагая  $g = \text{const}$  (последнее оправдывается еще и тем, что рассматривая условия отсутствия индуцированного излучения, мы фактически предполагаем, что  $g$  может и не расти).

Разложение решения по степеням  $g$  имеет прозрачный физический смысл. Нулевое приближение дает потери частицы на спонтанное излучение. Приближение первого порядка усредняется, так как описывает ускорение (замедление) частицы,

находящейся в случайной фазе. Приближение второго порядка отражает эффекты индуцированного излучения, когда потери энергии пропорциональны  $g^2$ , т. е. падающей мощности.

В качестве параметра, характеризующего эффективность передачи энергии от частицы волне, удобно взять кинематический набег фазы  $\mu(z) = \alpha\Delta_i z$ , обусловленный начальной расстройкой по энергии и пройденным расстоянием  $z$ . Тогда в первом приближении по величине  $g$  имеем

$$\Delta = \Delta_i - 2\Delta_i W \mu;$$

$$\varphi = \varphi_i + \mu - W \mu^2;$$

$$W = \frac{w}{2\alpha\Delta_i^2}.$$

В следующем приближении имеем

$$\Delta = \Delta_i - 2\Delta_i W \mu + \frac{g}{\alpha\Delta_i} \int_0^\mu \cos \varphi_i + \mu' - W \mu'^2 d\mu',$$

что позволяет вычислить индуцированный набег фазы.

$$\varphi = \varphi_i + \mu - W \mu^2 + \frac{g}{\alpha\Delta_i^2} C \cos \varphi_i - S \sin \varphi_i, \quad (2)$$

где

$$C = \int_0^\mu \mu - \mu' \cos \mu' - W \mu'^2 d\mu';$$

$$S = \int_0^\mu \mu - \mu' \sin \mu' - W \mu'^2 d\mu'.$$

Величины  $C$  и  $S$  могут быть выражены через интегралы Френеля, что, впрочем, не упрощает последующие выражения.

Выражение (2) можно представить в виде

$$\varphi = \varphi_i + \mu - W \mu^2 - \frac{g\sqrt{C^2 + S^2}}{\alpha\Delta_i^2} \sin \left( \varphi_i - \arctg \frac{C}{S} \right),$$

так что скорость набора энергии есть

$$\frac{d\Delta}{dz} = -w + g \cos \left( \psi - \frac{g\sqrt{C^2 + S^2}}{\alpha\Delta_i^2} \sin \psi \right) \times$$

$$\times \cos \left( \mu - W \mu^2 + \arctg \frac{C}{S} \right) - g \sin \times$$

$$\times \left( \psi - \frac{g\sqrt{C^2 + S^2}}{\alpha\Delta_i^2} \sin \psi \right) \sin \left( \mu - W \mu^2 + \arctg \frac{C}{S} \right),$$

где  $\psi = \varphi_i - \arctg \frac{C}{S}$  так же, как и  $\varphi_i$  есть равномерно распределенная случайная величина.

При усреднении по  $\psi$  на интервале  $(-\pi, \pi)$  второе (нечетное) слагаемое исчезает, а первое дает известное представление первой функции Бесселя, т. е.

$$\frac{\bar{\Delta}' + w}{g} = \cos\left(\mu - W\mu^2 + \arctg \frac{C}{S}\right) \times J_1\left(\frac{g\sqrt{C^2 + S^2}}{\alpha\Delta_i^2}\right). \quad (3)$$

Иллюстрация выражения (3) представлена на рис. 3, из которого видно, что кроме отрицательного эффекта воздействия радиационных потерь, связанного с малым временем нахождения частиц в фазе излучения, наличие разрыва сепаратрис даже помогает частицам быстрее фазироваться, обеспечивая на короткий срок бóльший коэффициент усиления, чем в задаче без диссипации энергии.

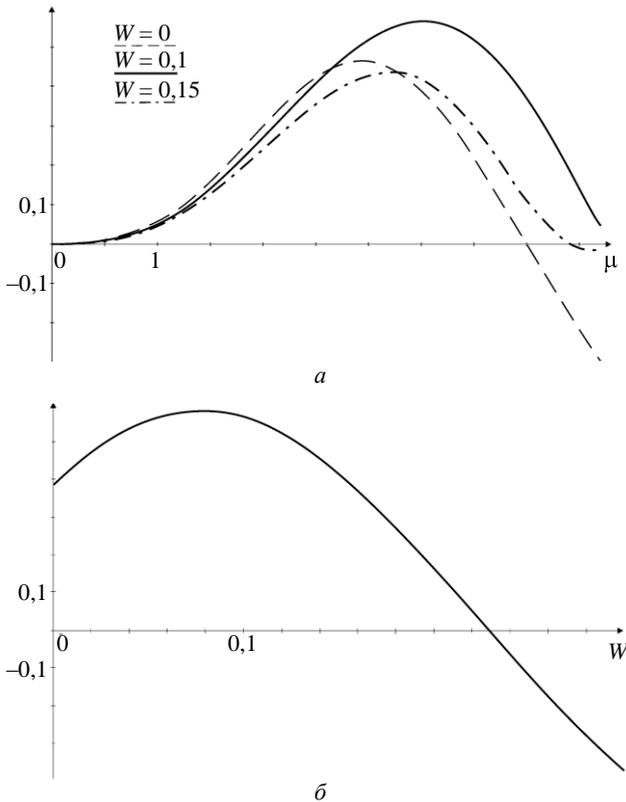


Рис. 3. График зависимости (3):

*a* — от кинематического набега фазы при разных значениях параметра  $W$ ; *б* — срез зависимости (3) при  $\mu = 3,5$

Следует отметить, что принятая процедура усреднения описывает сразу два эффекта уменьшения интенсивности взаимодействия. Первый характеризуется осцилляцией функции Бесселя при достаточно больших значениях аргумента и не связан непосредственно со спонтанными потерями в том смысле, что он сохраняется при  $W = 0$ . Физически это означает насыщение и последующий

распад фазировки, особенно сказывающийся при малых  $\Delta_i$ . Однако с точки зрения рассматриваемого эффекта более интересно уменьшение и обращение в нуль тригонометрического множителя при достаточно больших значениях  $W$ . Заметим, что обращение аргумента косинуса в  $\pi/2$  означает полное разрушение механизма индуцированного излучения (см. рис. 3).

### Выводы

Для не слишком больших поперечных колебаний электрон,двигающийся в плоском ондуляторе, с точки зрения спонтанного излучения можно приравнять к поперечному нерелятивистскому (в своей системе) осциллятору, равномерно летящему с большой скоростью, как целое вдоль оси  $z$ . Соответствующие потенциальные потери мощности на единицу длины для гармонических поперечных колебаний с периодом  $l$  и средним квадратом поперечной скорости  $\overline{\beta_{\perp}^2 c^2}$  равны [1, 4]:

$$w = \frac{2}{3} 2\pi^2 \frac{r_0}{l^2} \overline{\beta_{\perp}^2} \gamma^2;$$

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \approx 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Для наиболее естественных вариантов ЛСЭ  $\overline{\beta_{\perp}^2} \gamma^2 \approx 1$ . Отсюда получаем основной параметр, характеризующий влияние спонтанного излучения на индуцированное

$$W = \frac{2\pi^2}{3l^2} \frac{r_0}{\alpha\Delta_i^2} = \frac{2\pi^3}{3l^2} \frac{r_0}{\lambda\mu^2} z^2.$$

Первая часть этой оценки дает представление о минимальном значении стартового поля, при котором возможно индуцированное излучение вообще. С одной стороны, согласно результатам, представленным на рис. 3, допустимое значение  $W_{\max} \approx 0,2$ , с другой стороны, оптимальная расстройка примерно равна энергетическому размеру области устойчивости, т. е.  $\alpha\Delta_i^2 \approx g$ . Отсюда имеем оценку, практически не зависящую от энергии, т. е. имеем

$$g > g_{\min} \approx \frac{r_0}{0,6l^2} \frac{2\pi^2}{2}. \quad (4)$$

Ввиду малости  $r_0$  полученное ограничение вряд ли имеет практическое значение, но, по крайней мере, разрешает сформулированный выше парадокс для пучка исчезающей малой плотности (заметим, что ток пучка в этот критерий не входит, так что речь идет фактически об оценке порогово-

го значения входного сигнала). Физически критерий (4) означает, что входной сигнал должен быть достаточен хотя бы для компенсации потерь на спонтанное излучение [5].

Естественно, возникает соображение, что даже при малом превышении над (4) индуцированное излучение может стать достаточно интенсивным, если только повышать коэффициент усиления за счет увеличения плотности тока. В этом случае надо сравнить расстояние, на котором достигается критическое значение  $W$ , с радиационной длиной  $L_r$ . Согласно выражению (4) и данным работы [1] имеем:

$$L_{\text{lim}} = \left[ \frac{3l^2 \lambda \mu^2}{2\pi^3 r_0} n \right]^{1/2}; \quad L_r \approx 2 \left[ \frac{mc^3 \gamma^5 \lambda S}{2\pi e I} \right]^{1/3},$$

где  $I$  — полный ток пучка;

$S$  — его поперечное сечение, по порядку величины не меньшее  $\pi \lambda^2 \gamma^2$ .

Заметим, что в выражение для  $L_{\text{lim}}$  логично подставить оптимальное значение  $\mu = 2,6$ , поскольку именно для него получена оценка радиационной длины. Кроме того, введен дополнительный множитель  $n$ , представляющий собой "кооперативное число" электронов, находящихся на малых расстояниях друг от друга и, следовательно, излучающих когерентно даже спонтанное излучение (такой эффект частично когерентного спонтанного излучения был рассмотрен в работе [6]).

К сожалению, это число, определяющее, где проходит граница между самосогласованным и собственным полем, с трудом поддается оценке, поскольку сильно зависит от степени модуляции пучка. Можно только утверждать, что оно меняется от единицы в крайне разреженном пучке, как принято выше, до числа частиц в  $\lambda^3$ -кубе в собственной системе отсчета, если модуляция сильно развита. В этой системе длина волны равна  $\lambda\gamma$ , а плотность частиц в  $\gamma$  раз меньше, чем в лабораторной.

Таким образом,

$$n = \frac{\lambda \gamma I}{\pi e c}.$$

В результате имеем оценку применимости существующей концепции индуцированного излучения при малых токах пучка  $I < e\pi/\lambda\gamma$ , когда в  $\lambda^3$ -кубе содержится меньше одной частицы:

$$\frac{L_r}{L_{\text{lim}}} \approx 4,4 \left( \frac{I_0}{I} \right)^{1/3} \left( \frac{r_0}{\lambda} \right)^{1/2} \gamma^{4/3} < 1; \quad I_0 = \frac{mc^3}{e} \approx 17 \text{ кА},$$

и при больших токах для сильно модулированного пучка:

$$\frac{L_r}{L_{\text{lim}}} \approx 2,8 \left( \frac{I}{I_0} \right)^{1/6} \gamma^{5/6} < 1.$$

Отметим, что второе выражение весьма слабо зависит от тока. Для полностью немодулированного пучка, возможно, в качестве кооперативного числа надо использовать не число частиц в  $\lambda^3$ -кубе, а только его флуктуационную часть.

Несмотря на невысокую надежность проведенных оценок, базирующихся на полуинтуитивных соображениях, вопрос о кооперативном числе безусловно заслуживает дальнейшего изучения. Он важен, в частности, для последовательного определения статистических свойств излучения в режиме SASE, для рассмотрения квантовых эффектов отдачи [7] и для теории излучения коллектива близлежащих частиц вообще.

#### Л и т е р а т у р а

1. Buts V. A., Lebedev A. N., Kurilko V. I. The Theory of Coherent Radiation by Intense Electron Beams. — Springer, 2006.
2. Saldin E. L., Schneidmiller E. A., Yurkov M. V. The Physics of Free Electron Lasers. — Springer, 2000.
3. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. — М.: ГИФМЛ, 1962.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: ГИФМЛ, 1962.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М.. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
6. Zhirong Huang and Kwan-Je Kim: NIM. 2000. A 445. P. 105.
7. Koutin S. V., Lebedev A. N. Non-linear and Collective Phenomena in Beam Physics 1998 Workshop. Arcidoso. — Italy, 1998. P. 285.

Статья поступила в редакцию 15 мая 2008 г.

## On limits of induced radiation concept in FELs

M. A. Gorbunov, A. N. Lebedev

P. N. Lebedev Physical Institute of RAS, Moscow, Russia

*We discuss a restriction of the induced radiation concept in classical beam systems due to accompanying spontaneous radiation (radiation friction). For short wave-length FELs spontaneous radiation renders a noticeable influence on phasing of particles which is the base mechanism of induced radiation in classical systems. It leads to an essential restriction on the radiating system length and gain which cannot be compensated by an increase in the beam current.*