

УДК 532.527

## Численное исследование динамики вихревых образований на поверхности мыльного пузыря

Р. Н. Кузьмин, Н. П. Савенкова, С. А. Складчиков

*Представлены одномерная и двухмерная математические модели мыльного пузыря, в основе которых находится предположение о растечении жидкости по выпуклой поверхности. Математическое моделирование проводится на основе трехмерных уравнений гидродинамики отдельно для верхней и для нижней частей сферы, "склеенных" по экватору. Проводится анализ численных результатов и сравнение их с экспериментальными данными, полученными французскими учеными.*

PACS: 47.10.ad, 47.55.Ca, 47.55.dd, 47.55.D-, 47.55.db, 47.80.Fg

*Ключевые слова:* математическое моделирование, мыльный пузырь, уравнения Навье—Стокса.

### Введение

Мыльный пузырь — тонкая многослойная пленка мыльной воды, наполненная воздухом, обычно в виде сферы с переливчатой поверхностью. Мыльные пузыри обычно существуют лишь несколько секунд и лопаются при прикосновении или самопроизвольно. Пузырь существует потому, что поверхность любой жидкости (в данном случае воды) имеет некоторое поверхностное натяжение, которое делает поведение поверхности похожим на поведение чего-нибудь эластичного. Однако пузырь, сделанный только из воды, нестабилен и быстро лопается. Для того чтобы стабилизировать его состояние, в воде растворяют какие-нибудь поверхностно-активные вещества, например, мыло.

Исследователи из Центра радиоволн и молекулярной оптики в Бордо [1] обнаружили, что вихри, определенным образом созданные в мыльных пузырях, ведут себя аналогично более масштабным атмосферным явлениям, таким как циклоны и ураганы, что дает возможность промоделировать факторы, управляющие траекторией их поведения.

Для дальнейшего изучения подобных явлений в данной работе представлены одномерная и двухмерная математические модели мыльного пузыря, в основе которых находится предположение о растечении жидкости по выпуклой поверхности.

### Физический аналог

С физической точки зрения, ураганы (циклоны) представляют собой в планетарном масштабе пример интереснейшего явления, называемого турбулентностью, т. е. хаотического движения потока жидкости, газа или плазмы с переменными во времени плотностью, скоростью, давлением и температурой.

Поскольку турбулентность представляет собой явление со случайным образом изменяющимися параметрами, то построение математической модели должно основываться на усреднении этих характеристик во временном интервале. Если геометрия системы, в которой изучается турбулентность, имеет некую симметрию, то возможно перейти от изучения трехмерной модели этого явления к двухмерной. Это позволяет упростить математику задачи. Ураганы — именно тот случай, когда можно этим упрощением воспользоваться.

На рис. 1 представлены примеры проявления двухмерной турбулентности в планетарном масштабе. На рис. 1, *а* воспроизведен снимок урагана "Катрин", одного из наиболее разрушительных ураганов в истории США, сделанный со спутника 29 августа 2005 г. На рис. 1, *б* показан снимок "Большого красного пятна", атмосферного образования на Юпитере, наблюдаемого уже почти 350 лет, сделанный американским космическим аппаратом "Вояджер-1" в 1979 г.

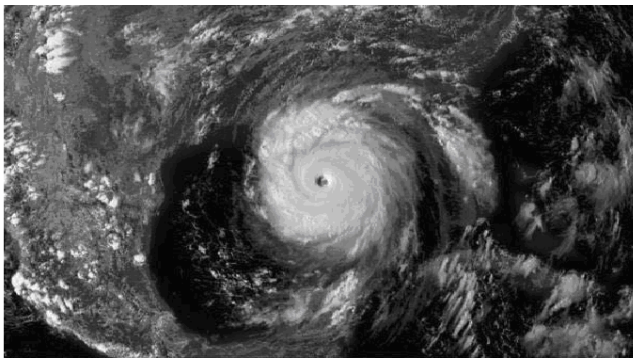
---

Кузьмин Рунар Николаевич, профессор.  
Савенкова Надежда Петровна, ведущий научный сотрудник.  
Складчиков Сергей Андреевич, аспирант.  
Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1.  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.  
Тел. 8 (916) 237-09-47. E-mail: sklادتchikov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 25 сентября 2011 г.

---

© Кузьмин Р. Н., Савенкова Н. П., Складчиков С. А., 2012



а



б

Рис. 1. Примеры проявления двумерной турбулентности в планетарном масштабе:

а — снимок урагана "Катрина"; б — снимок "Большого красного пятна" — атмосферного образования на Юпитере

### Математическая модель

В работе рассматривается математическая модель с точки зрения растечения жидкости по поверхности, т. е. в предположении, что жидкость огибает оболочку как препятствие. Математическое моделирование проводится отдельно для верхней и для нижней частей сферы, "склеенных" посередине. В основе математической постановки находится осредненная по высоте трехмерная система уравнений Навье—Стокса. Этот способ математического моделирования хорошо зарекомендовал себя, например, для моделирования процесса электролиза алюминия [2, 3], а также для задачи о растекании жидкостей по орографически неоднородной поверхности [4].

В предположении нашей модели, в начальный момент времени пузырь состоит из вещества, замкнутого между двумя сферами. В процессе расчетов радиус внутренней сферы не меняется. Вещество стекает по ее поверхности. Поскольку процессы на верхней части нашего пузыря и на нижней его части моделируются отдельно, для верхней части пузыря ось  $Z$  направлена вверх, а для нижней его части  $Z'$  — вниз.

Выпишем осредненную по высоте математическую модель, полученную из трехмерных уравнений гидродинамики, отдельно для каждой из полусфер (в виде учета знака "+" для нижней

полусферы и знака "-" для верхней полусферы для членов уравнения, где встречается объединенный знак  $\pm$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{\delta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{\delta}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v} \bar{\delta}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{\delta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}^2 \bar{\delta}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v} \bar{\delta}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} (\bar{\delta} - \delta(t_0)) \times \right. \\ &\times (\pm \bar{\rho} g) - p(t_0) \Big) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{\delta} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \bar{\delta} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}) \mp \\ &\mp g \bar{\rho} \bar{\delta} \left( \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right) + \bar{F}_{\text{пов.нат}}; \\ \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v} \bar{\delta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v} \bar{\delta}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}^2 \bar{\delta}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} (\bar{\delta} - \delta(t_0)) \times \right. \\ &\times (\pm \bar{\rho} g) - p(t_0) \Big) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{\delta} \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \bar{\delta} \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}) \mp \\ &\mp g \bar{\rho} \bar{\delta} \left( \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right) + \bar{F}_{\text{пов.нат}}; \\ \frac{\partial \bar{\rho} \bar{w} \bar{\delta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{w} \bar{\delta}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v} \bar{w} \bar{\delta}}{\partial y} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{\delta} \mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \bar{\delta} \mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}) + \bar{F}_{\text{пов.нат}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  — осредненные скорости на сфере по длине, ширине и высоте, соответственно;

$\rho$  — плотность среды;

$g$  — ускорение свободного падения;

$\bar{\delta}$  — толщина оболочки;

$R$  — радиус сферы;

$\bar{P}$  — плотность давления;

$\mu$  — турбулентная вязкость.

В каждой точке  $(x, y)$  плоскости  $XY$  определяется скорость по  $X$  как  $U(x, y)$ , скорость по  $Y$  как  $V(x, y)$  и толщина слоя вещества  $\bar{\delta}(x, y)$ , которые относятся к некоторому среднему слою. Сила поверхностного натяжения  $\bar{F}_{\text{пов.нат}} = \frac{\gamma \bar{\delta} \rho}{2(R + \bar{\delta})}$  опре-

делена в соответствии с [5].

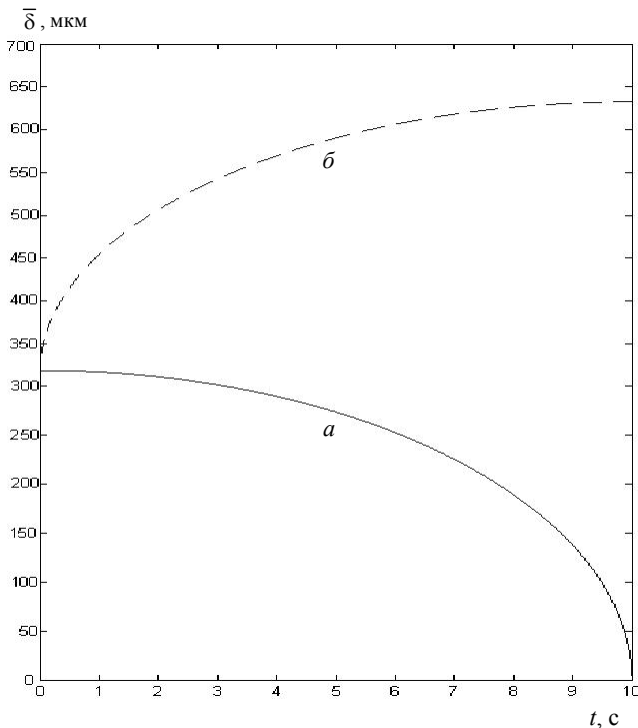
Учитывая сферическую симметрию по каждой полусфере, можно переписать систему (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{\delta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{\delta}}{\partial r} &= 0; \\ \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{\delta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}^2 \bar{\delta}}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} (\bar{\delta} - \delta(t_0)) (\pm \bar{\rho} g) - p(t_0) \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} (\bar{\rho} \bar{\delta} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}) \mp g \bar{\rho} \bar{\delta} \left( \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right) \pm \frac{\gamma \bar{\delta} \rho}{2(R + \bar{\delta})}. \end{aligned} \quad (2)$$

Начальные условия:  
 $u_0 = 0, v_0 = 0, w_0 = 0;$   
 $\rho = \text{const}; \delta$  — задано;  
 $P = P_{\text{атмосферы}};$   
 $\gamma = 35 \text{ мг/см.}$

Условие свободной границы  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0.$

На рис. 2 представлены результаты численного решения системы уравнений для нахождения временной зависимости толщины пузыря. Из графиков видно, что время истончения пузыря, точнее, его верхней полусферы до момента уничтожения ( $\bar{\delta} = 1 \text{ мкм}$ ) составляет 10 с.

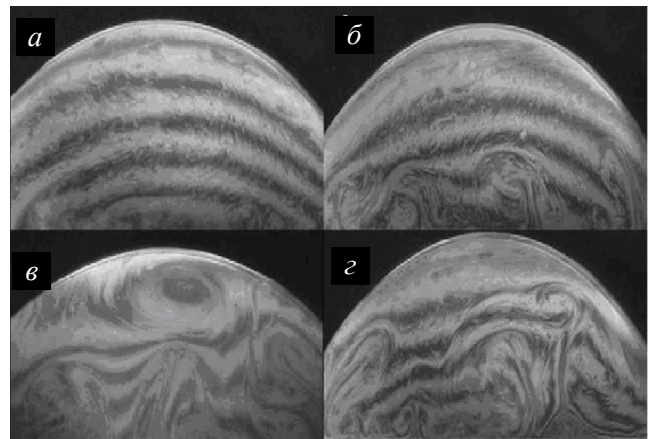


**Рис. 2. График изменения толщины оболочки мыльного пузыря в зависимости от времени:**  
 а — кривая для верхней части пузыря (сплошная линия);  
 б — кривая для нижней части (пунктирная линия)

**Анализ результатов**

Было решено провести моделирование эксперимента французских ученых [1]. Они предложили оригинальный эксперимент с мыльными пузырями, практически равноценно воспроизводящий атмосферные явления. Вообще говоря, мыльные пузыри — идеальная модель для изучения турбулентности в газовых оболочках планет, так как по своим физическим параметрам отношение толщины мыльной пленки к диаметру пузыря эквивалентно отношению толщины атмосферы к диаметру планеты.

Постановка эксперимента французских ученых очень простая (рис. 3). Половина мыльного пузыря, находящегося при комнатной температуре 17 °С, с радиусом в разных вариациях эксперимента от 8 до 10 см, нагревалась с помощью специального колечка, охватывающего экватор пузыря. Тепло конвективным образом распространялось от экватора к полюсам, создавая градиент (разность) температур  $\Delta T$ . Облучая изучаемый объект белым светом, исследователи наблюдали интерференционную картину, из которой видно, что при наибольшей разности температур между экватором и полюсом происходило зарождение вихря, подобного атмосферному циклону. Интерференционная картина в эксперименте — это своеобразная визуализация конвективного распространения тепла по поверхности пузыря. Она возникает вследствие того, что белый свет из-за неоднородности в толщине пленки, обусловленной в свою очередь неодинаковым нагревом, "по-разному" преломляется и отражается в мыльном пузыре.



**Рис. 3. Изображения пузырей при различных температурных градиентах [1].**

Разность температур  $\Delta T$  увеличивается от фотографии а к фотографии г и равна 9, 17 и 31 °С, соответственно. На фото в отображено возникновение вихря при  $\Delta T = 45$  °С

Для проведения численного эксперимента выпишем трехмерную систему уравнений Навье—Стокса, осредненную по высоте с учетом уравнения для температуры. Соответствующая математическая модель имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{\delta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{\delta}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v} \bar{\delta}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{\delta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}^2 \bar{\delta}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v} \bar{\delta}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} (\bar{\delta} - \delta(t_0)) \times \right. \\ &\times (\pm \rho g) - p(t_0) \left. \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \delta \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \delta \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}) \mp \\ &\mp g \rho \bar{\delta} \left( \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right) \pm \frac{\gamma \delta \rho}{2(R + \delta)}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p} \bar{v} \bar{\delta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p} \bar{u} \bar{v} \bar{\delta}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p} \bar{v}^2 \bar{\delta}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} (\bar{\delta} - \delta(t_0)) \times \right. \\ &\times (\pm \bar{r} g) - p(t_0) \Big) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{\delta} \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{\delta} \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}) \mp \\ &\mp g \bar{\rho} \bar{\delta} \left( \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right) \pm \frac{\gamma \bar{\delta} \rho}{2(R + \delta)}; \\ \frac{\partial \bar{r} h \bar{\delta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{r} \bar{u} h \bar{\delta}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{r} \bar{v} h \bar{\delta}}{\partial y} &= \\ = Q_h + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{\delta} \vartheta \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{\delta} \vartheta \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}). \end{aligned} \quad (3)$$

Начальные условия:

$$u_0 = 0, v_0 = 0, w_0 = 0;$$

$$\rho = \text{const}; \delta \text{ — задано};$$

$$P = P_{\text{атмосферы}};$$

$$\gamma = 35 \text{ мг/см}; c_p = 4,2 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{°C)}.$$

Условие свободной границы  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ .

Задача (3) решается конечно-разностным методом. Дифференциальные операторы системы (3) заменяются разностными. В качестве разностной схемы использовалась схема Мак-Кормака [6], аппроксимирующая систему (3) со вторым порядком точности по времени и по пространству. Результаты численных расчетов представлены на рис. 4, 5 как ортографическая проекция на плоскость *OXY*, на которых стрелочками обозначены направления результирующей скорости в каждой расчетной ячейке введенной разностной сетки.

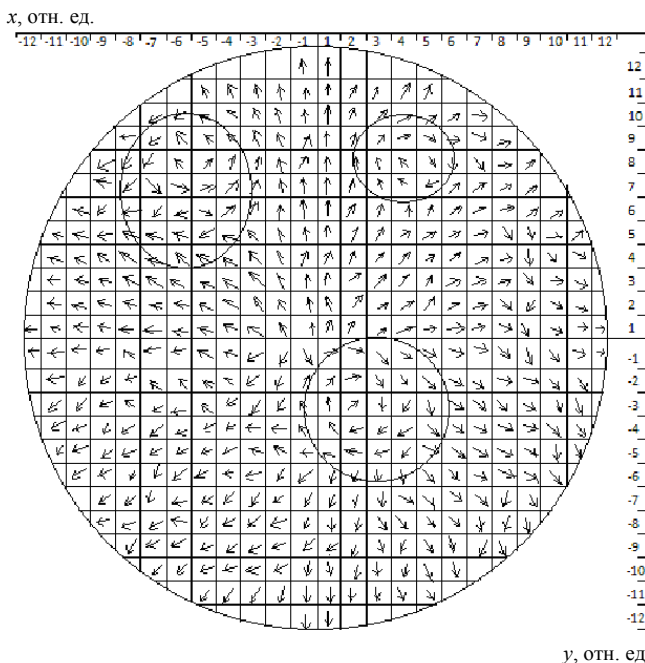


Рис. 4. Поле скоростей для верхней части сферы:  $\Delta T = 45 \text{ °C}$ , момент времени  $t = 5 \text{ с}$

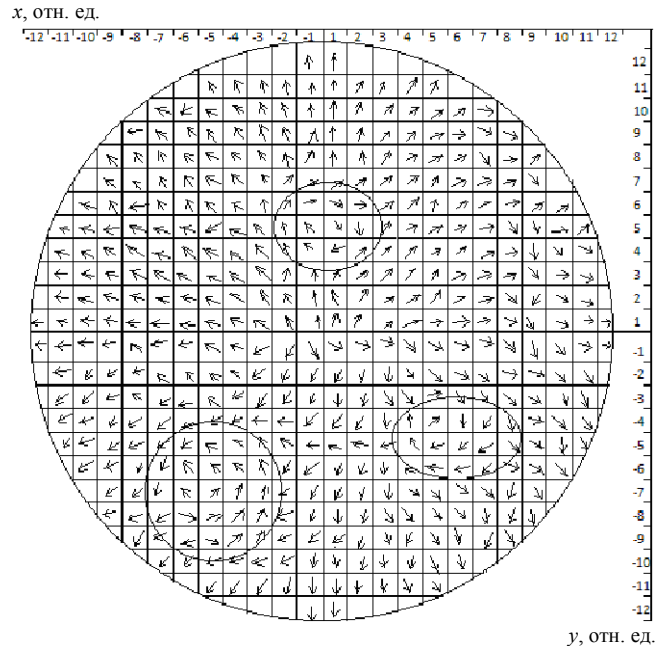


Рис. 5. Поле скоростей для верхней части сферы:  $\Delta T = 45 \text{ °C}$ , момент времени  $t = 8 \text{ с}$

На рис. 4 видны отчетливо устойчивые вихри, обведенные сплошными контурами, которые соответствуют результатам физических экспериментов [1]. На рис. 5 видно, что вихри меняют свое местоположение с течением времени. Отметим, что были проведены также численные расчеты для меньшей разницы температур на экваторе и полюсе, которые подтверждают результаты работы [1] о рассасывании вихрей при меньшей разнице температуры на полюсе и экваторе.

### Заключение

Из проведенных расчетов можно сделать вывод, что при нагревании мыльного пузыря по экватору на его поверхности действительно начинают образовываться вихри, перемещающиеся по поверхности. Место их положения может зависеть от различных температур нагревания, а также от физических условий среды и геометрических параметров поверхности. Таким образом, численный эксперимент подтверждает лабораторные исследования [1] и открывает новые возможности для моделирования сложных атмосферных процессов типа ураганов и циклонов.

### Литература

1. Seychelles F., Amarouchene Y., Bessafi M., Kellay H. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. P. 144501.
2. Алаторцев А. В., Кузьмин П. Н., Проворова О. Г., Савенкова Н. П. // Прикладная физика. 2004. № 5. С. 33.
3. Савенкова Н. П., Кузьмин П. Н., Проворова О. Г., Шобухов А. В., Анпилов С. В., Складчиков С. А. // Динамика сложных систем. 2009. Т. 3. № 2. С. 53.

4. Кузьмин Р. Н., Кулешов А. А., Савенкова Н. П., Филиппова С. В. Численное моделирование растечения фреона по неровной подстилающей поверхности: Сб. трудов II междунар. конф. "Математика. Компьютер. Образование". 2010. С. 154.

5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. — М., 1954.

6. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. — М.: Мир, 1990. Т. 1.

## Numerical research of dynamics of vortical formations on a surface of a soap bubble

*R. N. Kuzmin, N. P. Savenkova, S. A. Skladchikov*

M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskiye Gori, Moscow, 119991, Russia

E-mail: mkandrew@mail.ru

*In this work, there is one dimensional and two dimensional mathematical models of a soap bubble, which bases on a assumption of flowing liquids on convex surface. Basic idea of this model is three dimensional equations of hydrodynamics separately for top and for bottom parts of sphere "stuck together" on equator. There is an analysis of numerical results and their comparison with experimental data of French researchers.*

PACS: 47.10.ad, 47.55.Ca, 47.55.dd, 47.55.D-, 47.55.db, 47.80.Fg

*Keywords:* mathematical modeling, soap bubble, Navie—Stokes equations.

Bibliography — 6 references.

*Received September 25, 2011*