

# Физика плазмы и плазменные методы

УДК 533.9

## Определение термодинамических свойств замагниченной плазмы на основе модели Томаса–Ферми

В.В. Кузенов, С.В. Рыжков, В.В. Шумаев

*Работа посвящена разработке методов расчета термодинамических и транспортных свойств замагниченной термоядерной плазмы на основе модели Томаса–Ферми. Выполненные в работе оценки и расчеты показали, что магнитное поле со значениями индукции  $B < 10^7$  Гс оказывает влияние только на транспортные свойства плазмы, но не изменяет вид внутренних оболочек атомов и ионов. Получены распределения потенциала Томаса–Ферми по радиусу атомной ячейки для плазмы золота, а так же изотермы давления в зависимости от плотности.*

PACS: 52.25.Fi, 52.25.Kn, 52.25.Xz, 52.65.-y

*Ключевые слова:* модель Томаса–Ферми, замагниченная плазма, магнитное поле, термодинамические и транспортные свойства плазмы.

### Введение

В исследованиях, посвященных тематике управляемого термоядерного синтеза, одной из важных задач является задача, связанная с описанием термодинамических и транспортных свойств замагниченной плазмы (при температуре  $T > 0,001$  кэВ, плотности  $10^{-3} < \rho < 10^3$  г/см<sup>3</sup>,  $B < 10^7$  Гс =  $10^3$  Тл).

Для её математического описания используется приближенный метод, который основывается на обобщении (на случай ненулевой температуры [1] и внешнего магнитного поля [2, 3]) статистического метода Томаса–Ферми. Данный метод отличается простотой (например, по сравнению с методом Хартри–Фока–Слэтера [4]). При этом он обеспечивает приемлемую для практики точность, особенно при учете квантовых, обменных и осцилляционных поправок [4]. Одной из причин выбора квантово-статистической модели (модели Томаса–Ферми) в качестве рабочей является то, что в рассматриваемом диапазоне плотностей и температур возможно возникновение вырожденного состояния электронного газа.

В модели вещества Томаса–Ферми [1] принимается, что отсутствует различие между «свободными» и «связанными» электронами, вещество считается состоящим не из ионов и электронов, а из ядер и электронов. Энергия взаимодействия частиц, составляющих вещество, определяется электронами. Термодинамические свойства термоядерной плазмы рассчитываются на основе модели локального термодинамического равновесия

(ЛТР). Для систем большого числа невзаимодействующих между собой ядер считается выполненной статистика Больцмана. При этом вклад ядер (для высоких температур) в давление  $P_a$  и удельную внутреннюю энергию  $E_a$  соответствует вкладу обычного одноатомного идеального газа.

При вычислении электронных частей энергии и давления термоядерной плазмы применяется модель ЛТР, в соответствии с которой вещество разбивается на систему атомных ячеек, каждая из которых содержит  $Z$  электронов и ядро с зарядом  $Ze$  ( $e$  – заряд электрона). Электроны в атомной ячейке рассматриваются как газ (к которому применима статистика Ферми–Дирака), находящийся в достаточно медленно меняющемся по радиусу самосогласованном электростатическом поле  $V(r)$ , обусловленном зарядом ядра и самих электронов.

### Постановка краевой задачи для уравнения Томаса–Ферми для случая атомарной смеси веществ и вычисление термодинамических функций

Вычисление потенциала Томаса–Ферми  $V_i(r)$  в пределах атомной ячейки в случае смеси веществ сводится к решению системы нелинейных, сферически-симметричных уравнений Пуассона с соответствующими граничными условиями [4]:

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi_i(x) = a_i x^{l_{i/2}} \left( \frac{\phi_i}{x} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\phi_i(0) = \frac{Z_i}{\theta r_{0i}}, \quad \phi_i(1) = \frac{d\phi_i}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{\mu_i}{\theta},$$

$$a_i = \frac{4\sqrt{2\theta}}{\pi} r_{0i}^2, \quad r_{0i} = 1,388 \left( \frac{A_i}{\rho_i} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Кузенов Виктор Витальевич, доцент.

Рыжков Сергей Витальевич, доцент.

Шумаев Вячеслав Витальевич, студент.

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана.

Россия, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5/1.

Тел.: (499)263-65-70. E-mail: chubchic@gmail.com

Статья поступила в редакцию 15 мая 2014 г.

© Кузенов В. В., Рыжков С. В., Шумаев В. В., 2014

Здесь  $x = r/r_{0i}$ ;  $\phi_i = (V_i(r) + \mu_i) \cdot r / (\theta \cdot r_{0i})$ ;  $\theta = kT$ ;  $V_i(r)$  – потенциал Томаса–Ферми в  $i$ -ой ячейке;  $k$  – постоянная Больцмана;  $\mu_i$  – химический потенциал  $i$ -ого компонента. Кроме того, использована функция Ферми–Дирака:

$$I_{1/2}(x) = \int_0^\infty \frac{y^2 dy}{1 + \exp(y-x)}$$

Все величины приведены в атомной системе единиц ( $e = 1, m = 1, \hbar = 1$ ). Температура  $T$  задана в кэВ.

Радиусы атомных ячеек  $r_{0i}$  и связанные с ними парциальные плотности  $\rho_i$  в ходе получения решения подбираются таким образом, чтобы удовлетворять следующим соотношениям:

$$\frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_i},$$

$$\eta_i = \eta_j = \eta = -\frac{\mu}{\theta}, \quad \forall i, j,$$

где  $m_i$  – массовая доля  $i$ -ой компоненты.

При вычислении термодинамических функций, определяющих уравнения состояния (термическое и калорическое) предполагается, что потенциал Томаса–Ферми:  $\phi(x) = x \cdot (V(r) + \mu) / \theta$  рассчитан. Тогда давление электронов на границе атомной ячейки может быть вычислено как средний импульс, переносимый ими за единицу времени через единицу поверхности атомной ячейки радиуса  $r_0$  [4]:

$$P_e = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{p^2 \cdot \sin \vartheta \cdot p^2 \cdot \cos^2 \vartheta}{1 + \exp\left(\frac{p^2}{2\theta} + \eta\right)} = \frac{(2\theta)^2}{6\pi^2} I_{3/2}(-\eta)$$

где  $\vartheta$  и  $\varphi$  – углы в сферических координатах,  $\eta = -\mu/\theta$ .

Для нахождения полного давления всей системы частиц, находящихся в атомной ячейке, необходимо учесть давление, создаваемое ядрами. При высоких температурах эту систему (газ, состоящий из ядер) обычно рассматривают, как идеальный газ. Поэтому для полного давления имеем:

$$P = 2,942 \cdot 10^4 \left( P_e + \frac{\theta}{v} \right), \text{ ГПа,}$$

где  $v$  – объем атомной ячейки. Методика вычисления удельной внутренней энергии и энтропии плазмы приведена в [4]. Расчеты зависимости давления, внутренней энергии и энтропии плазмы золота от величины внешнего магнитного поля выполнены также в работе [5].

### Оценки влияния внешнего магнитного поля на теплофизические и транспортные свойства плазмы

Степень влияния магнитного поля на транспортные коэффициенты плазмы (электропроводность, теплопроводность) зависит от отношения частоты столкновения

электронов  $v_e$  к ларморовской частоте вращения электронов в магнитном поле [6]:  $\omega_e = \frac{eB}{m_e c} = 1,76 \cdot 10^7 \cdot B$ ,

здесь  $e$  – заряд электрона,  $B$  – магнитная индукция в Гс,  $m_e$  – масса электрона,  $c$  – скорость света. Известно, что магнитное поле будет оказывать заметное влияние на транспортные свойства плазмы, если выполнено соотношение  $v_e/\omega_e \ll 1$ . Учитывая, что частоту столкновений электронов в полностью ионизованной плазме [7] можно определить с помощью выражения:

$$v_e = \frac{4\sqrt{2}\pi e^4 Z^2 n_i \Lambda}{3\sqrt{m_e T_e^{3/2}}} = 2,85 \cdot 10^{-5} \frac{\Lambda}{10} \cdot \frac{Z n_i}{T_e^{3/2}},$$

где  $Z$  – заряд иона,  $\Lambda$  – кулоновский логарифм,  $T_e$  – электронная температура в эВ,  $n$  – плотность плазмы в  $\text{см}^{-3}$ , получаем условие сильного влияния магнитного поля на свойства плазмы в виде:

$$B \gg 1,6 \cdot 10^{-12} \frac{\Lambda}{10} \frac{Z n}{T_e^{3/2}}.$$

Для плазмы золота ( $Z = 79$ ) в интересующих нас диапазоне параметров  $T_e \sim 1$  кэВ,  $n \sim 10^{19} \text{ см}^{-3}$  (что соответствует плотности плазмы  $\rho \sim 0,01 \text{ г/см}^3$  – плотности в области “короны” мишени в инерциальном термоядерном синтезе) имеем следующую оценку ( $A \approx 15$ ):

$$B \gg 1,6 \cdot 10^{-12} \frac{15 \cdot 79 \cdot 10^{19}}{10 (10^3)^{3/2}} \Rightarrow B \gg 5,99 \cdot 10^4 \text{ Гс}$$

В магнитно-инерциальном термоядерном синтезе [8, 9] экспериментально получено значение напряженности магнитного поля  $B_{\text{тн}} \sim 10^7 \text{ Гс}$  [10–12], и в дальнейших исследованиях могут быть достигнуты еще более высокие значения напряженности [13–19]. В этой связи можно сделать вывод о необходимости учета влияния магнитных полей уровня  $B < 10^7 \text{ Гс}$  на транспортные свойства термоядерной плазмы.

Магнитное поле, воздействующие на ориентацию спинов электронов или атомов в газе, имеющих температуру  $T$ , определяется условием:

$$\mu B = \frac{e\hbar}{2m_e c} B \gg k_B T, \text{ или } B \gg 1,49 \cdot 10^4 T [\text{К}] \text{ Гс}$$

где  $\mu$  – магнетон Бора.

В нашем случае характерная температура  $T_{\text{хар}} \sim 1$  кэВ. Тогда  $B \gg 1,49 \cdot 10^4 \cdot 10^7 \approx 10^{11} \text{ Гс}$ , что значительно больше величин напряженности магнитного поля  $B$ , достигаемых в задачах термоядерного синтеза. Таким образом, будем считать, что магнитное поле не влияет на ориентацию спинов электронов или

атомов в термоядерной плазме.

Магнитное поле  $B \sim 10^9$  Гс, в котором энергия магнитного момента  $\mu B$  больше, чем характерная энергия связи атома или молекулы (порядка постоянной Ридберга  $Ry = m_e e^4 / 2\hbar^2$ ), существенно влияют на структуру атомов и молекул и сильно изменяет их энергию связи и ионизации. Рассматриваемые в данной работе магнитные поля существенно меньше значений  $B \sim 10^{13}$  Гс,

поэтому имеется возможность пренебречь релятивистскими эффектами.

### Результаты расчета

Ниже (рис. 1) приведены распределения потенциала Томаса–Ферми по радиусу атомной ячейки для золота плотности  $1 \text{ г/см}^3$  при температуре  $1 \text{ кэВ}$ .

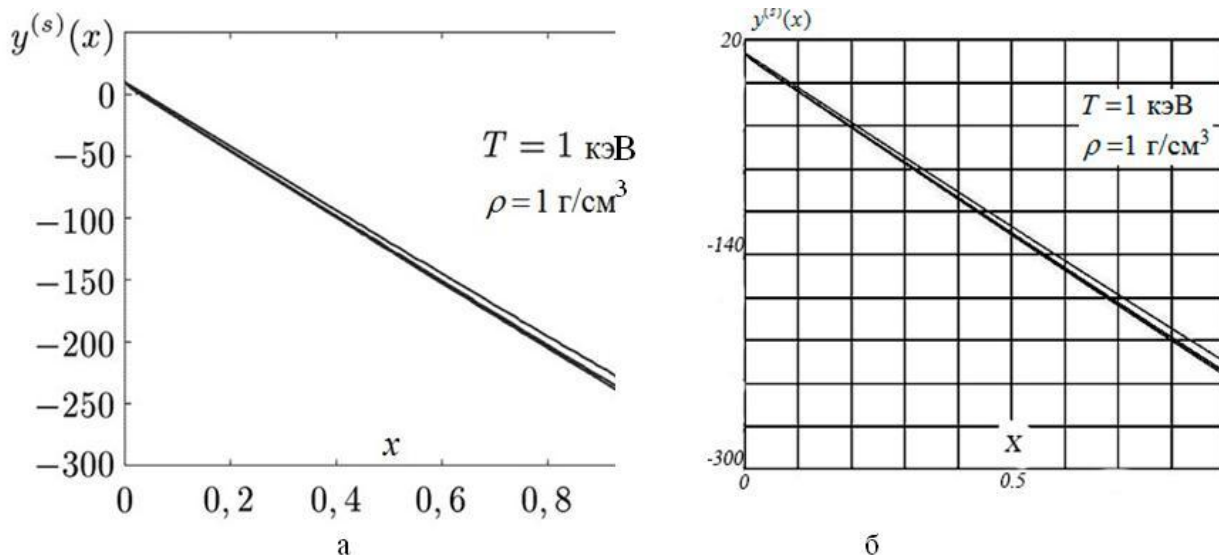


Рис. 1. Последовательные приближения функции  $y^{(s)}(x) = \theta \cdot \phi^{(s)}(x)$  для золота при плотности  $1 \text{ г/см}^3$  и температуре  $T=1 \text{ кэВ}$ : а — результаты [4], б — получено авторами

Таким образом, можно отметить, что в рассматриваемом диапазоне температур и плотностей результаты данной работы хорошо соотносятся с известными литературными данными [4]. Ниже (рис. 2) представлено распределение давления плазмы в зависимости от плотности  $\rho$  и температуры  $T$ .

вает влияние только на транспортные свойства плазмы, но не изменяет вид внутренних оболочек атомов и ионов. Для плазмы золота найдены распределения потенциала Томаса–Ферми, зависящие от радиуса атомной ячейки. Рассчитано давление плазмы золота в зависимости от её температуры и плотности.

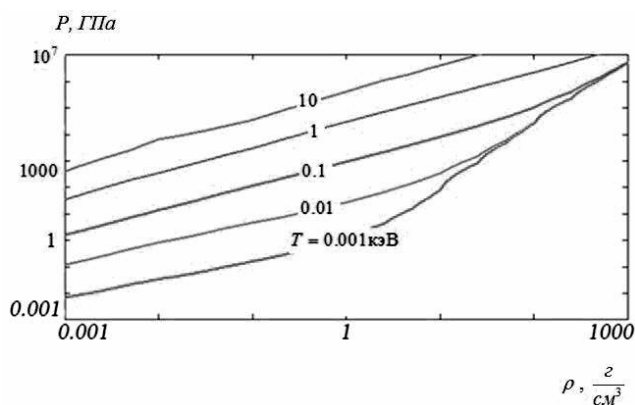


Рис. 2. Изотермы давления в зависимости от плотности по модели Томаса–Ферми для золота

### Заключение

Проведенные тестовые расчеты в диапазоне температур ( $T \approx 1 \text{ кэВ}$ ) и плотностей ( $\rho = 10^{-2} \div 10^3 \text{ г/см}^3$ ) удовлетворительно соответствуют известным литературным данным [4]. Выполненные в работе оценки и расчеты показали, что магнитное поле до  $10^7$  Гс оказы-

вает влияние только на транспортные свойства плазмы, но не изменяет вид внутренних оболочек атомов и ионов. Для плазмы золота найдены распределения потенциала Томаса–Ферми, зависящие от радиуса атомной ячейки. Рассчитано давление плазмы золота в зависимости от её температуры и плотности.

### Литература

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных явлений гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966.
2. Смирнов С. Г., Холин С. А. // Тр. 5-й межд. конф. «Забахинские научные чтения», РФЯЦ – ВНИИТФ. 1998. С. 310—315.
3. Tomishima Y., Yonei K. // Progress of Theoretical Physics. 1978. V. 59. No. 3. P. 683.
4. Никифоров А. Ф., Новиков В. Г., Уваров В. Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчёта росселандовых пробегов и уравнений состояния. — М.: Физматлит. 2000.
5. Potekhin A. Y., Chabrier G. // Astron. Astrophys. 2013. V. 550. A43.
6. Либерман М. А., Йоханссон Б. // УФН. 1995. Т. 195. С. 121.
7. Чирков А. Ю. Введение в физику плазмы. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
8. Костоюков И. Ю., Рыжков С. В. // Прикладная физика. 2011. № 1. С. 65.
9. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V. // Acta Technica. 2011. V. 56. P. T454.
10. Knauer J. P., Gotchev O. V., Chang P. Y. et al. // Phys. Plasmas. 2010. V. 17. P. 056318.

11. Gotchev O. V., Chang P. Y., Knauer J. P. et al. // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. P. 215004.
12. Takeyama S. // Presented at the 13th Int. Conf. Megagauss Magnetic Field Generation Related Topics. Suzhou, China. 2010. P. 59.
13. Chirkov A. Yu., Ryzhkov S. V. // J. Fus. Energy. 2012. V. 31 (1). P. 7.
14. Шумаев В. В., Рыжков С. В. // Молодежный научно-технический вестник. 2012. № 3.
15. Шумаев В. В. // Молодежный научно-технический вестник. 2013. № 2.
16. Ryzhkov S.V., Chirkov A.Yu., Ivanov A.A. // Fusion Science and Technology. 2013. V. 63. No. 1T. P. 135.
17. Кузенов В. В., Рыжков С. В. // Препринт ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН. — М.: Институт Проблем Механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 2010. № 942. 57 с.
18. Ryzhkov S. V. // Probl. Atom. Sci. Tech. Series: Plasma Electronics and New Methods of Acceleration. 2010. No. 4. P. 105.
19. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V. // Probl. Atom. Sci. Tech. Series: Plasma Physics. 2013. No. 1 (83). P. 12.

## Thermodynamic properties of magnetized plasma evaluated by Thomas-Fermi model

*V. V. Kuzenov, S. V. Ryzhkov, and V. V. Shumaev*

Bauman Moscow State Technical University,  
5/1 2-nd Baumanskaya str., Moscow, 105005, Russia  
E-mail: chubchic@gmail.com

*Received May 15, 2014*

***The aim of this work is to evaluate the thermodynamic and transport properties of magnetized plasma. The Thomas-Fermi model for mixtures at a given temperature and density is used for the mathematical description. We performed calculations for the range of magnetic fields  $B \sim 10^3$ -10 T and shown that the intensity of the magnetic field  $B < 10^7$  Gs only affects the transport properties of the plasma, but does not change the view of the inner shells of atoms and ions. The distributions of Thomas-Fermi potential are obtained for gold plasmas. Pressure isotherms drawn using Thomas-Fermi model.***

PACS: 52.55.Lf, 52.38.Fz, 52.25.Xz, 52.65.-y

**Keywords:** Thomas-Fermi model, magnetized plasma, magnetic field, transport properties, thermodynamics of plasmas.

### References

1. Ya. B. Zeldovich and Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena* (Nauka, Moscow, 1966) [in Russian].
2. S. G. Smirnov and S. A. Kholin, in *Proc. V Intern. Conference «Zababakhinskie Nauchnye Chteniya»* (RFYaTs – VNIITF, 1998) pp. 310—315.
3. Y. Tomishima and K. Yonei, *Progress of Theoretical Physics* **59**, 683 (1978).
4. A. F. Nikiforov, V. G. Novikov, and V. B. Uvarov, *Quantum-Statistical Models of High-Temperature Plasma* (Fizmatlit, Moscow, 2000) [in Russian].
5. A. Y., Potekhin and G. Chabrier, *Astron. Astrophys.* **550**, A43 (2013).
6. M. A. Liberman and B. Iokhanson, *Usp. Phys.* **195**, 121 (1995).
7. A. Yu. Chirkov, *Introduction to Plasma Physics* (Bauman MGTU, Moscow, 2006) [in Russian].
8. I. Yu. Kostyukov and S. V. Ryzhkov, *Prikladnaya Fizika*, No. 1. 65 (2011).
9. V. V. Kuzenov and S. V. Ryzhkov, *Acta Technica.* **56**, T454 (2011).
10. J. P. Knauer, O. V. Gotchev, P. Y. Chang, et al., *Phys. Plasmas* **17**, 056318 (2010).
11. O. V. Gotchev, P. Y. Chang, J. P. Knauer, et al., *Phys. Rev. Lett.* **103**, 215004 (2009).
12. S. Takeyama, in *Proc. 13th Int. Conf. Megagauss Magnetic Field Generation Related Topics.* (Suzhou, China. 2010), p. 59.
13. A. Yu. Chirkov and S. V. Ryzhkov, *J. Fus. Energy* **31** (1), 7 (2012).
14. V. V. Shumaev and S. V. Ryzhkov, *Molodezhnyi Vestnik*, No. 3 (2012).
15. V. V. Shumaev, *Molodezhnyi Vestnik*, No. 2 (2013).
16. S.V. Ryzhkov, A.Yu. Chirkov, and A. A. Ivanov, *Fusion Science and Technology* **63**, 135 (2013).
17. V. V. Kuzenov and S. V. Ryzhkov, Preprint No. 942 (IPM, 2010).
18. S. V. Ryzhkov, *Probl. Atom. Sci. Tech. Series: Plasma Electronics and New Methods of Acceleration*, No. 4, 105 (2010).
19. V. V. Kuzenov and S. V. Ryzhkov, *Probl. Atom. Sci. Tech. Series: Plasma Physics*, No. 1 (83), 12 (2013).