

УДК 533.9, 51-74

## Тестирование отдельных элементов метода расчета физических процессов в мишени магнитно-инерциального термоядерного синтеза

В. В. Кузенов

*В работе построена физико-математическая модель магнитно-инерциального термоядерного синтеза (МИТС), разработан численный метод расчета параметров при имплозии замагниченной мишени, что открывает возможности создания новых плазменных источников высокой плотности для применения их в материаловедческих экспериментах и для перспективных направлений энергетики. Выполнено первоначальное тестирование разработанной численной методики.*

PACS: 52.25.Fi, 52.25.Kn, 52.25.Xz, 52.65.-y

*Ключевые слова:* магнитно-инерциальный термоядерный синтез, лазерный драйвер, неоднородные электрические и магнитные поля, замагниченная плазма.

### Введение

Экспериментальные и теоретические исследования магнитно-инерциального термоядерного синтеза (МИТС) [1—4] и систем магнитного удержания плазмы для него [5—8] в последнее время получили заметное развитие. Этот метод обладает преимуществами обеих концепций управляемого термоядерного синтеза (УТС), а именно, высокие значения плотности энергии инерциального термоядерного синтеза (ИТС) и тепловая изоляция плазмы магнитным полем, типичная для магнитного термоядерного синтеза (МТС). В этом случае в термоядерной плазме высокой плотности, находящейся в сильном «вмороженном» в плазму магнитном поле, практически все вылетающие быстрые заряженные частицы испытывают несколько актов «ядерного» рассеяния и удерживаются сжатым магнитным полем. В результате эти быстрые ионы расходуют свою энергию на разогрев прилегающих областей плазмы, что является одним из необходимых условий для распространения волны горения в среде.

Данная работа посвящена изучению сжатия замагниченной мишени в системах магнитно-инер-

циального термоядерного синтеза [9—17] с разными мощными, эффективными и безопасными источниками нагрева плазмы (драйверами), в первую очередь, лазерными пучками и сверхзвуковыми плазменными струями. Отметим преимущества таких систем: нестационарность обеспечивает невозможность развития неустойчивостей плазмы, что ведёт к существенному уменьшению потерь энергии; высокая степень выгорания термоядерного топлива; снятие проблемы взаимодействия плазмы со стенкой; более простая конструкция системы, чем у стационарных систем УТС.

### Постановка задачи

Система МИТС представляет собой импульсную термоядерную установку, в которой цилиндрически или сферически симметричная термоядерная мишень, помещенная в затравочное (внешнее) магнитное поле, сжимается (вместе с затравочным магнитным потоком) мощными лазерными пучками или всеми видами оболочек, включая газовые, жидкостные и металлические ударники, плазменными лайнерами, образованными слиянием высокоскоростных плазменных струй, и т. д.

На этапе первоначального изучения основных физических закономерностей, присущих МИТС, целесообразно разработать и использовать систему упрощенных одномерных математических моделей. Эта система моделей может описывать физические процессы в лазерном (включая процессы в Hohlraum) или плазменном драйверах,

---

Кузенов Виктор Витальевич, доцент.  
 Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана.  
 Россия, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, стр. 1.  
 Тел. 8 (499) 263-65-70. E-mail: vik.kuzenov@gmail.com

Статья поступила в редакцию 14 марта 2016 г.

а также в сжимаемой термоядерной мишени (включая сжатие первоначального магнитного потока).

Математическая модель, представленная далее, использует многокомпонентные, одномерные уравнения плазмодинамики, уравнение переноса собственного широкополосного излучения, уравнение магнитной индукции, переноса лазерного излучения в приближении геометрической оптики, методы расчета уравнений состояний вещества и коэффициентов поглощения лазерного излучения, определяет условия возникновения и протекания самоподдерживающейся термоядерной реакции синтеза.

Система уравнений плазмодинамики (1) в системе МИТС выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho c_i}{\partial t} + \text{Div}(\rho c_i \vec{V}) = F_{\rho c}, \\
 F_{\rho c} = & -\frac{\rho c_i u (v-1)}{r} + \text{Div}(\rho q_i^D) + \left( \frac{\partial \rho c_i}{\partial t} \right)_x, \quad (1) \\
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div}(\rho u) = F_\rho, \quad F_\rho = -\rho u \frac{(v-1)}{r} \\
 & \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{Div}(\rho u^2 + P^\Sigma) = F_{\rho u} + f_r, \\
 F_{\rho u} = & -\rho u^2 \frac{(v-1)}{r}, \quad f_r = \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{H}]_r, \\
 & \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \text{Div}(\rho E u + P^\Sigma u + q^\Sigma) = F_E + q_r + D_x + Q_{Fus}^e, \\
 F_E = & -(\rho E u + P^\Sigma u) \frac{(v-1)}{r}, \quad P^\Sigma = P_e + P_i, \\
 & \frac{\partial \rho e_e}{\partial t} + \text{Div}(\rho e_e u + P_e u + q + q_e) = F_e + q_r - Q_{ei} + Q_{Fus}^e, \\
 F_e = & -(\rho e_e u + P_e u) \frac{(v-1)}{r}, \\
 & \frac{\partial \rho e_i}{\partial t} + \text{Div}(\rho e_i u + P_i u + q_i) = F_i + Q_{ei}, \\
 F_i = & -(\rho e_i u + P_i u) \frac{(v-1)}{r}, \\
 D_x = & \sum_i h_i \text{Div}(\rho q_i^D), \quad \text{Div}(\ ) = \frac{1}{J} \frac{\partial(J)}{\partial \xi}, \\
 & J = r^{(v-1)},
 \end{aligned}$$

где индекс  $v=(1,2,3)$  отвечает случаям плоской, осевой и сферической симметрии соответственно;  $t$  — время,  $r$  — пространственная координата,  $\rho$  — плотность;  $u$  — скорость движения плазмы вдоль координаты  $r$ ;  $P=P(\rho, \varepsilon)$  — статическое давление,  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия,  $E=(\varepsilon + u^2/2)$  — полная энергия потока газа,

$\vec{F}(F_\rho, F_{\rho u}, F_E)$  — вектор источников,  $j$  — плотность тока,  $q, q_v$  — полный и спектральный поток излучения,  $T_e, T_i$  — температуры электронов и ионов плазмы,  $\nu$  — номер частотной группы,  $\chi_\nu$  — спектральный коэффициент поглощения,  $f_r$  — электромагнитная сила,  $q_r$  — приток энергии от электромагнитного поля,  $q_e = -\lambda_\perp^e \text{grad} T_e$ ,  $q_i = -\lambda_\perp^i \text{grad} T_i$ ,  $q_i^D = -D_\perp^i \text{grad}(c_i)$  — тепловые и диффузионные потоки, возникающие за счет процессов теплопроводности и диффузии,  $\lambda_\perp^e, \lambda_\perp^i$  — коэффициенты теплопроводности электронов и ионов,  $D_\perp^i$  — коэффициент диффузии ионов.

Перенос широкополосного излучения в одномерных задачах МИТС может рассматриваться с помощью многогруппового диффузионного приближения, уравнения которого выглядят следующим образом [26]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r} \frac{d(r^n q_\nu)}{dr} + \chi_\nu c U_\nu = \chi_\nu 4\sigma T^4, \\
 & \frac{c}{3} \frac{dU_\nu}{dr} + \chi_\nu q_\nu = 0, \quad (2) \\
 & q = \sum_\nu^{N_\nu} q_\nu + q_{laz}, \quad q_r = (\vec{j} \cdot \vec{E}), \\
 & q^\Sigma = q + q_e + q_e^h + q_i + q_i^h,
 \end{aligned}$$

где  $q_\nu, U_\nu$  — спектральный поток (в направлении оси  $r$ ) и объемная плотность широкополосного излучения;  $c$  — скорость света,  $n=0$  — плоский слой,  $n=1$  — бесконечный одномерный цилиндр,  $n=2$  — шар. Граничные условия для системы уравнений диффузионного приближения могут быть сформулированы следующим образом: на внешней границе — отсутствие падающего извне излучения; на оси симметрии — условие симметрии.

Уравнения магнитной индукции в случае цилиндрической симметрии (будем в дальнейшем предполагать, что на практике реализуется только компоненты  $B_z \neq 0, E_\varphi \neq 0$  ( $B_\varphi = 0, B_r = 0$ )):

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{1}{\mu J r} \frac{\partial(J r u B_z)}{\partial r} = \frac{c^2}{4\pi \mu J r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{J r}{\sigma} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right).$$

Очевидно, что данная система уравнений должна быть дополнена соответствующими начальными (например: начальное значения напряженности «затравочного» магнитного поля может составлять сотые доли Тл) и краевыми условиями.

Отметим, что для уровней плотности потока лазерного излучения  $q_{laz} \leq (10^{16} \div 10^{19}) \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$  прямое ускорение ионов внутри плазменного лазерного факела не существенно по причине компенсации тока быстрых электронов током проводимости тепловых электронов плазмы.

Следует добавить, что в работе [18] приведены способы расчета:

- энергии, передаваемой в единицу времени в единице объема от электронов к ионам  $Q_{ei}$ ,
- коэффициентов электронной и ионной теплопроводности  $\lambda_{e,i}^{\perp,||}$  в случае замагниченной плазмы,
- оптических  $\chi_i(T, \rho)$  и термодинамических параметров рабочих сред,
- кулоновского логарифма  $\ln \Lambda_{ei}$ , учитывающего взаимодействие электронов и ионов,
- величины  $v_{ii,k}$  — средней частоты ионных столкновений,
- электропроводности плазмы  $\sigma$ ,
- уравнений состояний вещества (основываются на применении понятия среднего заряда) и электронного газа (учитывает его вырождение, а также затраты энергии на ионизацию),
- коэффициентов поглощения лазерного излучения.

### Численный метод расчета параметров плазмы

Несмотря на одномерный характер задачи, она предъявляет повышенные требования к численному методу, используемому при её решении. Прежде всего, расчетная схема должна обладать улучшенными дисперсионными и диссипативными свойствами, быть экономичной и алгоритмически простой, обладать свойством монотонности и аппроксимировать гладкие решения желательно с максимально высоким порядком точности. Этим требованиям удовлетворяет метод численного решения квазиодномерных двухтемпературных одножидкостных уравнений газовой динамики, который опирается на метод дробных шагов, который состоит в данном случае из двух шагов [18]. На первом дробном шаге учитываются газодинамические процессы (этим процессам соответствует «гиперболической» часть рассматриваемой системы уравнений). При этом процессы переноса излучения и электромагнитные процессы, протекающие в устройствах системы МИТС, рассматриваются на втором дробном шаге.

Отметим, что вышеприведенные системы дифференциальных уравнений относительно временной переменной  $t$  есть системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которые могут быть разрешены с помощью векторного варианта многошагового метода Рунге-Кутты (в данной работе использован четырехшаговый вариант метода [18], который обладает 4-м порядком аппроксимации по времени  $t$ ). Для этого приведем векторный вариант системы уравнений Эйлера к нормальной форме с выделенной в левой части временной производной  $\frac{\partial \vec{U}_i}{\partial t}$ :

$$\frac{\partial \vec{U}_i}{\partial t} = L(\vec{U}_i),$$

где  $L$  — правая часть системы уравнений Эйлера, не содержащая производных по времени. В качестве начального приближения используется решение, полученное на предыдущем шаге по времени. Тогда четырехшаговый вариант метода Рунге-Кутты реализуется в виде следующей последовательности шагов:

$$\begin{aligned} \vec{U}_i^{(1)} &= \left[ \vec{U}_i^{(0)} + \frac{\Delta t}{4} L(\vec{U}_i^{(0)}) \right], \\ \vec{U}_i^{(2)} &= \left[ \vec{U}_i^{(0)} + \frac{\Delta t}{3} L(\vec{U}_i^{(1)}) \right], \\ \vec{U}_i^{(3)} &= \left[ \vec{U}_i^{(0)} + \frac{\Delta t}{2} L(\vec{U}_i^{(2)}) \right], \\ \vec{U}_i^{(4)} &= \left[ \vec{U}_i^{(0)} + \Delta t L(\vec{U}_i^{(3)}) \right]. \end{aligned}$$

Известно, что такой способ поиска решения  $\vec{U}_i$  относительно времени  $t$  позволяет решить одну из проблем численного решения уравнений Эйлера, а именно, необходимость обеспечить положительность искомых функций (если в момент времени  $t^n$  решение является положительным, то оно остается положительным и в момент времени  $t^{n+1}$ ).

При численном решении одномерных уравнений газовой динамики часто применяются подвижные сетки, адаптирующиеся к особенностям решения. Такой подход позволяет получать результаты повышенной точности на относительно грубых расчетных сетках. Использование динамически адаптивных сеток приводит к необходимости записать аппроксимируемые уравнения плазмотоники (1) в подвижной системе координат, т. е. осуществить переход от ортогональных координат  $x^\alpha$  к произвольным криволинейным коор-

динатам  $q^\alpha$  с учетом зависимости этого преобразования от времени  $t$ . В этом случае система уравнений Эйлера в произвольных криволинейных координатах  $q^\alpha$  принимает следующий полуди-вергентный вид:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial V_{add}}{\partial q^\alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(J\rho) - V_{add} \frac{\partial}{\partial q^\alpha}(\rho) + \frac{\partial}{\partial q^\alpha}(\rho v^\alpha) = F_\rho \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(J\rho v^i) - V_{add} \frac{\partial}{\partial q^\alpha}(\rho v^i) + \frac{\partial}{\partial q^\alpha}(\rho v^\alpha v^i) + \frac{\partial p}{\partial q^\alpha} = F_{\rho v^i},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(J\rho e) - V_{add} \frac{\partial}{\partial q^\alpha}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial q^\alpha}(\rho v^\alpha e) + P \frac{\partial}{\partial q^\alpha}(v) = F_e,$$

где  $P$ ,  $\rho$ ,  $T$  — давление, плотность и температура,  $e$  — внутренняя энергия газа,  $J = \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\alpha}$  — яко-

биан преобразования  $x^\alpha = f(q^\alpha, t)$ ,  $v^i$  — составляющая вектора скорости,  $V_{add}$  — скорость движения адаптивной системы координат,  $\vec{F}(F_\rho, F_{\rho v^i}, F_e)$  — вектор источников.

Здесь для численной перестройки сетки, адаптирующей к особенностям решения вдоль одной из координатных линий, используется принцип равномерного распределения (метод эквираспределения) весовой функции  $w$ . При этом исходными параметрами при численной перестройке сетки являются максимальный  $\Delta x_{\max}^\alpha$ , минимальный  $\Delta x_{\min}^\alpha$  шаги и некоторая (дополнительно монотонизированная, т. е. имеющая один минимум и максимум) управляющая функция  $f$ . Весовая функция  $w$  в данной работе модифицирована и задается следующим образом:

$$w = \begin{cases} (1 + AF)^{\frac{1}{B}}, & B \neq 0, \\ 1, & B = 0 \end{cases}$$

$$A = (\Delta x_{\max} / \Delta x_{\min})^B - 1,$$

$$F = |f - f_{\min}| / (f_{\max} - f_{\min}).$$

Величина  $B$  определяется из условия того, что минимальный расчетный шаг сетки  $\min_i \Delta x_i^\alpha$  равен заданному минимальному значению  $\Delta x_{\min}^\alpha$  шага. Для определения шагов сетки  $\Delta x_i^\alpha$ , значения которых позволяют найти минимальный расчет-

ный шаг сетки  $\min_i \Delta x_i^\alpha$  на соответствующем временном слое, служит уравнение:

$$\frac{d}{dq^\alpha} \left[ w \frac{dx^\alpha}{dq^\alpha} \right] = 0, \quad x^\alpha(0) = 0,$$

$$x^\alpha(1) = L, \quad q^\alpha \in [0, 1],$$

где  $L$  — длина границы области в физическом пространстве. В случае  $A = 0$  узлы сетки расположены равномерно. Окончательные значения шагов адаптированной расчетной сетки на соответствующем временном слое находят на основе уравнения  $\Delta x_i = L / \left( w_i \sum_{i=1}^N \frac{1}{w_i} \right)$ .

В силу краткости изложения дадим описание только численного метода расчета конвективной части (без слагаемых, связанных с адаптационным движением сетки:  $-V_{add} \frac{\partial}{\partial q^\alpha}(\rho)$ ;

$-V_{add} \frac{\partial}{\partial q^\alpha}(\rho v^i)$ ;  $-V_{add} \frac{\partial}{\partial q^\alpha}(\rho e)$ ) уравнений (3):

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial F(\vec{U})}{\partial \xi} = \vec{F}_2,$$

где  $u_\xi = (u)$ , параметр  $\xi$  может принимать одно из значений набора величин  $(r, z)$ , вектор решения имеет вид  $\vec{U} = (\rho, \rho u_\xi, \rho E)^T$ , вектор потоковой переменной записывается в виде  $F(\vec{U}) = (\rho u_\xi, \rho u_\xi^2 + P, \rho E u_\xi + P u_\xi)^T$ , а вектор правой части представляется следующим образом  $\vec{F}_2 = (F_\rho, F_{\rho v^i}, F_e)^T$ . Здесь применяется нелинейная квазимоноотонная компактно-полиномиальная разностная схема повышенного порядка точности, которая в пространственно гладкой части численного решения позволяет достигнуть 7-й порядок точности:

$$\frac{\partial \vec{U}_i}{\partial t} + \frac{F(\vec{U}_{i+1/2}) - F(\vec{U}_{i-1/2})}{\Delta \xi} = \vec{F}_2,$$

$$\Delta \xi = [\xi_{i-1/2} - \xi_i, \xi_{i+1/2} - \xi_i].$$

Газодинамические параметры  $U_i^{n+1}, U_i^n$  относятся к центрам расчетных ячеек, в то время как потоки  $F_{i\pm 1/2}^n, G_i^n$  необходимо определить на поверхности этих ячеек. При этом для повышения порядка аппроксимации разностной схемы следует

«восстановить» газодинамические параметры  $Y_{i\pm 1/2}^{R,L}, Y_i^{R,L}$  «справа» (индекс —  $R$ ) и «слева» (индекс —  $L$ ) от границ расчетных ячеек. Тогда любая реконструируемая функция  $Y(x), [x = \{\xi\}]$ ,  $\xi \in \left[-\frac{\Delta_\xi}{2}, \frac{\Delta_\xi}{2}\right]$ , представляется кусочно-полиномиальными распределениями вида:

$$Y(\xi) = F_i^n(\xi) = Y_i + \phi(Y_i) \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_i [\xi - \xi_i] + \frac{\phi(Y_i)}{2!} \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i [\xi - \xi_i]^2 + a_i [\xi - \xi_i]^3 + b_i [\xi - \xi_i]^4 + c_i [\xi - \xi_i]^5 + d_i [\xi - \xi_i]^6 + e_i [\xi - \xi_i]^7.$$

Функция  $Y(x)$  удовлетворяет условиям гладкого сопряжения:

$$F_i^n(\xi_{i-1}) = Y_{i-1}^n, \quad F_i^n(\xi_{i+1}) = Y_{i+1}^n,$$

$$\phi(Y_i) \frac{dF_i^n(\xi_{i-1})}{d\xi} = Y_{\xi_{i-1}}^n,$$

$$\phi(Y_i) \frac{dF_i^n(\xi_{i+1})}{d\xi} = Y_{\xi_{i+1}}^n,$$

и консервативности:

$$\frac{1}{\Delta_\xi} \int_{-\frac{\Delta_\xi}{2}}^{+\frac{\Delta_\xi}{2}} Y_i^n(\xi) d\xi = Y(\xi_i).$$

Указанные выше условия гладкого сопряжения можно сформулировать в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$A \bar{Z}_i = \bar{F}_i, \quad \bar{Z}_i = (a_i, b_i, c_i, d_i, e_i)^T,$$

$$\bar{F}_i = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} -\Delta_\xi^3 & \Delta_\xi^4 & -\Delta_\xi^5 & \Delta_\xi^6 & -\Delta_\xi^7 \\ 3\Delta_\xi^2 & -4\Delta_\xi^3 & 5\Delta_\xi^4 & -6\Delta_\xi^5 & 7\Delta_\xi^6 \\ \Delta_\xi^3 & \Delta_\xi^4 & \Delta_\xi^5 & \Delta_\xi^6 & \Delta_\xi^7 \\ 3\Delta_\xi^2 & 4\Delta_\xi^3 & 5\Delta_\xi^4 & 6\Delta_\xi^5 & 7\Delta_\xi^6 \\ 0 & \frac{1}{5} \left( \frac{\Delta_\xi}{2} \right)^5 & 0 & \frac{1}{7} \left( \frac{\Delta_\xi}{2} \right)^7 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_1 = Y_{i-1}^n - Y_i + \phi(Y_i) \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_i \Delta_\xi - \frac{\phi(Y_i)}{2!} \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i \Delta_\xi^2,$$

$$F_2 = Y_{\xi_{i-1}}^n - \phi(Y_i) \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_i + \phi(Y_i) \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i \Delta_\xi,$$

$$F_3 = Y_{i+1}^n - Y_i - \phi(Y_i) \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_i \Delta_\xi - \frac{\phi(Y_i)}{2!} \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i \Delta_\xi^2,$$

$$F_4 = Y_{\xi_{i+1}}^n - \phi(Y_i) \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_i - \phi(Y_i) \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i \Delta_\xi,$$

$$F_5 = -\frac{\phi(Y_i)}{3!} \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i \left[ \frac{\Delta_\xi}{2} \right]^3.$$

В данных условиях матрица  $A$  фиксирована, а значит, фиксирована и обратная матрица  $A^{-1}$  т. е. она может быть найдена до проведения основных расчетов. При этом коэффициенты  $Z_i = (a_i, b_i, c_i, d_i, e_i)^T$   $i$ -ого полинома можно найти из очевидного соотношения  $Z_i = A^{-1} F_i$ .

Входящие в кусочно-полиномиальные распределения  $Y(\xi)$  пространственные производные  $\left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_{i,j}$  вычисляются следующим образом:

сначала для дискретной функции  $Y_i$  определим приближенное значение  $F_i$  первой частной производной по пространственной переменной  $\xi$  с восьмым порядком точности.

Для этого в каждой ячейке с номером  $i$  для каждой восстанавливаемой величины  $Y_{i,j}$  осуществляется расчет (по алгоритму приведенному выше) индекса немонотонности  $Ind(Y)$ :

Далее найдем первую производную  $f$  по переменной  $\xi$  по обычной аппроксимационной формуле второго порядка точности и произведем её «монотонное ограничение» на сетке:

$$\overline{Ind}(Y)_i = 1 \bullet Ind(Y)_i + 2 \bullet [1 - Ind(Y)_i],$$

$$f_i = \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2\Delta_\xi} + O(\Delta_\xi^2),$$

$$\tilde{f}_i = \text{sign}(Y_{i+1} - Y_{i-1}) \min(\overline{Ind}(Y)_{i+2} |f_{i+2}|,$$

$$\overline{Ind}(Y)_{i+1} |f_{i+1}|, |f_i|, \overline{Ind}(Y)_{i-1} |f_{i-1}|,$$

$$\overline{Ind}(Y)_{i-2} |f_{i-2}|),$$

где  $\Delta$  — шаг пространственной сетки в направлении  $\xi$ . Тогда приближенное «монотонизованное»

значение  $\tilde{F}_i$  первой частной производной по пространственным переменным  $\xi$  с ошибкой аппроксимации на уровне  $F_i = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\Delta_\xi^6}{2100} + O(\Delta_\xi^8)$  можно найти по формуле вида (т. е. путем решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей):

$$Q_i = \left( E + \frac{\Delta_2}{30} \right) \tilde{f}_i, \quad \tilde{F}_i = \left\{ \left( E + \frac{\Delta_2}{6} \right)^{-1} Q_i \right\}_i,$$

$$F_i = \text{sign}(Y_{i+1} - Y_{i-1}) \min(\overline{Ind}(Y)_{i+2} |\tilde{F}_{i+2}|, \overline{Ind}(Y)_{i+1} |\tilde{F}_{i+1}|, \overline{Ind}(Y)_{i-1} |\tilde{F}_{i-1}|, \overline{Ind}(Y)_{i-2} |\tilde{F}_{i-2}|),$$

где  $\Delta_0 f_i = f_{i+1} - f_{i-1}$ ,  $\Delta_2 f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$ ,  $E$  — единичный оператор. Данная формула является симметричной конечной разностью шестого порядка точности [18—20].

Это форма расчета первой производной  $F_i$  используется для формирования краевых условий при нахождении приближенного «монотонизованного» значения  $\tilde{F}_i$  первой частной производной по пространственным переменным  $\xi$  с ошибкой аппроксимации на уровне:

$$F_i = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\Delta_\xi^8}{44100} + O(\Delta_\xi^{10}).$$

В этом случае вычисления следует проводить таким образом (на основе решения системы уравнений с пятидиагональной матрицей) [18—20]:

$$Q_i = \left( E + \frac{5\Delta_2}{42} \right) \tilde{f}_i, \quad F_i = \left\{ \left( E + \frac{2\Delta_2}{7} + \frac{\Delta_2^2}{70} \right)^{-1} Q_i \right\}_i.$$

В кусочно-полиномиальных распределениях  $Y(\xi)$  присутствуют пространственные производные второго порядка  $\left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right) = s_i$ , которые обозначаются символом  $s_i$  и вычисляются с восьмым порядком точности [18—20]:

$$\frac{9}{38}(s_{i+1} + s_{i-1}) + s_i = -\frac{751}{342\Delta^2} Y_i + \frac{147}{152\Delta^2} (Y_{i+1} + Y_{i-1}) + \frac{51}{380\Delta^2} (Y_{i+2} + Y_{i-2}) - \frac{23}{6840\Delta^2} (Y_{i+3} + Y_{i-3}).$$

Далее с помощью реконструируемой функции  $Y(\xi)$  «восстанавливаются» газодинамические параметры  $Y_{i\pm 1/2}^{R,L}$ ,  $Y_i^{R,L}$  «справа» (индекс —  $R$ ) и «слева» (индекс —  $L$ ) от границ расчетных ячеек.

Затем проводится «антидиффузионная» коррекция параметров  $Y_{i\pm 1/2}^{R,L}$ ,  $Y_i^{R,L}$  на основе следующего подхода [21]:

$$\hat{Y}_{i+1/2}^L = Y_{i+1/2}^L + \phi_i \min \text{mod} \left\{ \frac{Y_i - Y_{i-1}}{\left( \max_i [V_i + c_{s,i}] \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \right)} + Y_{i-1/2}^L - Y_{i+1/2}^L, Y_{i+1/2}^R - Y_{i+1/2}^L \right\},$$

$$\hat{Y}_{i-1/2}^R = Y_{i-1/2}^R - \phi_i \min \text{mod} \left\{ \frac{Y_i - Y_{i-1}}{\left( \max_i [V_i + c_{s,i}] \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \right)} + Y_{i-1/2}^L - Y_{i+1/2}^L, Y_{i+1/2}^R - Y_{i-1/2}^R \right\},$$

где  $V_i$ ,  $c_{s,i}$  — скорость среды и скорость звука в каждой локальной точке  $x_i$ . Функция  $\min \text{mod}(\ )$  определяется следующим образом:

$$\min \text{mod}(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } ab \leq 0 \\ a, & \text{если } ab > 0, |a| \leq |b| \\ b, & \text{если } ab > 0, |b| > |a| \end{cases}$$

Индикатор разрыва  $\phi_i$  меняется в диапазоне значений от 0 до 1 ( $0 \leq \phi_i \leq 1$ ) и находится следующим образом:

$$\phi_i = \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i},$$

$$\text{где } \beta_i = \left[ \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} + \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_{i+2}} \right]^2, \quad \gamma_i = \frac{|Y_{\max} - Y_{\min}|^2}{\alpha_i},$$

$$Y_{\max} = \max_i [Y_i], \quad Y_{\min} = \min_i [Y_i],$$

$$\alpha_i = (|Y_{i-1} - Y_i| + \varepsilon)^2, \quad \varepsilon \approx 10^{-6}.$$

При этом индикатор разрыва  $\phi_i$  в гладкой области изменения функции  $Y$  имеет порядок  $\phi_i = O(\Delta r^2)$  и близок к 1 вблизи сильных разрывов.

Отметим, что целью антидиффузионной поправки является улучшение разрешения контактных разрывов без ущерба точности и устойчивости исходной компактно-полиномиальной разностной схемы.

Учет изменений газодинамических параметров, связанных с адаптационным движением сетки, в настоящей работе производится с помощью метода интерполяционного профиля (СIP) [22—24]. Численного решения уравнения диффузии магнитного поля и уравнения теплопроводности проводилось с помощью компактной разностной схемы повышенного порядка точности [25]. Метод расчета переноса широкополосного излучения рассматривается на основе многогруппового диффузионного приближения [26]. Шаг по времени  $\Delta t$ , необходимый для интегрирования приведенной выше компактно-полиномиальной разностной схемы, выбирается из условия выполнения критерия устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви.

### Результаты расчета

В качестве одного из тестов для системы МИТС используется одномерный вариант задачи

Римана (при определенных начальных данных, эта задача называется иногда задачей Сода [27] с показателем адиабаты  $\gamma = 1,4$ ).

В соответствии с постановкой задачи Сода [27], область интегрирования есть единичный отрезок  $x \in [0,1]$ , который разделен надвое ( $x_{1/2} = 1/2$ ). В каждой половине отрезка  $x \in [0,1]$  в начальный момент времени  $t = 0$  задаются свои значения плотности  $\rho$  (т. е.  $\rho_1 = 47,334 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ;  $x < 1/2$  и  $\rho_2 = 0,1186 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ;  $x \geq 1/2$ ), давления  $P$  (т. е.  $P_1 = 57$  атм;  $x < 1/2$  и  $P_2 = 0,1$  атм;  $x \geq 1/2$ ), а также скорости  $u = 0$  ( $x \in [0,1]$ ) газа.

Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 1 (точность расчета около одного процента).

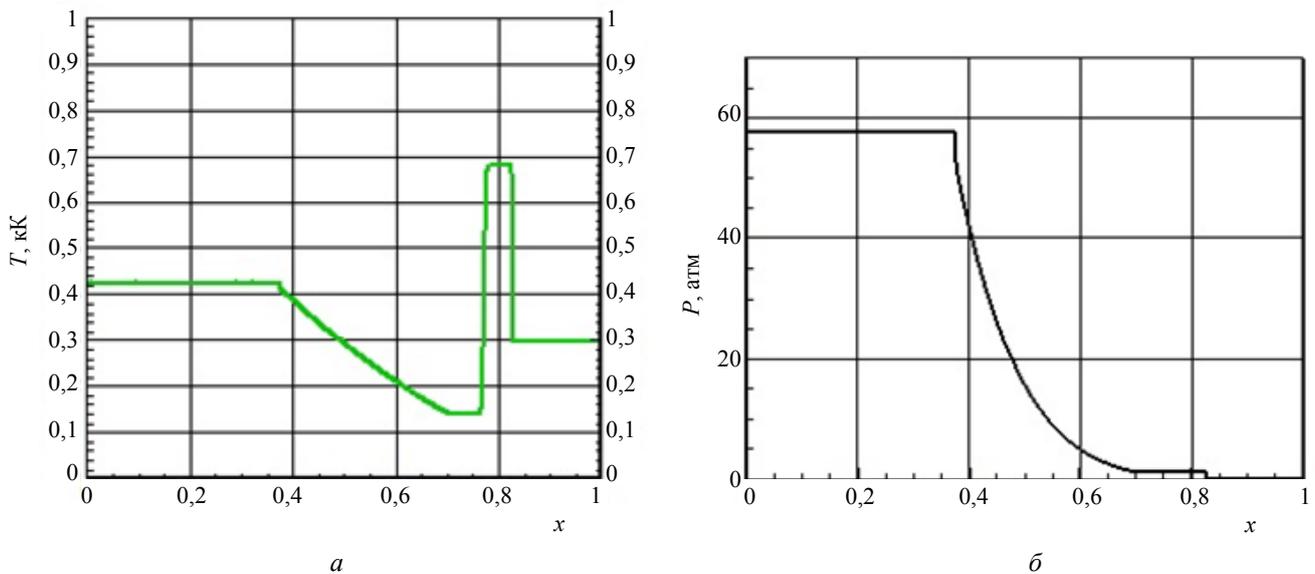


Рис. 1. Результаты расчета одномерной тестовой задачи на момент времени  $t = 0,306 \cdot 10^{-2}$  с: а — пространственное распределение температуры  $T$  (в единицах кК); б — пространственное распределение давления  $P$  (в единицах атм). По горизонтали — отрезок  $x [0,1]$ .

### Заключение

Разработана приближенная (1D) математическая модель физических процессов в системах магнитно-инерциального термоядерного синтеза (МИТС). Для обоснованного количественного анализа решений уравнений системы МИТС выполнено решение ряда тестовых задач.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России № 13.79.2014/К.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Wurden G. A., Hsu S. C., Intrator T. P. et al. // J. Fus. Energy. 2016. Vol. 35. P. 69.
2. Кузенов В. В., Фролко П. А. // Прикладная физика. 2015. № 2. С. 21.
3. Knapp C. E. and Kirkpatrick R. C. // Physics of Plasmas. 2014. Vol. 21. P. 070701.
4. Кузенов В. В., Рыжков С. В. // Прикладная физика. 2014. № 3. С. 26.
5. Wessel F. J., H-Ur-Rahman, Ney P., and Presura R. // IEEE Transactions on Plasma Science. 2015. Vol. 43. P. 2463.
6. Рыжков С. В. // Прикладная физика. 2010. № 1. С. 47.
7. Ромаданов И. В., Рыжков С. В. // Физика плазмы. 2015. Т. 41. С. 884.

8. *Mozgovoy A. G., Romadanov I. V., Ryzhkov S. V.* // Physics of Plasmas. 2014. Vol. 21. P. 022501.
9. *Fiksel G., Agliata A., Barnak D. et al.* // Rev. Sci. Instrum. 2015. Vol. 86. P. 016105.
10. *Рыжков С. В.* // Известия РАН. Сер. физ. 2014. Т. 78. С. 647.
11. *Ryzhkov S. V.* // Sustainable Cities and Society. 2015. Vol. 14. P. 313.
12. *Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V.* // Problems of Atomic Science and Technology. 2013. Vol. 83. P. 12.
13. *Ryzhkov S. V.* // Problems of Atomic Science and Technology. 2010. No. 4. P. 105.
14. *Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V.* // Problems of Atomic Science and Technology. 2013. Vol. 86. P. 103.
15. *Костюков И. Ю., Рыжков С. В.* // Прикладная физика. 2011. № 1. С. 65.
16. *Ryzhkov S. V.* / Proc. 35th EPS Conf. on Plasma Physics and Contr. Fusion. 2008. ECA 32D. P1.114.
17. *Chirkov A. Yu., Ryzhkov S. V.* // J. Fus. Energy. 2012. Vol. 31. No. 1. P. 7.
18. *Кузенов В. В., Рыжков С. В.* Математическая модель взаимодействия лазерных пучков высокой энергии импульса с плазменной мишенью, находящейся в затравочном магнитном поле. (Препринт ИПМех им. А. Ю. Ишлинского РАН № 942, 2010).
19. *Кузенов В. В., Рыжков С. В.* // Известия РАН. Сер. физ. 2016. Т. 80. С. 659.
20. *Кузенов В. В., Лебо И. Г., Лебо А. И., Рыжков С. В.* Физико-математические модели и методы расчета воздействия мощных лазерных и плазменных импульсов на конденсированные и газовые среды. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015.
21. *Z. Xu and C.-W. Shu* // Journal of Computational Mathematics. 2006. Vol. 24. P. 239.
22. *Yabe T., Xiao F., Utsumi T.* // J. Comput. Phys. 2001. Vol. 169. P. 556.
23. *Tanaka R., Nakamura T., Yabe T.* // NIFS. 2001. Vol. 685. P. 1.
24. *Nakamura T., Tanaka R., Yabe T., Takizawa K.* // J. Comput. Phys. Vol. 174. 2001. P. 171.
25. *Толстых А. И.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. — М.: Наука, 1990.
26. *Четверушкин Б. Н.* Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. — М.: Наука, 1985.
27. *Sod G. A.* // Journal of Computational Physics. 1978. Vol. 27. P. 1.

## Testing the individual elements of the method of calculation of physical processes in the target MIF

*V. V. Kuzenov*

Bauman Moscow State Technical University  
Bld. 1, 5 2-nd Baumanskaya Street, Moscow, 105005, Russia  
E-mail: vik.kuzenov@gmail.com

*Received March 14, 2016*

***In the paper, consideration is given to the physical and mathematical model of magneto-inertial fusion (MIF). A numerical method has been developed for calculation of the parameters during the implosion of a magnetized target, allowing the creation of new plasma sources, high density of their application in materials science experiments and promising areas of energy. Initial testing the developed numerical methods has been made. This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, Project No. 13.79.2014/K.***

PACS: 52.55.Lf, 52.38.Fz, 52.25.Xz, 52.65.-y

***Keywords:*** magnetic inertial confinement fusion, laser driver, inhomogeneous electric and magnetic fields, magnetized plasma.

### REFERENCES

1. G. A. Wurden, S. C. Hsu, T. P. Intrator, et. al., J. Fus. Energy **35**, 69 (2016).
2. V. V. Kuzenov and P. A. Frolko, Prikladnaya Fizika, No. 2, 21 (2015).
3. C. E. Knapp and R. C. Kirkpatrick, Physics of Plasmas **21**, 070701 (2014).
4. V. V. Kuzenov and S. V. Ryzhkov, Applied Physics, No. 3, 26 (2014).
5. F. J. Wessel, H.-Ur-Rahman, P. Ney, and R. Presura, IEEE Transactions on Plasma Science **43**, 2463 (2015).
6. S. V. Ryzhkov // Plasma Physics Reports. **37**, 1075 (2011).

7. I. V. Romadanov and S. V. Ryzhkov, *Plasma Phys. Rep.* **41**, 884 (2015).
8. A. G. Mozgovoy, I. V. Romadanov, and S. V. Ryzhkov, *Physics of Plasmas* **21**, 022501 (2014).
9. G. Fiksel, A. Agliata, D. Barnak, et al., *Rev. Sci. Instrum.* **86**, 016105 (2015).
10. S. V. Ryzhkov, *Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys.* **78**, 647 (2014).
11. S. V. Ryzhkov, *Sustainable Cities and Society* **14**, 313 (2015).
12. V. V. Kuzenov and S. V. Ryzhkov, *Problems of Atomic Science and Technology* **83**, 12 (2013).
13. S. V. Ryzhkov, *Problems of Atomic Science and Technology*, No. 4, 105 (2010).
14. V. V. Kuzenov and S. V. Ryzhkov, *Problems of Atomic Science and Technology* **86**, 103 (2013).
15. I. Yu. Kostyukov, S. V. Ryzhkov, *Plasma Phys. Rep.* **37**, 1092 (2011).
16. S. V. Ryzhkov, in *Proc. 35th EPS Conf. on Plasma Physics and Contr. Fusion.* (2008. ECA 32D). P1.114.
17. A. Yu. Chirkov and S. V. Ryzhkov, *J. Fus. Energy* **31** (1), 7 (2012).
18. V. V. Kuzenov and S. V. Ryzhkov, Preprint No. 942, 2010 (IPM RAN) [in Russian].
19. V. V. Kuzenov and S. V. Ryzhkov, *Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys.* **80**, 598 (2016).
20. V. V. Kuzenov, I. G. Lebo, and S. V. Ryzhkov, *Physical and Mathematical Models and Methods of Calculation of Action of Power Laser and Plasma Pulses on Condense and Gas Media* (Bauman MGTU, Moscow, 2015) [in Russian].
21. Z. Xu and C.-W. Shu, *Journal of Computational Mathematics* **24**, 239 (2006).
22. T. Yabe, F. Xiao, and T. Utsumi, *J. Comput. Phys.* Vol. **169**, 556 (2001).
23. R. Tanaka, T. Nakamura, and T. Yabe, *NIFS* **685**, 1 (2001).
24. T. Nakamura, R. Tanaka, T. Yabe, and K. Takizawa, *J. Comput. Phys.* **174**, 171 (2001).
25. A. I. Tolstykh, *Compact Difference Schemes and Its Application in Aerohydrodynamics* (Nauka, Moscow, 1990) [in Russian].
26. B. N. Chetverushkin, *Mathematical Modeling of Dynamics of Radiation Gas* (Nauka, Moscow, 1985) [in Russian].
27. G. A. Sod, *Journal of Computational Physics* **27**, 1 (1978).