

УДК 537.86(075.8)

О фокусировке волнового пучка с помощью параболического рефлектора

Н. Д. Наумов

Метод параболического уравнения используется для оценки параметров сфокусированного волнового пучка, который получается при небольшом сдвиге источника излучения от фокуса параболического рефлектора или при смещении малого зеркала в антенне Кассегрена.

PACS: 42.25.Bs

Ключевые слова: волновой пучок, фокусировка, параболический рефлектор, расчет.

Введение

Разработаны способы создания источников интенсивного электромагнитного излучения, например, основанные на эффектах взаимодействия электронных пучков с плазмой [1]. Для формирования направленного потока электромагнитных волн можно использовать апертурные антенны [2]. Как известно, если источник излучения находится в фокусе параболического рефлектора, то длина пути, проходимого лучом до выхода из апертуры, не зависит от угла его падения на зеркало. Поэтому пучок на выходе из параболического рефлектора имеет плоский волновой фронт. Такая же форма волнового фронта будет и в двухзеркальной антенне Кассегрена, если источник излучения находится в одном фокусе малого зеркала, а второй фокус этого зеркала совпадает с фокусом большого зеркала.

Поперечный размер пучка, имеющего на выходе из рефлектора плоский волновой фронт, монотонно увеличивается при распространении под влиянием дифракции. Чтобы сформировать сходящийся волновой пучок, нужно создать на выходе из рефлектора искривленный волновой фронт. Этого можно достичь, отодвигая источник излучения от фокуса параболического рефлектора. Действительно, в этом случае длина пути, проходимая лучом до выхода из рефлектора, будет зависеть от расстояния между осью пучка и точкой выхода луча. Аналогичная зависимость возникает и при смещении фокуса малого зеркала от фокуса большого зеркала в антенне Кассегрена. Целью данной работы является построение модели такого сфокусированного волнового пучка.

Наумов Николай Дмитриевич, старший научный сотрудник.

ФГУ "12 ЦНИИ МО РФ".

Россия, 141300, Московская обл., г. Сергиев-Посад 7.

Тел. (495) 993-09-62.

Статья поступила в редакцию 4 октября 2010 г.

Решение параболического уравнения

Если для рефлектора с радиусом апертуры a выполняется условие: $\lambda \ll a$, где λ — длина волны, то формируемый волновой пучок имеет узкий угловой спектр. Для описания волновых пучков с узким угловым спектром используется параболическое уравнение с мнимым коэффициентом диффузии [3], которое в случае аксиально-симметричного пучка имеет следующий вид:

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} = 0. \quad (1)$$

Здесь A — комплексная амплитуда волны, k — волновой вектор.

Влияние дифракции на распространение волнового пучка характеризуется параметром $L = \pi a^2 / \lambda$. Переходя к переменным $\rho = r/a$, $\zeta = z/L$ и используя известное выражение для функции Грина рассматриваемой краевой задачи [3], решение уравнения (1) можно записать в следующем виде:

$$A(\rho, \zeta) = \frac{2}{i\zeta} \int_0^\infty C(\rho') \exp\left[\frac{i}{\zeta}(\rho^2 + \rho'^2)\right] J_0\left(\frac{2}{\zeta}\rho\rho'\right) \rho' d\rho', \quad (2)$$

где $C(\rho) = A(\rho, 0)$ — начальное распределение амплитуды волны, $J_0(x)$ — функция Бесселя.

Найдем распределение амплитуды волны на выходе из параболического рефлектора в том случае, когда источник излучения находится на его оси в точке S , причем расстояние OS больше фокусного расстояния рефлектора (рис. 1). Из уравнения касательной к параболе в точке отражения луча:

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

следует, что вектор нормали \mathbf{n} к касательной может быть выражен через следующие координаты: $\mathbf{n}(p, -y_0)$. Здесь p — фокальный параметр, x_0, y_0 — координаты точки N .

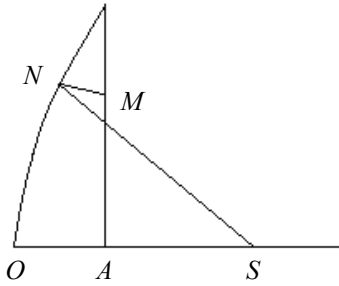


Рис. 1. Расчетная схема

Условие равенства углов падения и отражения позволяет получить следующее соотношение:

$$|\mathbf{NM}| \cdot (\mathbf{n}, \mathbf{NS}) = |\mathbf{NS}| \cdot (\mathbf{n}, \mathbf{NM}). \quad (3)$$

Выражение (3) можно рассматривать как уравнение для координаты y_0 . Это уравнение содержит в качестве параметров x_1, y_1 — координаты точки M . После решения этого трансцендентного уравнения для заданных значений x_1, y_1 нетрудно найти расстояние, проходимое лучом до выхода из рефлектора:

$$s = |\mathbf{NS}| + |\mathbf{NM}|.$$

Если бы точка S совпадала с фокусом рефлектора, то это расстояние зависело бы только от продольной координаты точки M : $s = x_1 + p/2$. В случае источника излучения, отодвинутого от фокуса рефлектора, s зависит и от поперечной координаты точки M : $s = f(x_1, y_1)$. Как показывают расчеты, при небольшой величине сдвига эту функцию можно представить в следующем виде:

$$f(x_1, y_1) \approx x_1 + \frac{1}{2}p - \frac{y_1^2}{2R}, \quad (4)$$

где R — некоторая постоянная.

Используя уравнения касательных к параболе и гиперболе [4], можно получить аналогичный результат для пробега луча при небольшом смещении фокуса малого зеркала от фокуса большого зеркала в антенне Кассегрена.

Так как для рассматриваемой задачи влияние угла падения на изменение фазы волны при ее отражении оказывается незначительным, то полученное выше выражение (4) и определяет зависимость фазы комплексной амплитуды волны от радиальной координаты при $z = 0$:

$$A(r, 0) = A_0 [1 - (1 - h)\rho^2] H(1 - \rho) \exp(-i\rho^2 \frac{L}{R}), \quad (5)$$

т.е. R является начальным радиусом кривизны волнового фронта. Здесь $H(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда; предполагается, что распределение действительной амплитуды поля на выходе из рефлектора задано в виде "параболы на пье-

дестале" [2]. Подставляя выражение (5) в (2), для комплексной амплитуды волны найдем:

$$A(\rho, \zeta) = \frac{2A_0}{i\zeta} \exp(\frac{i}{\zeta} \rho^2) \int_0^1 [1 - (1 - h)x^2] \exp[i(\frac{1}{\zeta} - \frac{L}{R})x^2] \times \times J_0(\frac{2}{\zeta} \rho x) x dx. \quad (6)$$

Влияние сдвига на фокусировку пучка

Для заданных размеров рефлектора начальная кривизна волнового фронта R однозначно определяется величиной сдвига источника или малого зеркала от фокуса рефлектора. Поэтому для анализа влияния сдвига на фокусировку пучка рассмотрим пространственное распределение амплитуды волны для различных значений начальной кривизны фронта R .

Фигурирующий в (6) интеграл несложно вычислить при $\rho = 0$, что позволяет получить следующее выражение для комплексной амплитуды волны на оси пучка:

$$A(0, \zeta) = \frac{A_0}{\xi^2} \{ \xi(1 - h) + [h\xi - i\zeta(1 - h)][1 - \exp(i\frac{\xi}{\zeta})] \}. \quad (7)$$

Выделим в (7) действительную амплитуду и фазу:

$$A(0, \zeta) = B(z) e^{i\Psi(z)},$$

$$B(z) = \frac{A_0}{\xi^2} [(1 + h)^2 \xi^2 \sin^2 \beta + (1 - h)^2 (2\zeta \sin \beta - \xi \cos \beta)^2]^{1/2}; \quad (8)$$

$$\Psi(z) = \arctg \frac{\xi h \sin 2\beta + 2\zeta(1 - h) \sin^2 \beta}{\zeta(1 - h) \sin 2\beta - \xi(1 - h \cos 2\beta)}. \quad (9)$$

Здесь введены следующие обозначения: $\xi = 1 - z/R, \beta = \xi/2\zeta$.

На рис. 2 и 3 представлено изменение действительной амплитуды и фазы волны на оси пучка при его распространении для следующих значений начальной кривизны фронта: $R = 0,125L$ (кривая 1), $R = 0,2L$ (кривая 2), $R = 0,4L$ (кривая 3); во всех случаях $h = 0,5$.

Эти результаты получены с помощью выражений (8), (9). Отметим, что в точке геометрического фокуса $z = R$ фаза комплексной амплитуды волны скачком меняется с $-\pi/2$ на $\pi/2$. Кроме этого, при $R \ll L$ для оценки амплитуды волны в области "перетяжки" пучка можно использовать значение выражения (8) в точке геометрического фокуса: $B(R) = (1 + h)L/2R$.

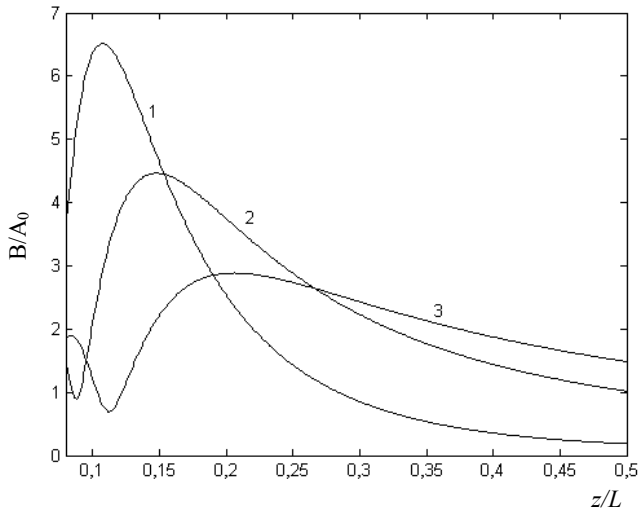


Рис. 2. Изменение с расстоянием действительной амплитуды волны на оси пучка:

1 — $R = 0,125L$; 2 — $R = 0,2L$; 3 — $R = 0,4L$

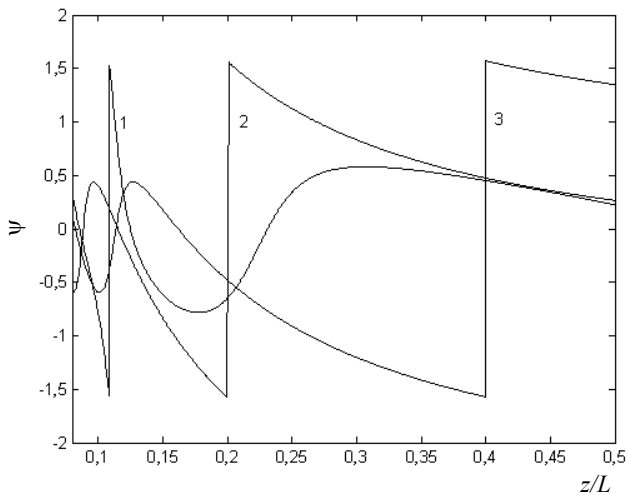


Рис. 3. Изменение с расстоянием фазы комплексной амплитуды волны на оси пучка:

1 — $R = 0,125L$; 2 — $R = 0,2L$; 3 — $R = 0,4L$

На рис. 4 представлены поперечные распределения действительной амплитуды волны в области "перетяжки" пучка, которые получены на основе численного вычисления интеграла (6).

Анализ результатов

Полученные результаты позволяют оценить пространственные размеры области "перетяжки" пучка и степень его фокусировки, которая, как видно из рис. 2 и 4, уменьшается с увеличением отношения начальной кривизны фронта к дифракционному параметру. Поэтому заметное возрастание амплитуды волны можно получить при $R \ll L$. В связи с этим нужно отметить следующее обстоятельство. Из выражения (5) следует, что при $h = 1$, $R \rightarrow \infty$ пучок на выходе из рефлектора имеет

однородное распределение амплитуды и плоский волновой фронт. В этом случае из (7) найдем:

$$A(0, \zeta) = A_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{i}{\zeta}\right) \right]. \quad (10)$$

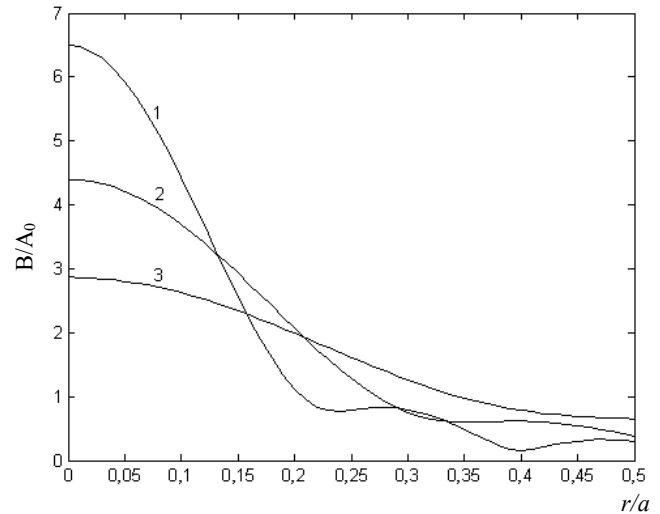


Рис. 4. Поперечное распределение действительной амплитуды волны:

1 — $R = 0,125L$, $\zeta = 0,11$; 2 — $R = 0,2L$, $\zeta = 0,16$;
3 — $R = 0,4L$, $\zeta = 0,22$

Точное решение задачи об амплитуде звукового поля на оси круглого поршневого излучателя имеет следующий вид [5]:

$$A(0, z) = A_0 (1 - \exp[ik(\sqrt{z^2 + a^2} - z)]). \quad (11)$$

Как нетрудно видеть, приближенный результат (10) получается из выражения (11) при $z \gg a$. Таким образом, кроме исходного условия на угловой спектр волнового пучка, еще одним условием применимости метода параболического уравнения является малость отношения начального размера пучка к расстоянию до точки наблюдения. Поэтому предлагаемую модель сфокусированного волнового пучка можно использовать при $R \gg a$; этим и определяется нижняя граница приемлемых для этой модели значений R/L .

Заключение

В данной работе метод параболического уравнения использован для оценки параметров сфокусированного волнового пучка, который получается при небольшом сдвиге источника излучения от фокуса параболического рефлектора или при смещении малого зеркала в антенне Кассегрена. Показано, что, кроме исходного условия в виде узости углового спектра волнового пучка, еще одним условием применимости метода параболического уравнения является малость отношения начально-

го размера пучка к расстоянию до точки наблюдения.

Л и т е р а т у р а

1. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. — М.: Наука, 1990.

2. Кочержевский Г. Н. Антенно-фидерные устройства. — М.: Радио и связь, 1981.

3. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М.: Наука, 1990.

4. Ильин В. А., Ким Г. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. — М.: Изд-во МГУ, 2007.

5. Лепендин Л. Ф. Акустика. — М.: Высшая школа, 1978.

Focusing of the wave beam by a parabolic reflector

N. D. Naumov

12-th Central Research Institute,
Sergiev-Posad 7, Moscow region, 141300, Russia

The parabolic equation technique is used for calculation of the wave beam parameters when a source of radiation is replaced from the focus of a parabolic reflector.

PACS: 42.25.Bs

Keywords: wave beam, focusing, parabolic reflector, calculation.

Bibliography — 5 references.

Received October 4, 2010