

# Физика плазмы и плазменные технологии

УДК 537.52

## Перенос тепловой энергии электронов в потоке через границу плазма—электрод в слабоионизованной плазме

Ф. Г. Бакшт, В. Ф. Лапшин

*Найдены значения средней тепловой энергии электронов в потоках эмиссии с электрода в плазму  $\bar{E}_1$  и из плазмы на электрод  $\bar{E}_2$  для случаев большой и малой величины коэффициента кинетического отражения. Показано, что эти значения меняются в пределах  $0,5 k_B T_c < \bar{E}_1 < 2k_B T_c$  и  $0,5 k_B T_e < \bar{E}_2 < 2k_B T_e$ , соответственно ( $T_c$  и  $T_e$  — температуры катода и электронов плазмы). Полученные значения могут использоваться при постановке граничных условий для гидродинамических уравнений на электроде или диэлектрической стенке.*

PACS: 52.80.Mg

*Ключевые слова:* низкотемпературная плазма, газовый разряд, приэлектродный слой, граничные условия.

### Введение

При решении гидродинамических дифференциальных уравнений переноса в плазме возникает необходимость в постановке соответствующих граничных условий на контакте плазмы с электродом. В работе рассматривается контакт плазмы с отрицательно заряженным электродом, в частности, с катодом или с диэлектрической стенкой. При записи граничных условий для уравнения энергии электронов необходимо использовать значения средней тепловой энергии электронов в потоке через приэлектродный слой на электрод или на отрицательно заряженную диэлектрическую стенку. Отметим, что исследованию структуры приэлектродного слоя (ПС) и физики протекающих в нем процессов посвящено большое число работ (см. например [1]).

В работе рассматривается случай, когда степень ионизации плазмы мала и симметризация функции распределения электронов (ФРЭ), в том числе и быстрых электронов, по направлениям происходит быстрее, чем их релаксация по энергии  $E$ . Рассматриваются условия, при которых

энергетическая релаксация ФРЭ происходит вследствие электрон-электронных столкновений. Кроме того, толщина ленгмюровского слоя объемного заряда считается малой по сравнению с длиной свободного пробега электронов на атомах.

В рассматриваемых условиях на границе плазма—электрод имеется значительный потенциальный барьер  $\Phi_0$ , задерживающий электроны, идущие из плазмы. На рис. 1 приведено распределение потенциальной энергии электрона  $\Phi(z) = -e\varphi(z)$ , где  $\varphi$  — электростатический потенциал в приэлектродном слое перед неэмитирующей стенкой. Пунктиром показана граница области I в  $(z, \Phi)$ -пространстве, где происходит обеднение функции распределения быстрых электронов вследствие их ухода из плазмы на неэмитирующую стенку, расположенную при  $z = 0$ ,  $\Phi = \Phi_0$ . Соответственно, область II — это область, в которой электроны имеют максвелл-больцмановское распределение по энергии  $W = E - e\varphi$ , не возмущенное отбором тока на электрод.

Электронный ток на границе плазма—электрод переносится только быстрыми электронами с энергией  $E \sim \Phi_0 \gg k_B T_e$  ( $T_e$  — температура электронов,  $k_B$  — постоянная Больцмана). Функция распределения тепловых электронов с энергией  $\sim k_B T_e$  остается в этом случае практически максвелловской. В этих условиях при постановке граничных условий ранее использовались значения тепловой энергии электронов в потоке эмиссии с электрода в плазму  $\bar{E}_1 = 2k_B T_c$  и в потоке эмиссии

Бакшт Фёдор Григорьевич, заведующий лабораторией.  
Лапшин Владимир Фёдорович, старший научный сотрудник.  
Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН.  
Россия, 194021, С.-Петербург, Политехническая ул., 26.  
Тел. (812) 515-19-69, факс (812) 247-10-17. E-mail: baksh@mail.ioffe.ru  
Статья поступила в редакцию 10 августа 2011 г.

из плазмы на электрод  $\bar{E}_2 = 2k_B T_e$ . Здесь  $T_c$  и  $T_e$  — температуры катода и тепловых электронов плазмы, соответственно.

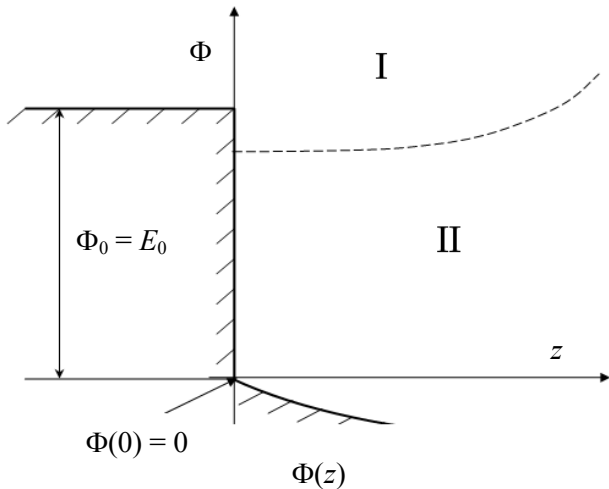


Рис. 1. Схематическое распределение потенциальной энергии электрона  $\Phi(z) = -e\varphi(z)$  в приэлектродном слое перед незитирующей стенкой

Такие значения средней энергии соответствуют случаю, когда распределение электронов по энергии является максвелловским и пренебрегается возвратом электронов эмиссии обратно на электрод, а также пренебрегается уменьшением концентрации быстрых электронов в плазме вследствие их ухода на электрод (или диэлектрическую стенку) через задерживающий потенциальный барьер  $\Phi_0$ . В работе выполнен расчет значений средних тепловых энергий электронов с учетом указанных факторов.

### Уравнение для функции распределения быстрых электронов

Рассматривается случай, когда основной вклад в концентрацию электронов в ПС вносят тепловые электроны. В этих условиях можно пренебречь взаимодействием быстрых электронов друг с другом и учитывать только их взаимодействие с медленными, т. е. максвеллизированными электронами плазмы. Этот факт делает уравнение Больцмана линейным относительно неизвестной ФРЭ, что позволяет рассчитывать эффекты, вызывающие отклонение ФРЭ от равновесной, независимо друг от друга. ФРЭ по энергии  $F(W, z)$  представим в виде:

$$F(W, z) = F_M(W) + F_1(W, z) - F_2(W, z). \quad (1)$$

Здесь  $W = E - e\varphi(z)$  — полная энергия,  $E = mv^2/2$  — кинетическая энергия электрона,  $z$  — расстояние, отсчитываемое от поверхности катода (стенки),  $F_1$  соответствует вкладу в ФРЭ пучка электронов, эмитированных катодом, находящимся

под отрицательным потенциалом, и ускоренных в ленгмюровском слое, а  $F_2$  описывает отклонение ФРЭ от максвелловской  $F_M$  вследствие ухода электронов плазмы с энергиями  $W \geq E_0 = e\varphi_0$  на электрод (напомним,  $\varphi_0 = |\varphi(0)|$ ). В рассматриваемых условиях для каждой ФРЭ по энергиям  $F_1$  и  $F_2$  можно сформулировать уравнения [2]:

$$-D_0 \frac{\partial^2 F_k}{\partial z^2} = \frac{E_0}{\tau_E} \left( \frac{\partial F_k}{\partial W} + k_B T_e \frac{\partial^2 F_k}{\partial W^2} \right), \quad k = 1, 2. \quad (2)$$

В уравнении (2) учтено, что дисперсия по энергии в каждой группе электронов невелика, и поэтому все коэффициенты, зависящие от энергии, считаются постоянными, а именно,  $D_0 = l_0 v_0 / 3$ ,  $l_0 = 1 / n_a \sigma_{ea}^{(t)}(v_0)$ ,  $v_0 = (2E_0 / m_e)^{1/2}$ ,  $\tau_E = \frac{E_0^2}{2\pi n_e \Lambda v_0} \left( \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right)^2$ . Здесь  $v_0$  и  $D_0$ , соответственно, скорость и коэффициент диффузии быстрых электронов,  $\sigma_{ea}^{(t)}$  — их транспортное сечение упругого электрон-атомного ( $e$ - $a$ ) рассеяния,  $\tau_E$  — время релаксации быстрых электронов по энергии при электрон-электронных ( $e$ - $e$ ) столкновениях.

Граничные условия для (2) имеют вид [2]:

$$\begin{cases} -D_0 \frac{\partial F_k}{\partial z} \Big|_{z=0} = i_k \frac{W - E_0}{(kT_k)^2} \exp\left(-\frac{W - E_0}{kT_k}\right) - \\ - \frac{W - E_0}{4E_0} F_k(W, 0) v_0, \quad W \geq E_0, \\ -D_0 \frac{\partial F_k}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad W \leq E_0, \quad k = 1, 2. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь при  $k = 1$  плотность потока  $i_k = i_{em} = j_{em}/e$ ,  $T_k = T_c$  ( $j_{em}$  — плотность тока эмиссии с катода), а при  $k = 2$  предполагается  $T_k = T_e$ ,  $i_k = i_T = 0,25 n_e \bar{v}_e \exp(-E_0 / kT_e)$ , средняя скорость электронов  $\bar{v}_e = (8kT_e / \pi m_e)^{1/2}$ . Таким образом, случай  $k = 1$  соответствует контакту эмиттера электронов с плазмой, т. е. здесь в правой части (3) первое слагаемое описывает поток электронов (в единичном интервале энергии  $E$ ), попадающий с эмиттера в плазму, а второе слагаемое соответствует тем эмитированным электронам, которые вследствие упругого рассеяния в плазме возвращаются обратно на эмиттер, прежде чем успевают потерять в плазме заметную долю энергии  $\Delta E$  (в большинстве случаев  $\Delta E \sim k_B T_e$ ) и будут "захвачены" задерживающим потенциальным барьером  $\Phi_0$  в приэлектродном ленгмюровском слое. Случай  $k = 2$  соответствует контакту плазмы с незитирующим электродом, отбирающим из плазмы быстрые электроны с энергией  $E \geq E_0$ .

Поскольку на больших расстояниях от электрода ФРЭ релаксирует к максвелловскому распределению, то на бесконечности граничным условием будет  $F_k(W, z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ . Отметим еще раз, что первое слагаемое в правой части (3) при  $W \geq E_0$  описывает при  $k = 1$  эмиссию электронов с поверхности катода в плазму, а при  $k = 2$  эмиссию электронов из равновесной плазмы на электрод. Второе слагаемое в правой части (3) учитывает при  $k = 1$  уменьшение тока эмиссии за счет возврата электронов эмиссии на электрод, а при  $k = 2$  уменьшение эмиссии из плазмы за счет обеднения ФРЭ быстрыми электронами вблизи границы плазма—электрод.

### Основные соотношения

В рассматриваемых условиях плотность потока электронов через границу электрод—ПС плазмы определяется соотношением [2, 3]:

$$i_e = - \int_{E_0}^{\infty} D_0 \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=0} dE = i_{em}(1 - r_1) - i_T(1 - r_2), \quad (4)$$

а результирующая плотность потока энергии, вносимого электронами в плазму через границу электрод—ПС плазмы, определяется как

$$S_e = - \int_{E_0}^{\infty} ED_0 \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=0} dE = i_e E_0 + i_{em} \bar{E}_1 (1 - r_1) - i_T \bar{E}_2 (1 - r_2). \quad (5)$$

Здесь  $\bar{E}_1$  и  $\bar{E}_2$  — искомые "тепловые" энергии электронов в потоке в расчете на один электрон, пересекающий границу электрод—ПС плазмы, а  $r_1$  и  $r_2$  — так называемые кинетические коэффициенты отражения электронов на границе плазмы. Основные свойства коэффициентов  $r_1$  и  $r_2$  приведены в [2]. Коэффициент отражения  $r_1$ , как и функция распределения  $F_1(W, z)$ , зависят, вообще говоря, от двух температур  $T_c$  и  $T_e$ , в то время как коэффициент отражения  $r_2$  и функция распределения  $F_2(W, z)$  зависят только от одной температуры  $T_e$ . Причина этого в том, что граничные условия (3) к уравнению (2) ставятся по-разному при определении  $F_1$  и  $F_2$ .

Отметим, что потоки тепловой энергии электронов на границе плазмы, строго говоря, не являются малыми величинами по сравнению со слагаемыми  $i_e E_0$  в правой части (5). Прежде всего это относится к низковольтным разрядам, когда приэлектродное падение напряжения  $\phi_0 = E_0/e$  может не более, чем в несколько раз, превышать  $k_B T_e$  (ср., величины  $\phi_0$  и  $T_e$  в прианодной области типичного низковольтного, например, цезий-водородного разряда [4, 5]). При этом использованный выше

критерий малости концентрации  $n_0$  быстрых электронов по сравнению с концентрацией  $n_e$  тепловых электронов в прианодном слое выполняется, так как  $n_0/n_e \sim \exp(-\Phi_0/k_B T_e) \ll 1$ , в то время как тепловые энергии  $\bar{E}_1$  и  $\bar{E}_2$  электронов еще недостаточно малы по сравнению с  $E_0$  для того, чтобы ими можно было пренебречь в граничном условии для потока энергии электронов. Отметим, что в случае неэмитирующего анода граничное условие для потока энергии  $S_{eA}$  аналогично (5):

$$S_{eA} = i_e E_0 + i_T \bar{E}_2 (1 - r_2).$$

За положительное направление  $S_{eA}$  здесь принято направление из плазмы на анод. Отметим также, что в целом ряде случаев результирующий ток  $i_e$  в (5) мал по сравнению с  $i_{em}$  и  $i_T$ . При этом основная энергия может переноситься вторым и третьим слагаемым в (5). Все это свидетельствует о необходимости корректного вычисления тепловых компонент в полном потоке энергии  $S_e$ .

Остановимся здесь на определенных соотношениях "симметрии" между функциями  $F_1(W, z)$  и  $F_2(W, z)$  и между парами величин  $r_1, r_2$  и  $\bar{E}_1, \bar{E}_2$ . В результате использования этих соотношений для полного решения задачи, т.е. для нахождения функции  $F(W, z)$  в (1) нет необходимости в раздельном определении двух функций  $F_1$  и  $F_2$ . Достаточно определить функцию  $F_1(W, z)$  путем решения уравнения (2) с граничными условиями (3) при  $k = 1$ . Затем можно получить выражение для  $F_2(W, z)$ , заменив в найденном решении для  $F_1(W, z)$  температуру катода  $T_c$  на температуру электронов  $T_e$  и ток эмиссии катода  $i_{em}$  на ток равновесной эмиссии электронов из плазмы на отрицательный электрод  $i_T$ . Вместе с тем, зная  $F_1(W, z)$ , достаточно определить коэффициент отражения  $r_1(T_c, \tau_e)$  (здесь  $\tau_e = T_e/T_c$ ) и среднюю тепловую энергию  $\bar{E}_1(T_c, \tau_e)$ , а затем, положив  $\tau_e = 1$  и  $T_c = T_e$ , найти

$$r_2(T_e) = r_1(T_e, 1) \text{ и } \bar{E}_2(T_e) = \bar{E}_1(T_e, 1). \quad (6)$$

Это свойство решений является следствием принципа детального равновесия, который должен выполняться в случае контакта эмиттера—катода с плазмой, находящейся в состоянии термодинамического равновесия с катодом. При таком равновесии  $T_c = T_e$ , а результирующий ток на контакте плазма—катод равен нулю.

Для дальнейшего анализа существенен параметр  $\rho_0$ , определяющий порядок величины отношения второго слагаемого в правой части (3) (при  $W > E_0$ ) к левой части (3), т.е. к значению величины  $-D_0(\partial F_k/\partial z)|_{z=0}$ , которая представляет собой результирующий поток быстрых электронов, вошедший в плазму. Мы определим этот параметр  $\rho_0$  как

$$p_0(T_e) = \frac{L_E}{l_0} (k_B T_e)^{3/2}.$$

При этом полагается, что попадающие из плазмы на эмиттер электроны, как и сами электроны плазмы, имеют дисперсию по энергии  $W - E_0 \sim k_B T_e$ . В большинстве случаев это предположение выполняется для электронов, эмитируемых из плазмы на поверхность эмиттера. Ниже будут рассмотрены два предельных случая, а именно,  $p_0 \gg 1$ , т. е. когда большинство электронов, инжецированных в плазму с эмиттера, возвращается обратно на эмиттер вследствие интенсивного упругого рассеяния в плазме и вследствие сравнительно малой частоты электрон-электронных столкновений (т. е. вследствие большой величины  $L_E/l_0$ ), и противоположный случай  $p_0 \ll 1$ , когда указанный возврат электронов мал.

### Определение тепловой энергии электронов $\bar{E}_1$ и $\bar{E}_2$ при $p_0 \gg 1$

Начнем рассмотрение со случая  $p_0 \gg 1$ . В этом случае при  $E > E_0$ , ограничиваясь нулевым приближением по малому параметру  $1/p_0$ , можно считать, что ФРЭ по энергии в плазме на границе с электродом известна. Так, для случая  $k = 1$ , когда рассматривается контакт эмиттера электронов с плазмой, а результирующий отток электронов в глубь плазмы пренебрежимо мал, ФРЭ при  $z = 0$  находится из условия обращения в нуль правой части первого уравнения (3), т. е. из условия равенства нулю потока электронов в правой части первого уравнения (3) при  $k = 1$ . В результате получаем, что ФРЭ на границе плазмы с эмиттером равна

$$F_1(W, 0) = \frac{i_{em} \sqrt{8m_e E_0}}{(k_B T_c)^2} \exp\left(-\frac{W - E_0}{k_B T_c}\right), \quad z = 0, W - E_0 > 0. \quad (7)$$

Второе уравнение (3), т. е. граничное условие при  $W - E_0 < 0$ , остается без изменений. В соответствии с соотношениями симметрии, для получения значения  $F_2(W, 0)$  необходимо заменить в (7)  $i_{em}$  на  $i_T$  и  $T_c$  на  $T_e$ . Тогда получаем:

$$F_2(W, 0) = \frac{i_T \sqrt{8m_e E_0}}{(k_B T_e)^2} \exp\left(-\frac{W - E_0}{k_B T_e}\right), \quad z = 0, W - E_0 > 0. \quad (8)$$

Решение уравнения (2) с граничными условиями (7) при  $z = 0, W - E_0 > 0$  и  $-D_0(\partial F_1/\partial z)|_{z=0}$  при  $z = 0, W - E_0 < 0$  находится методом Винера—Хопфа или близкими методами (подробнее см. обзоры [2, 3] и специальную литературу [6]):

$$F_1(W, z) = \frac{i_{em} \sqrt{8m_e E_0}}{(k_B T_c)^2} \exp(-\kappa r(1 + \cos\theta)) \times \text{Re } w\left(\sqrt{\kappa r(1 + \cos\theta)}(\tau_e - 1) + i\sqrt{\kappa r(1 - \cos\theta)}\tau_e\right). \quad (9)$$

Здесь  $w(z) = \exp(-z^2) \left[1 + \frac{2i}{\pi} \int_0^z \exp(t^2) dt\right]$  — интеграл вероятностей комплексного аргумента [7].

В (9) введены безразмерные параметры и переменные  $\kappa = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_0}{k_B T_e}}$ ,  $\tau_e = \frac{T_e}{T_c}$ ,  $\tilde{z} = \frac{z}{L_E}$  и

$$\tilde{W} = \frac{W - E_0}{\sqrt{E_0 k_B T_e}}. \text{ В плоскости } \tilde{z}, \tilde{W} \text{ введены полярные координаты } r \text{ и } \theta: \tilde{z} = r \sin\theta, \tilde{W} = r \cos\theta. \text{ Решение (9) позволяет найти спектральную плотность результирующего потока электронов } I_1(W, 0) \text{ с поверхности эмиттера в плазму с учетом членов порядка } 1/p_0:$$

$$I_1(W, 0) = -D_0 \left. \frac{\partial F_1(W, z)}{\partial z} \right|_{z=0}. \quad (10)$$

Учитывая, что при  $z = 0, W = E$  получаем (при  $p_0 \gg 1$ ):

$$I_1(E, 0) = \frac{D_0}{L_E} \frac{2n_e E_0}{\pi (k_B T_c)^{3/2}} \exp\left(-\frac{E}{k_B T_c}\right) (E - E_0)^{-1/2}, \quad z = 0, E > E_0. \quad (11)$$

С помощью (11) находим среднюю тепловую энергию в потоке:

$$\bar{E}_1 = \langle E - E_0 \rangle = \frac{E_0 \int_0^\infty (E - E_0) I_1(E, 0) dE}{\int_0^\infty I_1(E, 0) dE} = \frac{k_B T_c}{2}. \quad (12)$$

Символ  $\langle f(E) \rangle$  здесь и в дальнейшем обозначает усреднение по ФРЭ в потоке, т. е. по  $I_1(E, 0)$ .

Заменяя в (12)  $T_c$  на  $T_e$ , получаем  $\bar{E}_2 = \frac{k_B T_e}{2}$ .

Отметим, что величины  $F_1(W, 0)$  и  $I_1(W, 0)$  при  $p_0 \gg 1$  не зависят от температуры  $T_e$  электронов плазмы, а зависят только от температуры  $T_c$  эмиттера—катода. Вместе с этим от  $T_e$  не зависят кинетический коэффициент отражения  $r_1$  и величина  $\bar{E}_1$ . Случай  $p_0 \gg 1$ , с этой точки зрения, является исключительным. В этом случае ПС на контакте эмиттера с плазмой заполняется электронами, эмитированными катодом. Их функция распределения по энергии на границе с катодом при  $E > E_0$  является максвелловской с температурой  $T_c$ . Именно поэтому коэффициент отражения в по-

токе  $i_1$  зависит только от  $T_c$  и не зависит от  $T_e$ . Что касается плазменных электронов, достигающих поверхности эмиттера, то при  $p_0 \gg 1$  на границе эмиттер—плазма их концентрацию следует положить равной нулю. При этом диффузионный ток плазменных электронов на поверхность эмиттера выражается аналогично (10) и отличен от нуля. При  $p_0 \gg 1$  оба коэффициента отражения  $r_1$  и  $r_2$  близки к единице, а разность  $1 - r \sim 1/p_0 \ll 1$ . Явные выражения для  $r_1$  и  $r_2$  имеют вид:

$$1 - r_1 = \frac{4}{3} \frac{l_0}{L_E} \left( \frac{E_0}{k_B T_c} \right)^{3/2} \quad \text{и} \quad 1 - r_2 = \frac{4}{3} \frac{l_0}{L_E} \left( \frac{E_0}{k_B T_e} \right)^{3/2}.$$

### Определение тепловой энергии электронов

$\bar{E}_1$  и  $\bar{E}_2$  при  $p_0 \ll 1$

Рассмотрим теперь случай  $p_0 \ll 1$ . В нулевом приближении, т. е. при  $p_0 = 0$ , когда возврат эмитированных катодом электронов обратно на эмиттер не учитывается, вторым слагаемым в правой части первого уравнения (3) следует пренебречь ( $r_1 = 0$ ). В результате спектральный поток электронов запишется в виде

$$I_1^{(0)}(E, 0) = -D_0 \left. \frac{\partial F_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=0} = i_{em} \frac{E - E_0}{(kT_c)^2} \exp\left(-\frac{E - E_0}{kT_c}\right),$$

а средняя тепловая энергия  $\bar{E}_1 = \langle E - E_0 \rangle = 2k_B T_c$ . Соответственно,  $\bar{E}_2 = 2k_B T_e$  и  $r_2 = 0$ . Уравнение (2) для ФРЭ  $F_1^{(0)}(W, z)$  с учетом указанного выше упрощения граничных условий решается с помощью Фурье-преобразования по переменной  $W$ :

$$F_1^{(0)}(W, z) = -\frac{3}{2\pi\sqrt{2}} \frac{L_E i_{em} \sqrt{m_e k_B T_e}}{l_0 (k_B T_e)^2} \exp \times \left( -\frac{\tilde{W}}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\alpha\tilde{W}) \exp\left(-\tilde{z}\sqrt{\alpha^2 + \kappa^2}\right)}{[\alpha + i\kappa(2\tau_e - 1)]^2 (\alpha^2 + \kappa^2)^{1/2}} d\alpha. \quad (13)$$

Интегрирование в (13) проводится в полосе  $-\kappa < \text{Im}\alpha < \kappa$ , включающей вещественную ось, где подынтегральная функция не имеет особенностей. Выражение  $\sqrt{\alpha^2 + \kappa^2}$  определено так, что  $\sqrt{\alpha^2 + \kappa^2} \rightarrow +\alpha$  при  $\alpha \rightarrow +\infty$  по вещественной оси. Решение (13) можно использовать для уточнения потоков электронов и их энергии на границе плазмы, где  $z = 0$  и  $W = E$ . С этой целью подставим

$F_1^{(0)}(W, 0)$  во второе слагаемое в правой части (3) при  $W > E_0$ :

$$I_1(E, 0) = -D_0 \left. \frac{\partial F_1}{\partial z} \right|_{z=0} = i_{em} \frac{E - E_0}{(kT_c)^2} \exp \times \left( -\frac{E - E_0}{kT_c} \right) - \frac{E - E_0}{4E_0} F_1^{(0)}(E, 0).$$

Теперь получаем

$$\bar{E}_1 = \langle E - E_0 \rangle = 2k_B T_c (1 - p_0 \psi(\tau_e))$$

$$\text{и} \quad r_1 = 1 - \frac{1}{i_{em} E_0} \int I_1(E, 0) dE = p_0 \chi(\tau_e). \quad (14)$$

$$\text{Здесь} \quad \chi(\tau_e) = \frac{3}{4\pi\tau_e} \left( 4 + \frac{4\tau_e}{3} + \frac{3\tau_e - 2,5}{\tau_e^{1/2}(\tau_e - 1)^{3/2}} \times \right. \\ \left. \times \ln\left(2\tau_e - 1 + 2\sqrt{\tau_e(\tau_e - 1)}\right) - \frac{1}{\tau_e - 1} \right)$$

$$\text{и} \quad \psi(\tau_e) = \frac{3}{4\pi\tau_e} \left( 2 - \frac{4\tau_e}{3}(\tau_e - 1) + \frac{12}{5}\tau_e^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\tau_e(\tau_e - 1)}} \ln\left(2\tau_e - 1 + 2\sqrt{\tau_e(\tau_e - 1)}\right) \right).$$

С учетом соотношений симметрии (6) из (14) получаем  $\bar{E}_2 = 2k_B T_e (1 - p_0 \psi(1))$  и  $r_2 = p_0 \chi(1)$ . Отметим, что значения  $\chi(1) = 8/\pi$  и  $\psi(1) = 24/5\pi$ . Графики функций  $\chi$  и  $\psi$  приведены на рис. 2.

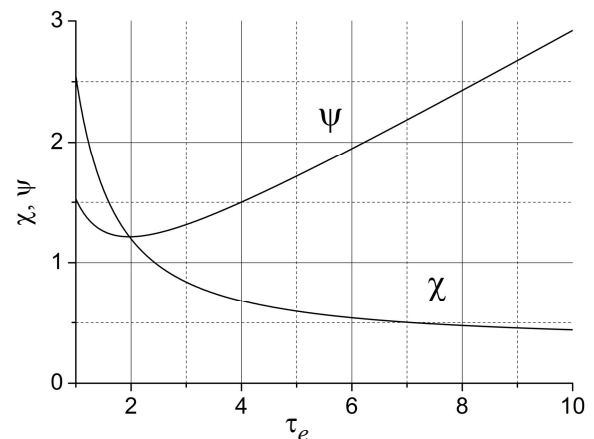


Рис. 2. Зависимость численных значений функций  $\chi$  и  $\psi$  от значения  $\tau_e = T/T_c$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Случай  $p_0 \ll 1$  встречается часто не только при формулировке граничных условий к гидродинамическим уравнениям переноса, но и при построении теории пучковых разрядов, т.е. разрядов, в которых торможение пучка на парных столкновениях вплоть до тепловых энергий электронов вообще не имеет места вследствие достаточно

большого катодного падения потенциала и малой концентрации тепловых электронов. Если в таких разрядах функция распределения электронов, переносящих ток с катода на анод, быстро симметризуется на парных столкновениях электронов с нейтралами (вследствие малой длины свободного пробега  $l_0$ ), а столкновительное затухание ленгмюровских волн достаточно велико [8], то упомянутые здесь методы решения кинетического уравнения для ФРЭ могут быть с успехом использованы. В качестве примера можно привести пучковый разряд в гелии [9], в котором длина  $L_E$  полной релаксации энергии на парных кулоновских столкновениях превышает зазор и катодный пучок достигает анода.

### Заключение

Таким образом, в данной работе найдены значения тепловой энергии электронов в потоке эмиссии с электрода в плазму  $\bar{E}_1$  и в потоке эмиссии из плазмы на электрод  $\bar{E}_2$  для случаев большой и малой величины коэффициента кинетического отражения. Показано, что значения  $\bar{E}_1$  и  $\bar{E}_2$  в зависимости от соотношения между параметрами плазмы меняются в пределах  $0,5k_B T_c < \bar{E}_1 < 2k_B T_c$

и  $0,5k_B T_e < \bar{E}_2 < 2k_B T_e$ , соответственно. Полученные значения  $\bar{E}_1$  и  $\bar{E}_2$  могут использоваться при постановке граничных условий для гидродинамических уравнений на электроде или диэлектрической стенке.

### Литература

1. Benilov M. S. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2008. V. 41. P. 144001.
2. Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Вводный том II. С. 80—93/ Под ред. В. Е. Фортова. — М.: Наука. 2000.
3. Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Вводный том II. С.132—146/ Под ред. В. Е. Фортова. — М.: Наука. 2000.
4. Бакут Ф. Г., Елизаров Л. И., Иванов В. Г., Коньков С. И., Митрофанов Н. К., Школьник С. М. // Физика плазмы. 2003. Т. 29. № 3. С. 256.
5. Baksh F. G., Ivanov V. G., Kon'kov S. I., Shkolnik S. M., Bacal M. V. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2003. V. 36. P. 122.
6. Нобл Б. Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: ИЛ, 1962.
7. Фаддеева В. Н., Терентьев Н. Н. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. — М.: Гостехиздат, 1954.
8. Бакут Ф. Г., Лапшин В. Ф. // ЖТФ. 1987. Т. 57. № 5. С. 841.
9. Baksh F. G., Lapshin V. F., Mustafayev A. S. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1995. V. 28. P. 694.

## The electron energy transport through the plasma—electrode boundary in weakly ionized plasma

F. G. Baksh, V. F. Lapshin

A. F. Ioffe Physical-Technical Institute of RAS, 26 Polytekhnicheskaya str., St.-Petersburg, 194021, Russia  
E-mail: baksh@mail.ioffe.ru

*The average thermal electron energy components:  $\bar{E}_1$  in the energy flux from the electrode to plasma and  $\bar{E}_2$  in the energy flux from the plasma to electrode are determined. Calculations are carried out for the cases of the large and the small values of so-called kinetic reflection coefficient. It is shown, that these values are concluded in the limits  $0.5 kT_c < \bar{E}_1 < 2kT_c$  and  $0.5 kT_e < \bar{E}_2 < 2kT_e$  ( $T_c$  and  $T_e$  are the temperatures of the cathode and plasma electrons). The obtained values can be used for formulation of the boundary conditions for the hydrodynamic equations at the plasma-electrode boundary.*

PACS: 52.80.Mg

*Keywords:* low temperature plasma, gas discharge, near electrode layer, boundary conditions.

Bibliography — 9 references.

Received August 10, 2011