

УДК 535.3+537.87+533.951

Общие и прикладные вопросы лучевого подхода к физике неоднородных волн

М. А. Терещенко

Последовательно изложен аксиоматический подход к построению лучевого метода, определяющий лучевые траектории как траектории переноса энергии локально-плоских нормальных волн в вещественном фазовом пространстве. Предложен алгоритм глобальной классификации собственных значений дисперсионного тензора в многомерном случае, что делает возможным реализацию требуемого определения лучевого гамильтониана.

PACS: 42.15.Dp; 52.35.Hr

Ключевые слова: неоднородные волны, дисперсионный тензор, диссипативные системы, поток энергии волн, лучевые траектории, лучевой гамильтониан.

Введение

Лучевой метод (ЛМ), известный как многомерный метод ВКБ, — один из основных асимптотических методов в теории волн. Он не теряет своей актуальности несмотря на стремительный рост возможностей вычислительной техники и соответствующий рост популярности численного моделирования, основанного на решении полных волновых уравнений. Особая привлекательность ЛМ заключается в том, что результаты расчетов имеют геометрически наглядный вид и ясную физическую интерпретацию. Поэтому лучевой подход к волновым явлениям в сложной физической системе позволяет эффективно устанавливать закономерности влияния различных параметров задачи на эти явления. Кроме того, для ЛМ характерна относительно высокая скорость расчетов, что крайне важно в задачах численной оптимизации параметров проектируемых физических систем.

Основа ЛМ — процедура численного интегрирования системы лучевых уравнений, представляющих собой обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Суть вывода лучевых уравнений в рамках геометрической оптики [1—3] состоит в том, что они являются характеристическими уравнениями для уравнения эйконала — нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, описываю-

щего поведение фазы плоской волны в однородном случае. Лучевые уравнения описывают некоторое семейство лучевых траекторий и эволюцию фазы волны вдоль этих траекторий. Для описания переноса амплитуды волны, а заодно и установления физического смысла лучевых траекторий требуется допустить слабую неоднородность амплитуды и параметров среды. На этом этапе логично допустить и наличие диссипации энергии волны как одной из причин неоднородности ее амплитуды. Однако последнее допущение означает, что исходное уравнение эйконала является комплексным [4], причем не обязательно с относительно малой мнимой частью [5]. Это приводит к тому, что характеристические лучевые траектории определены не в вещественном, а в комплексном фазовом пространстве. Физическая интерпретация комплексного формализма требует рассмотрения асимптотических свойств волновых пакетов, и реконструкция решения в реальном пространстве [6—8] представляет собой наиболее обсуждаемую часть метода.

На практике комплексный ЛМ более громоздкий, чем непосредственный расчет лучевых траекторий в реальном пространстве. Вследствие этого получила широкое распространение упрощенная схема использования ЛМ: лучевые траектории рассчитываются в недиссипативном приближении, в вещественном фазовом пространстве, а затем вдоль этих траекторий с учетом диссипации вычисляется распределение амплитуды волны. Сама лучевая траектория трактуется при этом как траектория максимума волнового пакета, и ожидается, что точность результатов вполне достаточна для прикладных задач.

Терещенко Максим Алексеевич, старший научный сотрудник.

Институт общей физики РАН им. А. М. Прохорова, отдел физики плазмы.

Россия, 119911, Москва, ул. Вавилова 38.

Тел.: +7 (499) 503-83-37; E-mail maxt@inbox.ru

Статья поступила в редакцию 19 февраля 2010 г.

© Терещенко М. А., 2010

С позиции конструктивной методологии имеет право на существование и обратный, аксиоматический, подход к построению ЛМ. Если не рассматривать вопрос о соответствии лучевого решения асимптотическому решению соответствующей волновой задачи, можно определить лучевые траектории как траектории переноса энергии локально-плоских нормальных волн в фазовом пространстве вещественных физических величин. При таком определении оказывается, что диссипации энергии волны в приближении слабой неоднородности уравнения лучевых траекторий имеют тот же вид и те же коэффициенты, что и в описанном выше упрощенном варианте комплексного ЛМ. К выгодам аксиоматического подхода можно отнести отсутствие необходимости физической интерпретации комплексных координат фазового пространства и математическую компактность. Последовательное изложение такого подхода к построению ЛМ исследования распространения многокомпонентных волн в неоднородной диспергирующей диссипативной среде и является основной целью настоящей работы. Наряду с общей теорией обсуждаются и важные аспекты практической реализации ЛМ.

Уравнения переноса энергии в приближении слабой неоднородности

Рассмотрим свободное распространение многокомпонентных монохроматических волн в неоднородной анизотропной среде с пространственной и временной дисперсией. Не конкретизируя физическую природу волнового процесса, отметим, что столь общая постановка задачи в полной мере востребована, например, при рассмотрении распространения и поглощения электромагнитных волн в магнитоактивной плазме.

Волновое векторное уравнение, допускающее нелокальное в пространстве и времени взаимодействие волнового поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ со слабо неоднородной средой и подчиняющееся принципу причинности, может быть представлено в следующем универсальном виде [9, 10]:

$$\int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\Lambda}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \frac{1}{2}(\mathbf{r}+\mathbf{r}'), t-t') E_{\beta}(\mathbf{r}', t') = 0, \quad (1)$$

где $\hat{\Lambda}$ — дифференциальный оператор в частных производных с коэффициентами, являющимися функциями указанных аргументов.

При этом зависимость коэффициентов от $\frac{1}{2}(\mathbf{r}+\mathbf{r}')$ считается намного более слабой, чем от

$(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Уравнение (1) описывает стационарный волновой процесс, так как зависимость ядра от времени имеет чисто разностный характер. Такое представление достаточно для описания рассматриваемой нами монохроматической волны (пропорциональной $\exp(-i\omega t)$), а обобщение на случай слабо нестационарной среды не вызывает принципиальных затруднений. Здесь и далее мы считаем, что $\mathbf{r} = \{r_{\alpha}\}$ — декартовы координаты, и подразумеваем суммирование по повторяющимся у множителей греческим индексам.

В приближении неограниченной однородной непоглощающей среды (далее — нулевое приближение) $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')$, и волновое поле в (1) может быть представлено в виде суперпозиции плоских волн $\mathbf{E}_0(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}' - i\omega t')$, удовлетворяющих системе алгебраических уравнений

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) E_{0\beta}(\mathbf{k}) = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{k} и ω — вещественные величины; матрица

$$\Lambda(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^{+\infty} dt'' \int d\mathbf{r}'' \hat{\Lambda}(\mathbf{r}'', t'') \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'' + i\omega t'') \quad (3)$$

является дисперсионным тензором однородной среды.

Корректное решение системы уравнений (2) заключается в нахождении значений $\lambda^{(m)}(\mathbf{k}, \omega)$ матрицы Λ (3), при которых

$$\Lambda_{\alpha\beta} \mathbf{E}_{0\beta}^{(m)} = \lambda^{(m)} \mathbf{E}_{0\alpha}^{(m)}, \quad \mathbf{E}_{0\alpha}^{(m)*} \Lambda_{\alpha\beta} = \lambda^{(m)} \mathbf{E}_{0\beta}^{(m)*}, \quad (4)$$

и соответствующих им векторов $\mathbf{E}_0^{(m)}$ (с точностью до произвольного множителя). Количество собственных значений равно размерности системы (2), при этом совпадающие (кратные) значения имеют различные собственные векторы. При условии, что найденные собственные значения классифицированы правильно, т. е. каждое собственное значение с определенным индексом m и соответствующий ему собственный вектор являются непрерывными функциями компонент матрицы Λ , уравнение

$$\lambda^{(m)}(\mathbf{k}) = 0 \quad (5)$$

является дисперсионным для m -й независимой нормальной волны (моды).

При наличии вещественных решений каждое из уравнений (5) определяет одно или несколько значений волнового вектора \mathbf{k} , для которых среда яв-

ляется оптически прозрачной*. Для прочих \mathbf{k} интерференционное самозатухание (приводящее не к потере энергии, а к ее перераспределению) делает невозможным свободное распространение данной нормальной волны. Собственный вектор $\mathbf{E}_0^{(m)}$, вычисленный при значении \mathbf{k} , удовлетворяющем (5), является вектором поляризации рассматриваемой моды.

В неоднородной и (или) диссипативной среде с характерным минимальным пространственным масштабом неоднородности, значительно превосходящим длину волны, волновое поле может быть представлено в виде суперпозиции квазиплоских волн с меняющейся в пространстве амплитудой. В дальнейшем любые пространственные градиенты будем считать величинами первого порядка малости. Ограничиваясь приближением первого порядка, входящие в (1) величины \mathbf{E} и $\hat{\Lambda}$ выражаются через локальные значения этих величин следующим образом:

$$\hat{\Lambda} = \left(1 + \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \hat{\Lambda}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{r}, t - t'), \quad (6)$$

$$\mathbf{E} = \left(1 + (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - i\omega t'),$$

где $(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ и \mathbf{r} — независимые аргументы $\hat{\Lambda}$, соответственно $\partial \hat{\Lambda} / \partial \mathbf{r}$ вычисляется при фиксированном $(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$.

Если подставить разложения (6) в уравнение (1) и отбросить величины более высокого, чем первый, порядка малости, получим:

$$\Lambda_{\alpha\beta} E_{0\beta} - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \cdot \left(\frac{\partial \Lambda_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{r}} E_{0\beta} \right) - i \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \cdot \left(\Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial E_{0\beta}}{\partial \mathbf{r}} \right) = 0. \quad (7)$$

Очевидно, теперь $\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ имеет смысл локального дисперсионного тензора, все аргументы которого в силу (6) по-прежнему вещественны. Уравнение (7) в отличие от аналогичного ему уравнения нулевого приближения (2) содержит информацию о пространственном изменении энергетических характеристик волнового поля. Для получения этой информации в явном виде преобразуем уравнение (7) в скалярное уравнение для билинейных по амплитуде волны величин:

* Считаем нецелесообразным рассматривать различные вещественные решения (если их больше одного) уравнения (5) с фиксированным m как отдельные независимые моды. Это объясняется тем, что уже в слабо неоднородной среде будут существовать непрерывные траектории в фазовом пространстве, соответствующие свободному распространению волны, соединяющие такие решения.

$$E_{0\alpha}^* \Lambda_{\alpha\beta} E_{0\beta} - \frac{i}{2} E_{0\alpha}^* \times \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\Lambda_{\alpha\beta} E_{0\beta}) + \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial E_{0\beta}}{\partial \mathbf{r}} \right) = 0. \quad (8)$$

Так же, как и в нулевом приближении, перейдем к рассмотрению собственных значений матрицы Λ . Подстановки (4) позволяют разложить уравнение (8) в совокупность уравнений для каждой из независимых мод:

$$2i \left(\lambda^{(m)} + \frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial \mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \arg \mathbf{E}_0^{(m)}}{\partial \mathbf{r}} \right) |\mathbf{E}_0^{(m)}|^2 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial \mathbf{k}} |\mathbf{E}_0^{(m)}|^2 \right) = O \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\lambda^{(m)} E_{0\alpha}^{(m)} \frac{\partial E_{0\alpha}^{(m)*}}{\partial \mathbf{k}} \right) \right). \quad (9)$$

Исходя из уравнения нулевого приближения (5), считаем $\lambda^{(m)}$ величиной первого порядка малости. Заметим, что при этом нет никаких оснований считать $\partial \lambda^{(m)} / \partial \mathbf{k}$ малой величиной. Таким образом, все слагаемые в левой части уравнения (9) имеют первый порядок малости, а его правая часть имеет второй порядок малости, и в рамках данного приближения этой величиной следует пренебречь.

Обратим внимание на то, что до сих пор в приближении первого порядка амплитуда $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ и волновой вектор \mathbf{k} не были определены однозначным образом. Разумеется, при приведении уравнения (9) к окончательному виду эта неоднозначность должна быть устранена. Для этого заметим, что при любом определении \mathbf{E}_0 и \mathbf{k} , при котором $|\partial \arg \mathbf{E}_0 / \partial \mathbf{k}| \ll |\mathbf{k}|$, справедливо равенство

$$\lambda^{(m)}(\mathbf{k}) + \frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial \mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \arg \mathbf{E}_0}{\partial \mathbf{r}} = \lambda^{(m)}(\partial \arg \mathbf{E} / \partial \mathbf{r}) \quad (10)$$

с точностью, соответствующей приближению первого порядка.

Поэтому можно сказать, что указанная свобода выбора \mathbf{E}_0 и \mathbf{k} не влияет на первое слагаемое в левой части (9). Так как слагаемых всего два, то очевидно, что влияние на второе слагаемое также является величиной более высокого порядка малости. Итак, если определить волновой вектор \mathbf{k} как точное локальное значение градиента фазы волны, а \mathbf{E}_0 — как комплексную амплитуду, у которой изменяется в пространстве только ее модуль, можем переписать (9) в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda^{(m)}}{\partial \mathbf{k}} |\mathbf{E}_0|^2 \right) = 2 \operatorname{Im} \lambda^{(m)} |\mathbf{E}_0|^2; \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial \operatorname{Im} \lambda^{(m)}}{\partial \mathbf{k}} |\mathbf{E}_0|^2 \right) = -2 \operatorname{Re} \lambda^{(m)} |\mathbf{E}_0|^2. \quad (12)$$

Уравнения (11) и (12) являются стационарными уравнениями пространственного баланса энергии волны, так как их левые части представляют собой, соответственно, дивергенции активного и реактивного потоков энергии (по терминологии, принятой в электродинамике) с точностью до постоянного множителя. Таким образом, их правые части отвечают, соответственно, за диссипативное и недиссипативное (интерференционное) пространственное затухание волны. В диссипативной среде условие полной оптической прозрачности является недостижимым. Однако условие интерференционной прозрачности

$$\operatorname{Re}\lambda^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = 0 \quad (13)$$

по-прежнему может иметь вещественные решения, определяющие локальные характеристики нормальной волны в случае слабого поглощения. Тогда (13) играет роль дисперсионного уравнения в слабо диссипативной среде.

Как следует из вывода уравнений (11) и (12), они не обусловлены малостью антиэрмитовой части дисперсионного тензора по сравнению с его эрмитовой частью. Поэтому они справедливы и для случаев распространения волны в условиях резонансов, если при этом не нарушается критерий слабой неоднородности. Для электромагнитных волн в среде с существенной антиэрмитовой составляющей диэлектрического тензора уравнение типа (11), являющееся развитием теоремы Пойнтинга, было впервые получено в [11, 12]. Предложенный выше вывод уравнений (11) и (12) показывает, что их вид не зависит от конкретной физической природы волны.

Уравнения лучевых траекторий

При лучевом подходе к распространению волн практический интерес вызывает трассировка вектора активного потока энергии, так как именно он определяет в конечном счете пространственную локализацию энерговыделения при затухании волны. Из (11) следует, что активный поток энергии нормальной волны (обозначим его \mathbf{P}) пропорционален $\partial \operatorname{Re}\lambda^{(m)}/\partial \mathbf{k}$. Для любой точки начальной эквифазной поверхности волны можно параметрически определить пространственную кривую $\mathbf{R}(s)$ такую, что

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = f \left[\frac{\partial \operatorname{Re}\lambda^{(m)}}{\partial \mathbf{k}} \right]_{\substack{\mathbf{r}=\mathbf{R}(s) \\ \mathbf{k}=\mathbf{K}(s)}}. \quad (14)$$

Пусть f — произвольный вещественный множитель, а $\mathbf{K}(s)$ — градиент фазы волны в точке $\mathbf{r} = \mathbf{R}(s)$, тогда вектор $\mathbf{P}(s) \equiv \mathbf{P}(\mathbf{r} = \mathbf{R}(s), \mathbf{k} = \mathbf{K}(s))$ будет направлен по касательной к кривой $\mathbf{R}(s)$ при лю-

бом значении параметра s . В этом смысле траектория $\mathbf{R}(s)$ будет являться траекторией переноса энергии волны. Если мы определим $\mathbf{K}(s)$ как

$$\frac{d\mathbf{K}}{ds} = -f \left[\frac{\partial \operatorname{Re}\lambda^{(m)}}{\partial \mathbf{r}} \right]_{\substack{\mathbf{r}=\mathbf{R}(s) \\ \mathbf{k}=\mathbf{K}(s)}}, \quad (15)$$

то решением системы уравнений (14) и (15) будет траектория в шестимерном фазовом пространстве (\mathbf{r}, \mathbf{k}) , вдоль которой $d\operatorname{Re}\lambda^{(m)}/ds = 0$. При этом, если в начальной точке этой траектории выполнено дисперсионное уравнение (13), то оно будет выполнено во всех ее точках. Соответственно, вдоль всей траектории вектор $\mathbf{K}(s)$ будет равен локальному градиенту фазы нормальной волны, что и было необходимым условием в (14).

Итак, уравнения (14) и (15) с начальными условиями, удовлетворяющими уравнению (13), определяют искомую лучевую траекторию волны. Учитывая коллинеарность векторов \mathbf{P} и $d\mathbf{R}/ds$, уравнение (11) может быть записано в виде уравнения для изменения мощности нормальной волны (т. е. модуля \mathbf{P}) вдоль лучевой траектории:

$$\frac{d\mathbf{P}}{ds} = 2f\mathbf{P} \left[\operatorname{Im}\lambda^{(m)} \right]_{\substack{\mathbf{r}=\mathbf{R}(s) \\ \mathbf{k}=\mathbf{K}(s)}}. \quad (16)$$

Уравнения (14)–(16) составляют основу лучевого подхода к проблеме распространения волн. В этих уравнениях намеренно сохранен калибровочный множитель f в явном виде. Так, если $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ — функция, заведомо не обращающаяся в ноль на лучевой траектории, уравнения (14) и (15) могут быть записаны в стандартном гамильтоновом виде

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{k}} \right]_{\substack{\mathbf{r}=\mathbf{R}(s) \\ \mathbf{k}=\mathbf{K}(s)}}, \quad \frac{d\mathbf{K}}{ds} = - \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \right]_{\substack{\mathbf{r}=\mathbf{R}(s) \\ \mathbf{k}=\mathbf{K}(s)}}, \quad (17)$$

где функцию $H(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = f\operatorname{Re}\lambda^{(m)}$ принято называть лучевым гамильтонианом.

Очевидно существует определенная свобода в выборе этой функции.

Из разнообразия численных кодов, предназначенных для расчета лучевых траекторий, можно выделить три основных способа определения лучевого гамильтониана.

1. С теоретической точки зрения выбор в качестве f функции, не зависящей от \mathbf{r} и \mathbf{k} , является естественным. Этот вариант определения функции H требует при известной матрице Λ нахождения ее собственного значения, соответствующего рассматриваемой моде. Отметим, что задача заключается не просто в нахождении всей совокупности собственных значений матрицы Λ , а в их глобальной классификации — установлении непрерывного на (\mathbf{r}, \mathbf{k}) соответствия между вычисляе-

мыми значениями $\lambda^{(j)}$ и индексами мод. В противном случае при расчете лучевой траектории неизбежны "перескоки" между модами, противоречащие физическому смыслу. Сложности, связанные с разработкой такого алгоритма применительно к неэрмитовым матрицам, не позволили этому методу получить сколько-нибудь широкое распространение. Такой способ определения гамильтониана упрощает структуру численного кода, производящего расчет лучевых траекторий, и значительно повышает достоверность результатов расчета диссипации. В Приложении представлен вариант алгоритма, позволяющего вычислять собственные значения матрицы размером 3×3 , упорядоченные необходимым для их непрерывности образом. Такой алгоритм, по сути, сводит задачу глобальной классификации собственных значений к их начальной классификации в какой-либо точке фазового пространства.

2. Наиболее часто в численных кодах используется определение $H = \det(\Lambda^H)$ (индекс H обозначает эрмитову часть матрицы), причем обычно при этом дисперсионным уравнением называют уравнение $\det(\Lambda^H) = 0$. При таком выборе гамильтониана роль калибровочного множителя выполняет функция

$$f = \prod_{j \neq m} \operatorname{Re} \lambda^{(j)}. \quad (18)$$

При выполнении условия (13) такая калибровка дает

$$f \operatorname{Im} \lambda^{(m)} = \operatorname{Im}[\det(\Lambda) - \det(\Lambda^A)], \quad (19)$$

(индекс A — антиэрмитова часть матрицы), и уравнение диссипации энергии (16) также может быть представлено в виде, не содержащем собственных значений. Однако данный метод имеет недостатки. Даже при хорошей точности сохранения инварианта $\det(\Lambda^H) = 0$ вдоль вычисленной лучевой траектории, точность выполнения (13) может быть низкой, и использование (19) может приводить к значительным ошибкам в расчете поглощения. Более серьезной проблемой для данного метода являются вполне возможные при распространении в неоднородной среде случаи вырождения нормальных волн, когда $f(\mathbf{r} = \mathbf{R}(s), \mathbf{k} = \mathbf{K}(s)) \rightarrow 0$. В таких зонах надежный расчет лучевой траектории выбранной нормальной волны на основе системы уравнений (17) с гамильтонианом $H = \det(\Lambda^H)$ невозможен, и поэтому функция f (18) должна искусственно корректироваться.

3. В качестве гамильтониана можно использовать функцию $H = k_R - k_{mR}(\mathbf{r})$, где k_R — проекция волнового вектора на локальное направление лучевой траектории $\partial \det(\Lambda^H) / \partial \mathbf{k}$, а $k_{mR}(\mathbf{r})$ — значе-

ние этой проекции, соответствующее требуемому решению уравнения $\det(\Lambda^H) = 0$. Это определение представляет собой линеаризацию по \mathbf{k} функции $\det(\Lambda^H)$ в окрестности нуля, что допустимо, так как лучевые уравнения (17) не содержат производных H более высоких порядков, чем первый. При таком гамильтониане вырождение нормальных волн не создает вычислительных проблем. Для коэффициента поглощения имеем

$$f \operatorname{Im} \lambda^{(m)} = \left| \frac{\partial \det(\Lambda^H)}{\partial \mathbf{k}} \right|^{-1} \operatorname{Im}[\det(\Lambda) - \det(\Lambda^A)],$$

т. е., как и в предыдущем методе, нахождение собственного значения не требуется.

Основным недостатком данного метода является его непригодность в окрестностях точек поворота луча, а при отсутствии аналитических выражений корректное вычисление k_{mR} в общем случае представляет собой трудоемкую задачу. В численных кодах, применяемых в физике плазмы, удерживаемой внешним магнитным полем, иногда используется [13] разновидность этого метода:

$$H = k_{\perp}^2 - k_{m\perp}^2(\mathbf{r}, K_{\parallel}),$$

где фигурируют перпендикулярная и параллельная составляющие волнового вектора по отношению к локальному направлению магнитного поля.

Такая форма объясняется тем, что во многих физических ситуациях (когда градиент гамильтониана почти перпендикулярен магнитному полю, а кривизна силовых линий магнитного поля невелика) величина k_{\parallel} меняется вдоль лучевой траектории значительно медленнее, чем k_{\perp} .

На практике при расчетах лучевых траекторий в широком диапазоне аргументов дисперсионной функции обычно используется комбинация методов 2 и 3. Это позволяет избежать дефектов, присутствующих им по отдельности, но требует предварительного выяснения свойств функции $\det(\Lambda^H)$ в данном диапазоне для корректной настройки переключения между двумя определениями гамильтониана [14].

В данной работе авторы не касаются большинства вопросов, связанных с использованием метода лучевых траекторий при рассмотрении эффектов трансформации мод. Описание современного состояния соответствующей теории можно найти в [15].

Параксиальная структура волновых пучков

В рамках лучевого подхода к распространению волн можно описать форму волнового фронта и поперечное распределение амплитуды вблизи лу-

чевой траектории с помощью функций, формально зависящих лишь от параметра s . Так, пространственную зависимость фазы волны можно представить в виде ряда

$$\begin{aligned} \Phi(s) + K_\alpha(s)\delta r_\alpha + \frac{1}{2}Q_{\alpha\beta}(s)\delta r_\alpha\delta r_\beta + \\ + \frac{1}{6}T_{\alpha\beta\gamma}(s)\delta r_\alpha\delta r_\beta\delta r_\gamma + \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{R}(s)$;

$Q_{\alpha\beta}$, $T_{\alpha\beta\gamma}$, ... — коэффициенты, которые комплексны и симметричны относительно перестановки индексов.

При этом физический смысл требует, чтобы определение фазы было пространственно-однозначным, т. е. производная функции (20) по s при фиксированном \mathbf{r} была равна нулю. Поэтому на коэффициенты ряда (20) должны быть наложены следующие рекуррентные условия:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{ds} = K_\alpha \frac{dR_\alpha}{ds}, \quad \frac{dK_\alpha}{ds} = Q_{\alpha\beta} \frac{dR_\beta}{ds}, \\ \frac{dQ_{\alpha\beta}}{ds} = T_{\alpha\beta\gamma} \frac{dR_\gamma}{ds}, \dots \end{aligned}$$

Первое из этих условий автоматически выполняется на лучевой траектории в силу определения \mathbf{K} . Следующее условие, с учетом уравнений (17) приводит к векторному уравнению

$$\left[\widehat{D}_\alpha H \right]_{\mathbf{k}=\mathbf{K}(s)}^{\mathbf{r}=\mathbf{R}(s)} = 0, \quad \widehat{D}_\alpha = \frac{\partial}{\partial r_\alpha} + Q_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial k_\beta}, \quad (21)$$

которое, по аналогии с (13), может быть названо дифракционным уравнением. Его удобно преобразовать в уравнение эволюционного типа, потребовав, чтобы полная производная левой части по s была равна нулю. При этом преобразования значительно упрощаются, если сразу заметить, что

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial s} + \frac{dR_\alpha}{ds} \widehat{D}_\alpha.$$

Окончательное уравнение для коэффициентов второго порядка имеет вид

$$\frac{dQ_{\alpha\beta}}{ds} = - \left[\widehat{D}_\beta \widehat{D}_\alpha H \right]_{\mathbf{k}=\mathbf{K}(s)}^{\mathbf{r}=\mathbf{R}(s)}. \quad (22)$$

В аналогичном виде, но несколько иными способами, это уравнение было получено и обсуждалось в [1, 5, 16—18]. Численное интегрирование матричного уравнения (22) с начальными условиями, удовлетворяющими уравнению (21), может проводиться отдельно от интегрирования системы (17), если последнее уже выполнено и лучевая траектория известна.

Коэффициенты более высоких порядков в (20) могут быть найдены аналогичным способом, однако резко возрастающий объем вычислений и численная неустойчивость соответствующих уравнений делают эту процедуру малоэффективной с практической точки зрения. Но для многих прикладных задач достаточно знания коэффициентов второго порядка, поскольку именно они характеризуют широкий класс явлений, связанных с диффузионной дифракцией волн. Физически, отбрасывая в разложении (20) члены третьего и более высоких порядков, мы ограничиваемся рассмотрением гауссовых пучков, в общем случае астигматических. При этом вещественная часть матрицы $\mathbf{Q}(s)$ определяет кривизну волнового фронта на оси пучка, а ее мнимая часть (после приведения к диагональной форме) определяет главные оси и соответствующие значения ширины поперечного профиля амплитуды пучка.

Важно отметить, что параксиальный метод как метод расчета формы волновых пучков имеет ограниченную область применения. Так, система уравнений (22) неустойчива в условиях неоднородной рефракции, когда близко расположенные и почти параллельные лучевые траектории начинают резко расходиться. Кроме того, как следует из аксиоматики лучевого метода, уравнения параксиального приближения (22) совместно с лучевыми уравнениями (17) неправомерно использовать для непосредственного расчета тонких пространственно-коллимированных волновых пучков и в тех областях, где возникают каустики. Разумной альтернативой в этом случае может служить построение решения на основе суперпозиции широких пучков [19], для которых приближение локально-плоских волн более адекватно. Примером реализации такого подхода является численный метод, изложенный в [20]. Наконец, параксиальный метод не следует применять при существенной поперечной неоднородности диссипации пучка. Метод, более пригодный для такой ситуации, предложен в [21].

Заключение

Представленный в настоящей работе аксиоматический подход к построению лучевого метода представляет собой универсальное и математически компактное обоснование вещественного лучевого формализма применительно к неоднородным диссипативным системам. Лучевой метод при таком подходе теряет свой асимптотический характер, но становится средством реконструкции энергетического каркаса волнового поля — семейства траекторий, вдоль которых происходят перенос и диссипация энергии. Это свойство метода особенно ценно при изучении особенностей распространения и поглощения волн в сложных двух- и трех-

мерно-неоднородных системах (например, в плазменных магнитных ловушках различных типов). В таких системах стратегия массивированных лучевых расчетов часто оказывается наиболее выгодной из всех методов численного моделирования как из-за наглядности геометрических закономерностей, так и благодаря относительной простоте организации параллельных или распределенных вычислений. Поэтому энергетическая сущность вычисленных лучевых траекторий в реальном пространстве позволяет немедленно определять локализацию энерговклада, служить расчетной базой для рефлектометрии и некоторых других методов волновой диагностики без необходимости детального восстановления структуры волнового поля. Кроме того, при надлежащей постановке задачи ЛМ в данной трактовке может быть использован для верификации других методов волновых расчетов, более сложных с вычислительной точки зрения и потому более подверженных сбоям и дефектам.

Концепция переноса энергии вдоль лучевых траекторий требует, чтобы лучевой гамильтониан был пропорционален вещественной части конкретного (соответствующего рассматриваемой независимой волне) собственного значения дисперсионного тензора. Процедура выделения требуемого собственного значения из всей их совокупности в многомерном случае далеко не тривиальна, а существующие способы обхода этой проблемы при определении гамильтониана имеют серьезные недостатки.

В данной работе предложен численный алгоритм, позволяющий получать упорядоченные совокупности собственных значений и собственных векторов, сохраняющих свойство непрерывности компонент дисперсионного тензора в неоднородной среде. Таким образом, задача глобальной классификации собственных значений при расчете лучевой траектории сводится к их локальной начальной классификации, что дает возможность реализовать наиболее простое и выгодное определение лучевого гамильтониана. Детали и результаты применения такого алгоритма при лучевых расчетах в физических ситуациях, представляющих сложности для традиционных способов определения гамильтониана, будут представлены в отдельной статье.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Алгоритм глобальной классификации собственных значений дисперсионного тензора

Цель искомого алгоритма можно сформулировать как нахождение такой упорядоченной совокупности собственных значений $\lambda^{(j)}$ и соответствующих им соб-

ственных векторов, что все элементы этой совокупности являются непрерывными функциями элементов исходной матрицы Λ . Тогда в неоднородной среде полученная таким образом совокупность также будет непрерывна, а значит, определенная локально классификация собственных значений будет иметь глобальный характер. Численное нахождение корней характеристического уравнения $\det(\Lambda - \lambda \mathbf{I}) = 0$ в общем многомерном случае не может обеспечить их правильной упорядоченности, так как в этом уравнении уже утрачена информация о взаимном расположении элементов Λ , а сами корни не обладают какими-либо уникальными свойствами. Аналитическое решение характеристического уравнения также не обеспечивает непрерывности найденных корней даже для исходной эрмитовой матрицы размером 3×3 .

Перспективным подходом представляется приведение исходной матрицы к треугольному виду (с разумной точностью) с помощью конечного числа преобразований подобия. Тогда, если каждое из этих преобразований обладает свойством непрерывности, то диагональные элементы результирующей матрицы будут представлять собой искомую упорядоченную совокупность собственных значений. Ниже приведен вариант реализации такого подхода в применении к электродинамике плазмы.

Рассмотрим дисперсионный тензор Λ магнитоактивной плазмы в декартовой системе координат, ориентированной таким образом, что вектор внешнего магнитного поля имеет координаты $(0, 0, B)$, а волновой вектор — $(k_{\perp}, 0, k_{\parallel})$. Тензор Λ представляет собой комплексную матрицу размером 3×3 , недиагональные элементы которой связаны соотношениями $\Lambda_{12} = -\Lambda_{21}$, $\Lambda_{13} = \Lambda_{31}$ и $\Lambda_{23} = -\Lambda_{32}$. Прежде всего следуя [22], приведем эту матрицу к симметричному виду с помощью преобразования подобия $\mathbf{S}_1^{-1} \Lambda \mathbf{S}_1$, где

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_1^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

При этом если исходная матрица Λ — эрмитова, то матрица $\dot{\Lambda} = \mathbf{S}_1^{-1} \Lambda \mathbf{S}_1$ будет вещественной. Теперь к матрице $\dot{\Lambda}$ можно применить итерационный процесс, заключающийся в циклическом подавлении недиагональных элементов посредством плоских вращений. Приведем пример такого элементарного преобразования, соответствующего вращению в плоскости (1, 3) и сохраняющего свойство симметричности исходной матрицы. Пусть

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2} & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ -z & 0 & \sqrt{1-z^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2^{-1} = \mathbf{S}_2^T,$$

где $z = z(A_{11} - A_{33}, A_{13})$ — непрерывная функция двух комплексных переменных, по модулю меньшая единицы и обладающая следующими свойствами:

$$z \sim \frac{A_{13}}{A_{33} - A_{11}} \quad (|A_{13}| \ll |A_{11} - A_{33}|),$$

$$z \sim 2^{-1/2} \quad (|A_{11} - A_{33}| \ll |A_{13}|),$$

$$\left| (A_{11} - A_{33})z\sqrt{1-z^2} + A_{13}(1-2z^2) \right| < (1+\varepsilon)|A_{13}|, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Тогда преобразование подобия $\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}_2$ обеспечивает асимптотическое стремление к нулю элемента (1, 3), в то время как сумма модулей остальных недиагональных элементов изменяется незначительно. При этом, если $|A_{13}| \ll |A_{12}| + |A_{23}|$, данное преобразование приносит мало пользы. Однако в остальных случаях сумма модулей всех недиагональных элементов существенно уменьшается. Полный цикл аналогичных преобразований подобия (т. е. последовательность вращений в плоскостях (1, 3), (1, 2) и (2, 3)) включает в себя, по крайней мере, одно такое событие.

Таким образом, в результате полного цикла преобразований недиагональность матрицы эффективно уменьшается. Итак, повторяя преобразования типа $\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}_2$ циклически в установленной очередности по направлению вращения, можно добиться того, что после n -го преобразования сумма модулей недиагональных элементов станет меньше допустимой погрешности вычислений. Практически для этого достаточно всего несколько циклов преобразований. Все рассмотренные преобразования являются непрерывными относительно значений матричных элементов, а очередность этих преобразований не зависит от промежуточных результатов. Это означает, что диагональные элементы результирующего преобразования подобия $\mathbf{S}_n^{-1}\dots\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\dots\mathbf{S}_n$ представляют собой совокупность собственных значений $\lambda^{(j)}$, упорядоченных непрерывным образом относительно значений элементов исходной матрицы \mathbf{A} . При этом столбцы матрицы $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\dots\mathbf{S}_n$ с точностью до произвольного множителя будут являться соответствующими собственными векторами матрицы \mathbf{A} .

*Автор выражает глубокую признательность
С. Е. Гребенцову, Л. М. Коврижных,
С. С. Павлову, А. С. Сахарову, С. В. Щенотову
за обсуждение работы и М. В. Болдыревой —
за помощь в оформлении статьи.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ
(грант 08-02-13602 ОФИ-Ц).

Литература

1. Hayes W. D. // Proc. Roy. Soc. A. 1970. V. 320. P. 209.
2. Крацов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980.
3. Бабич В. М. В сб. Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, Т. 34. — М.: ВИНТИ, 1988. С. 93.
4. Бернштейн А., Фридленд Л. В сб. Основы физики плазмы, Т. 1 — М.: Энергоатомиздат, 1983. С. 393.
5. Bravo-Ortega A., Glasser A. H. // Phys. Fluids B. 1991. V. 3. P. 529.
6. Muschietti L., Dum C. T. // Phys. Fluids B. 1993. V. 5. P. 1383.
7. Sonnenschein E., Rutkevich I., Censor D. // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 1005.
8. Тимофеев А. В. // УФН. 2005. Т. 175. С. 637.
9. Berk H. L., Pfirsch D. // J. Math. Physics. 1980. V. 21. P. 2054.
10. McDonald S. W. // Physics Reports. 1988. V. 158. No. 6. P. 337.
11. Tokman M. D., Westerhof E., Gavrilova M. A. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2000. V. 42. P. 91.
12. Токман М. Д., Вестерхоф Е., Гаврилова М. А. // ЖЭТФ. 2000. Т. 118. С. 1319.
13. Westerhof E. // Plasma Phys. Control. Fusion. 1997. V. 39. P. 1015.
14. Castejon F., Cappa A., Tereshchenko M., Fernandez A. // Nucl. Fusion. 2008. V. 48. P. 075011.
15. Tracy E. R., Kaufman A. N., Jaun A. // Phys. Plasmas. 2007. V. 14. P. 082102.
16. Bernstein I. B. // Phys. Fluids. 1975. V. 18. P. 320.
17. Тимофеев А. В. // Физика плазмы. 1995. Т. 21. С. 646.
18. Poli E., Pereverzev G. V., Peeters A. G. // Phys. Plasmas. 1999. V. 6. P. 5.
19. Попов М. М. // Зап. науч. сем./ ЛОМИ. 1981. Т. 104. С. 195.
20. Saveliev A. N. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2009. V. 51. P. 075004.
21. Балакин А. А., Балакина М. А., Пермитин Г. В., Смирнов А. И. // Физика плазмы. 2008. Т. 34. С. 533.
22. Эллис В., Буксбаум С., Берс А. Волны в анизотропной плазме. — М.: Атомиздат, 1966.

General and applied aspects of a ray-based approach to the physics of inhomogeneous waves

M. A. Tereshchenko

Prokhorov Institute of General Physics, Russian Academy of Sciences,
38 Vavilov str., Moscow, 119911, Russia
E-mail maxt@inbox.ru

An axiomatic approach to the construction of a ray-based method is consistently presented. The ray trajectories are defined as the real phase-space trajectories of energy transport associated with the eigenmodes of locally plane waves. An algorithm for the global identification of the multidimen-

sional dispersion tensor eigenvalues is suggested, thus enabling the implementation of the proper ray Hamiltonian definition.

PACS: 42.15.Dp; 52.35.Hr

Keywords: inhomogeneous waves, dispersion tensor, dissipative systems, wave power flux, ray trajectories, ray Hamiltonian.

Bibliography — 22 references.

Received 19 February 2010