

УДК 537.52.621.384

## Моделирование динамики частиц в трастере

Т. В. Чернышёв, А. С. Чихачёв, А. Н. Шрамов

*Изучены численные решения уравнений, описывающих процесс ускорения ионов в холловском плазменном ускорителе (трастере). Система представляет собой трехкомпонентную плазму: нейтральные атомы, свободные электроны и однократно ионизированные атомы. В тракте ускорения ионы движутся без столкновений, т. е. длина свободного пробега ионов больше длины тракта ускорения, тогда как электроны движутся в диффузионном режиме поперек магнитного поля. Показано, что при использовании уравнения Пуассона для электрического поля система уравнений динамики не имеет акустической особенности, возникающей при решении квазинейтральной системы, при совпадении скоростей потока ионов и ионно-звуковой.*

PACS: 52.77.Di

*Ключевые слова:* трастер, холловский плазменный ускоритель, холловский двигатель, уравнение Пуассона.

### Введение

Холловский ускоритель является газоразрядным устройством, обеспечивающим ускорение плазмы в скрещенных  $E \perp H$ -полях.

Обычно применяется цилиндрическая система с замкнутым дрейфом электронов, в которой поперечное магнитное поле уменьшает осевую подвижность электронов, а продольное электрическое поле ускоряет ионы. В связи с возможными применениями в космических условиях в качестве двигателя с малой тягой холловский ускоритель интенсивно исследуется как теоретически, так и в экспериментальных условиях [1—4].

Последовательное использование квазинейтрального приближения ( $n_i \approx n_e$ ) приводит к особенностям в стационарных уравнениях, описывающих поведение системы, при скорости потока ионов, равной скорости звука [1].

В настоящей работе исследуется динамика частиц плазменного пучка с использованием уравнения Пуассона для электрического поля. Вместо системы трех уравнений первого порядка получаем систему пяти уравнений, при этом отсутствует особенность в случае совпадения скорости потока ионов с ионно-звуковой скоростью.

### Уравнения динамики

Приведем основные уравнения, описывающие поведение тонкого, трубчатого, цилиндрического пучка в продольном электрическом  $E_z = -\frac{d\Phi}{dz}$  и в осесимметричном магнитном  $H_r$  полях при  $H_r \gg H_z$ .

Таковыми уравнениями являются:

- уравнение динамики электронов, двигающихся в диффузионном режиме:

$$V_{ez} = \frac{e\nu}{m\omega_c^2} \left( -\frac{d\Phi}{dz} + \frac{1}{en_e} \frac{d(T_e n_e)}{dz} \right), \quad (1)$$

где  $\nu = n_0 V_{Te} \sigma_{tr}$  — частота столкновений с нейтральными атомами;

$V_{Te}$  — тепловая скорость электронов;

$\sigma_{tr}$  — сечение рассеяния электронов на атомах;

$n_0$  — плотность нейтральных атомов.

---

**Чернышёв Тимофей Владимирович**, инженер.  
**Чихачёв Александр Сергеевич**, ведущий научный сотрудник.  
**Шрамов Алексей Николаевич**, инженер.  
 ФГУП "Всероссийский электротехнический институт им. В. И. Ленина".  
 Россия, 111250, Москва, Красноказарменная ул., 12.  
 Тел.: (495) 361-94-15. E-mail: churchev@mail.ru

Статья поступила в редакцию 22 июня 2009 г.

Считается, что циклотронная частота электронов  $\omega_c = \frac{eH}{mc} \gg \nu$ , где  $T_e, n_e, e, m$  — температура, плотность, заряд и масса электронов, соответственно;  $\Phi$  — потенциал электрического поля;

- уравнение непрерывности для ионов:

$$\frac{d}{dz}(n_i V_i) = n_e n_0 \beta, \quad (2)$$

где  $n_i, V_i$  — плотность и направленная скорость ионов, соответственно;

$\beta = \sigma_i V_{T_e}$  — частота рождения частиц при ионизации нейтрального газа;

$\sigma_i$  — сечение ионизации;

- уравнение импульсов холодных ионов:

$$n_i \left( M V_i \frac{dV_i}{dz} + e \frac{d\Phi}{dz} \right) = -M n_0 (V_i - V_A) \beta n_e, \quad (3)$$

где  $M$  — масса иона.

Уравнения (2) и (3) могут быть выведены из одномерного кинетического бесстолкновительного уравнения для ионов [3]:

$$V_i \frac{\partial f_i}{\partial z} - \frac{e}{M} \frac{d\Phi}{dz} \frac{\partial f_i}{\partial V_i} = n_0 n_e \beta \delta(V_i - V_A), \quad (4)$$

где  $f_i(V_i, z)$  — функция распределения ионов.

В выражении (4) правая часть описывает рождение ионов со скоростью, равной скорости потока нейтральных атомов.

Кроме того, используются два интегральных соотношения:

сохранения потока

$$q = (n_0 V_A + n_i V_i) M A \quad (5)$$

и постоянство разрядного тока

$$I_d = e(n_i V_i + n_e V_{ez}) A, \quad (6)$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения;

$q$  — расход газа;

$I_d$  — ток разряда.

### Параметры

Для условий реального эксперимента [2] можно положить:  $\frac{I_d}{A} \approx 6 \cdot 10^{18}$  1/(см<sup>2</sup>·с); расход массы в частицах  $q \approx 4 \cdot 10^{18}$  (1/см<sup>2</sup>·с); скорость потока атомов на входе  $V_A \approx 10^4$  см/с.

При температуре электронов  $T_e \approx 2,7$  эВ скорость ионного звука в плазме с однократно ионизированными атомами ксенона Хе с массой

$M = 132$  ат. ед. будет  $c_s = \sqrt{\frac{2T_e}{M}} \approx 2 \cdot 10^5$  см/с.

Так же, как в работе [5], будем использовать безразмерные переменные. Скорость выразим в единицах  $c_s$ , плотность — в единицах  $n_*$ , где  $n_* = \frac{I_d}{Ac_s} \approx 3 \cdot 10^{13}$  1/см<sup>3</sup>. Будем считать, что сечение рассеяния практически совпадает с сечением ионизации  $\sigma \approx \sigma_i \approx \sigma_{tr} \approx 10-16$  см<sup>2</sup>, при этом  $\beta = \sigma V_{T_e} \approx 10^{-8}$  см<sup>3</sup>/с.

### Безразмерные переменные

Определим приведенную частоту ионизации как  $\Omega_* = \beta n_* \approx 3 \cdot 10^5$  1/с, безразмерную длину — как  $\xi = z \frac{\Omega_*}{c_s}$ , безразмерный потенциал —

$U = \frac{2e\Phi}{Mc_s^2} = \frac{e\Phi}{T_e}$ , безразмерные плотности —

$\nu = \frac{n}{n_*}$ , безразмерные скорости —  $\theta = \frac{V}{c_s}$ . В этих

переменных уравнения (1)—(6) запишутся в виде:

$$\begin{cases} (\theta_i^2 + U)' = -2\nu_0 \frac{\nu_e}{\nu_i} (\theta_i - \theta_A); \\ \frac{\nu_e'}{\nu_e} - 2\theta_i^2 \frac{\nu_i'}{\nu_i} = \frac{2m}{M} \frac{\theta_e}{\nu_0} \left( \frac{\omega_c}{\Omega_*} \right)^2 - 4\nu_0 \frac{\nu_e}{\nu_i}; \\ (\nu_i \theta_i)' = \nu_e \nu_0; \\ \nu_e \theta_e + \nu_i \theta_i = 1; \\ \nu_0 \theta_A + \nu_i \theta_i = q. \end{cases} \quad (7)$$

Кроме системы (7), существует уравнение Пуассона для поля

$$U'' = \eta(\nu_e - \nu_i). \quad (8)$$

При значениях параметров, определенных выше, безразмерная величина  $\eta = \frac{8\pi e^2 n_*}{M \Omega_*^2} \approx 2 \cdot 10^7$ .

Большое значение  $\eta$  позволяет решать систему в предположении квазинейтральности, т. е.  $\nu_e \approx \nu_i \approx \nu$  (как в [1, 4, 5]). В этом случае уравнения для скорости  $\theta_i = \theta$  и ионного тока  $i = \nu \theta$  [5] имеют следующий вид:

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{1}{1 - 2\theta^2} \times \left\{ \frac{q - i}{\theta_A} (1 + 2\theta(\theta - \theta_A)) - \frac{2m}{M} \left( \frac{\omega_c}{\Omega_*} \right)^2 \theta_A \theta^2 \right\}, \quad (9)$$

$$\frac{di}{d\xi} = \frac{i(q - i)}{\theta \theta_A}.$$

В работе [5] магнитное поле задавалось соотношением

$$H = H_{\max} \left( \frac{\xi}{1,2} \exp \left( -\frac{\xi}{1,2} \right) \right)^2, \quad (10)$$

где  $H_{\max} = 100$  Э;  $\xi_{\max} = 3$ , т. е. ускоряющий промежуток  $z < z_{\max} = 2$  см.

Можно найти частное решение системы (9), которое непрерывным образом переходит через "звуковую точку" при  $V_i = c_s$ .

Начальные условия были взяты при  $\xi_0 = 0,12$ , причем  $i(\xi_0) = 10^{-4}$ ,  $\theta(\xi_0) = 0,05$ . Средняя плотность плазмы определяется как  $\frac{i}{\theta}$ , а плотность заряда —

как  $\frac{U''}{\eta} \cdot 0,5 \cdot 10^{-7}$ . Для относительной плотности

заряда можно получить результат, изображенный на рис. 1, кривая 2 (для наглядности относительная плотность заряда увеличена в 10 раз). Кривая 1 на этом же рисунке показывает поведение средней плотности плазмы, причем характерным является наличие максимума плотности при  $\xi \cong 0,5$ . Поскольку относительная плотность заряда не превышает 2 %, исходное приближение квазинейтральности следует считать выполненным. Тем не менее последовательный учет ненулевой плотности заряда представляет большой интерес — оказывается, что "звуковая точка" появляется в результате пренебрежения старшей производной при  $\eta \rightarrow \infty$ .

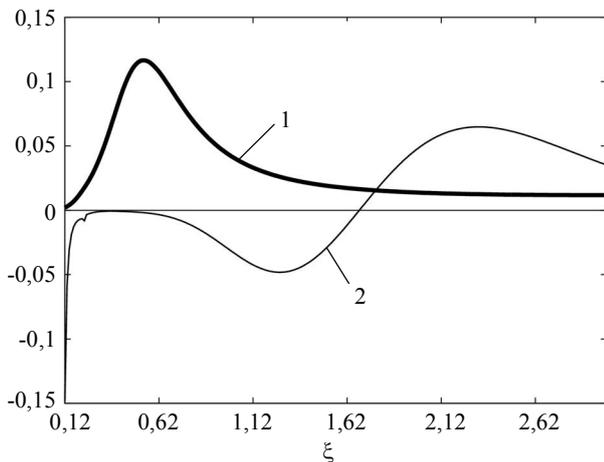


Рис. 1. Решение системы (9):

1 — средняя плотность плазмы; 2 — плотность заряда

$$\left( \frac{U''}{\eta} \cdot 10 \right)$$

Преобразуем систему уравнений (7), (8), используя из (8)

$$v_e = v_i + \frac{E'}{\eta}.$$

Обозначив  $v = v_i$  — нормированная плотность ионов,  $\theta = \theta_i$  — скорость ионов и  $i = v\theta$ , получим

$$\begin{cases} i' = v_e \frac{q-i}{\theta_A}; \\ \theta' = -\frac{q-i}{\theta_A} \frac{\theta}{i} v_e - \frac{E'}{2\theta}; \\ \frac{dv_e}{d\xi} = E v_e + K \sigma(\xi) \frac{1-i}{q-i}; \\ E' = \left( v_e - \frac{i}{\theta} \right) \eta; \\ U' = E, \end{cases} \quad (11)$$

где  $K = \frac{2m}{M} \left( 1 - \frac{\theta_A}{\sqrt{2}} \right) e^4 \theta_A$ ,  $\sigma(\xi) = \left( \frac{\xi}{1,2} \exp \left( -\frac{\xi}{1,2} \right) \right)^4$  при  $H_{\max} = 100$  Э и  $K = 800$ .

При формальном стремлении  $\eta \rightarrow \infty$   $v_e = \frac{i}{\theta}$ , тогда в уравнении для  $\theta$  появляется слагаемое  $\frac{1}{2\theta^2 - 1}$ , т. е. "звуковая точка".

### Решение системы (11)

Численное решение системы (11) при начальных условиях  $i(0,12) = 10^{-5}$ ,  $\theta(0,12) = 0,05$ ,  $v_e(0,12) = 0$ ,  $E(0,12) = 0$ ,  $U(0,12) = 0$  приведено на рис. 2—5.

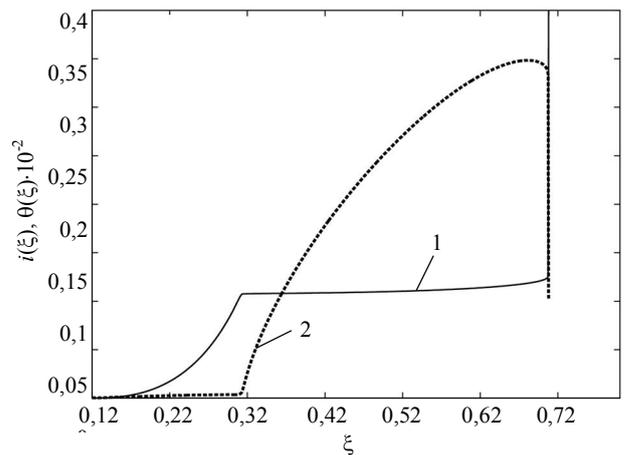


Рис. 2. Поведение переменных  $i$  и  $\theta$ :

1 — ток  $i(\xi)$ ; 2 — скорость  $\theta(\xi) \cdot 10^{-2}$

Из рис. 2 видно, что при некотором значении  $\xi < 3$  происходит скачок переменных  $i$  и  $\theta$ , ток достигает величины  $i_{\max} \cong 0,699$ . При  $\xi = \xi_{\max} = 0,70811$  имеется расходимость, которая возникает из-за наличия полюса при  $i = q$ , величины тока  $i \geq q$  не имеют физического смысла.

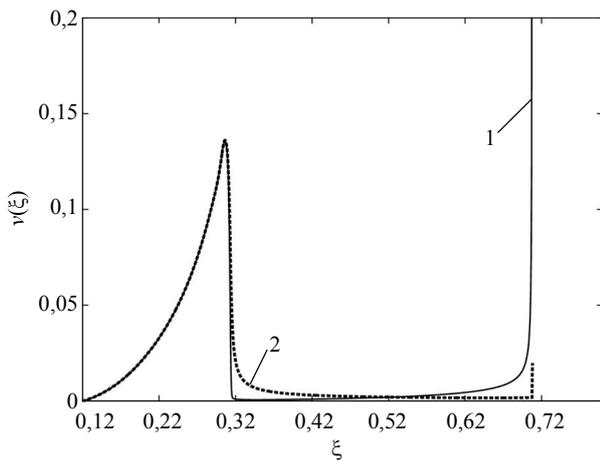


Рис. 3. Поведение плотностей электронов и ионов: 1 — плотность электронов  $n_e(\xi)$ ; 2 — плотность ионов

$$v_i(\xi) = \frac{i}{\theta}$$

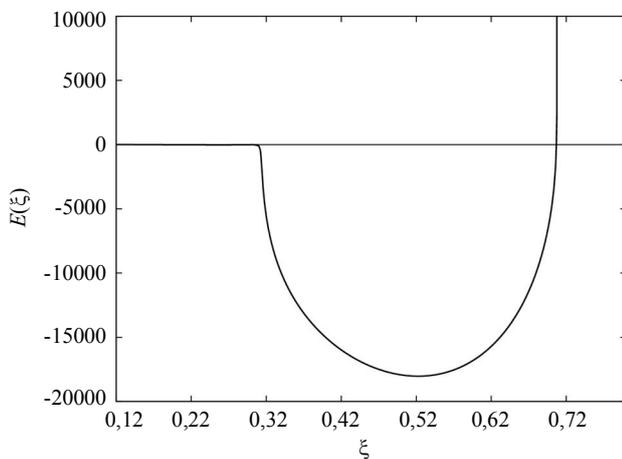


Рис. 4. Поле  $E(\xi)$

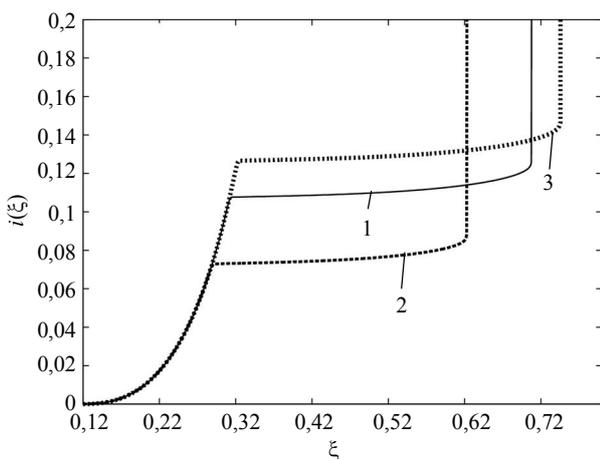


Рис. 5. Зависимость тока  $i(\xi)$  при различных начальных условиях: 1 —  $i_0 = 10^{-5}$ ; 2 —  $i_0 = 10^{-4}$ ; 3 —  $i_0 = 10^{-12}$

Отметим, что этот полюс не достигается при решении квазинейтральных уравнений (7). Кривая 1

(см. рис. 2) показывает наличие скачка тока (резкое увеличение) при  $\xi \rightarrow \xi_{\max}$ , кривая 2 (на которой скорость ионов уменьшена в 100 раз) — резкое уменьшение скорости ионов. Поведение плотностей электронов и ионов отражено на рис. 3. Характерно, что плотности заряженных частиц практически совпадают, т. е. в промежутке выполняется условие квазинейтральности. Однако при значениях  $\xi$ , близких к максимальным, происходит резкое увеличение плотности электронов, в результате чего происходит своего рода запираение пучка. Всплеск плотности ионов вблизи точки  $\xi \approx 0,3$  в точности такой же, как и всплеск плотности электронов. Поведение ускоряющего поля в ускоряющем тракте дано на рис. 4. Абсолютная величина поля возрастает после точки, в которой имеется всплеск плотности частиц. Можно заметить, что увеличение тока в основном происходит вблизи точки, где поле обращается в нуль.

На рис. 5 показано увеличение длины тракта ускорения при увеличении величины начального (затравочного) тока, причем при выбранном значении параметров всегда  $\xi_{\max} < 0,8$ .

Заметим, что задание большого по величине отрицательного поля  $E$  при  $\xi = 0$  приводит к увеличению длины тракта ускорения, при этом плотности частиц в тракте не совпадают, т. е. условие квазинейтральности не выполняется.

### Заключение

В работе изучено поведение пучка плазмы в тракте ускорения тростера. Показано, что система уравнений, включающая уравнение Пуассона, не приводит к особенности типа "звуковая точка".

Представляет интерес решение системы (11) при других значениях параметров — прежде всего при различных значениях  $H_{\max}$  (10). Важным представляется также решение более сложной системы, учитывающей зависимость температуры  $T_e$  от координаты; возможен ряд других усложнений, учитывающих реальные экспериментальные условия [4]. В этих случаях включение в систему уравнений уравнения Пуассона также приводит к отсутствию "звуковой точки".

### Литература

1. Ashkenazy J., Fruchtman A., Raitses Y., Fisch N. J. Modelling the behaviour of a Hall current plasma accelerator// Plasma Phys. Control. Fusion. 1999. No. 41. P. A357—A364.
2. Ермилов А. Н., Коваленко А. Ю., Кулешов В. С., Новичков Д. Н., Сапронова Т. М. Экспериментальные исследования различных макетов холловских двигателей для определения оптимального рабочего режима// ТВТ. 2008. Т. 46. № 4. С. 588—595.
3. Fruchtman A., Fisch N. J. Modelling the Hall Thruster// 34th AIAA/ASME/SAE/ASCE "Joint Propulsion Conference & Exhibit July 13—15. 1998". Cleveland. OH. AIAA 98-3500.

4. *Ahedo E., Gallardo J. M., Martints-Sanches M.* Model of the plasma discharge in a Hall thruster with heat conduction// *Physics of Plasmas*. 2002. V. 9. No. 9. P. 4061—4070.

5. *Сапронова Т. М., Чихачёв А. С.* Звуковой барьер плазменного потока в холловском ускорителе. Научная сессия МИФИ-2009// *Аннотации докладов*. — М., 2009. Т. 1. С. 197.

## Modelling of dynamic of particles in thruster

*T. V. Chernishov, A. S. Chikhachev, A. N. Shramov*

All-Russia Electrotechnical Institute, 12 Krasnokazarmennaya str., Moscow, 111250, Russia

E-mail: churchev@mail.ru

*We study the numerical solution of the equations describing the process of acceleration of ions in a Hall plasma accelerator (thruster). The system is a three component plasma: neutral atoms, free electrons and one-ionized atoms. In the acceleration tract ions move without collisions, i.e. length of free path of ions longer than the length of the acceleration tract, while electrons move in the diffusion mode across magnetic field. It has been shown that by using the Poisson equation for the electric field, the system of equations of dynamics does not have singular/sonic point, that arises in solving quasi-neutral approximation, in coincidence with a ion flow velocity and ion-sound velocity.*

PACS: 52.77.Di

*Keywords:* thruster, Hall plasma accelerator, Hall thruster, Poisson equation.

Bibliography — 5 references.

*Received 22 June 2009*

\* \* \*