

УДК 621.385, 533.933, 519.63

PACS: 52.65.-y, 84.47.+w, 41.75.Fr

Построение ВАХ вакуумного диода на основе численного решения уравнения Власова–Пуассона

И. В. Куликова

В работе представлена апробация численного метода решения уравнений Власова–Пуассона на примере построения ВАХ плоского вакуумного диода с тепловым разбросом носителей заряда по скоростям.

В инженерной практике проектирования электронных пушек для импульсных электровакуумных приборов СВЧ необходимо с высокой точностью определять напряжения запирающие. Используемая в оптимизационных расчётах модель эмиттера, основана на представлении эмиссионной поверхности множеством плоских диодов с бесконечной эмиссионной способностью. Каждый плоский диод описывается законом степени $3/2$, что приводит к завышению значения напряжения запирающей пушки, поскольку не учитывается тепловой разброс электронов по скоростям.

Использование кинетического уравнения для моделирования транспорта носителей заряда в прикатодной области электронной пушки повышает точность определения формы потенциального барьера, обусловленного пространственным зарядом электронного потока в широком диапазоне приложенных напряжений. В отличие от стационарного метода крупных частиц, используемого в оптимизационных расчётах электронных пушек, кинетическое уравнение позволяет моделировать процесс отражения электронов от потенциального барьера и не требует применения интерполяции для расчета плотностей тока и заряда.

Уравнения Власова–Пуассона было решено методом контрольных объёмов.

Ключевые слова: уравнение Власова–Пуассона, метод контрольных объёмов, ВАХ вакуумного диода.

Ссылка: Куликова И. В. // Прикладная физика. 2020. № 2. С. 27.

Reference: I. V. Kulikova, Applied Physics, No. 2, 27 (2020).

Введение

В настоящее время для моделирования ЭОС применяют программные комплексы, построенные на методе крупных частиц. Существуют как коммерческие пакеты [1], так и пакеты, разработанные в компаниях, выпускающих электровакуумные приборы [2–5].

Метод крупных частиц разрабатывается с 60-х годов прошлого столетия [4, 6]. Тем не менее он обладает рядом недостатков, а именно [7, 8]:

– данный метод применяют зачастую на структурированных сетках, поскольку на неструктурированных сетках процедура расчета плотности заряда и плотности тока усложняется и требует значительного расчетного времени;

– для расчета плотности тока и заряда необходимо большое количество частиц и соответственно рассчитанных траекторий, которые занимают приличный объем памяти, кроме того серьезной задачей является распределение объемного заряда, вносимого пучком траекторий, по сетке.

Куликова Ирина Владимировна, вед. инженер, к.т.н.
АО «НПП «Исток» им. Шокина».
Россия, 141190, г. Фрязино, Московская обл., Вокзальная ул., 2а, корп. 1.
E-mail: cuttlefish99@mail.ru

Статья поступила в редакцию 21 февраля 2020 г.

© Куликова И. В., 2020

Отдельно стоит отметить применяемые в данном методе модели эмиттеров. В оптимизационных расчётах на этапе проектирования ЭОС используют модель Чайлда–Ленгмюра или закон степени трех вторых, которая описывает эмиттер с бесконечной эмиссионной способностью. Ограничение эмиссии электронов обеспечивается пространственным зарядом электронного потока в статическом режиме работы [9, 10] и описывается следующим выражением:

$$j = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{2\eta} \frac{U^{3/2}}{d^2} \quad (1)$$

где j – плотность тока; ε_0 – электрическая постоянная; $\eta = q_e/m_e$ – отношение заряда к массе для электрона; U – потенциал; d – некоторое пробное расстояние, отсчитываемое от эмиттирующей поверхности катода по нормали к поверхности (sampling distance).

При выводе выражения (1), описывающего ВАХ плоского диода с расстоянием катод–анод равным d , были введены следующие допущения: нулевые начальные скорости электронов на поверхности и нулевое значение потенциала эмиттера, т. е. провисание потенциала ниже нуля возле катода при расчете траекторий движения электронов не учитывалось. Эти допущения приемлемы для большинства режимов работы ЭОС, поскольку величина провисания обычно не превышает единицу вольта даже при плотности тока порядка 100 А/см^2 , а расстояние, на котором находится максимум потенциального барьера не превышает десятки микрон. Однако, при моделировании процесса запираания электронных пушек модель Чайлда–Ленгмюра даёт несколько заниженные значения запирающего напряжения, которое является одним из важнейших параметров ЭОС импульсных ЭВП. Кроме того, вопрос об адекватном выборе параметра d не имеет однозначного решения.

Таким образом, разработка модели плоского диода, позволяющей определять положение максимума потенциального барьера с учётом теплового разброса электронов по скоростям во всём диапазоне ускоряющих напряжений, является актуальной задачей, поскольку такая модель может быть использована для повышения точности расчёта запирающих напряжений и уточнения параметра d в упрощённой модели (1).

Математическая постановка

Электронный поток является однокомпонентной холодной плазмой, процессы в которой удобно описывать кинетическим уравнением Власова. Основное преимущество метода А. А. Власова его простота и возможность описывать частицы протяженной функцией в пространстве координат и скоростей [11, 12].

Уравнения, описывающие бесстолкновительное поведение электронного газа в вакууме с учетом дальних взаимодействий, которыми являются кулоновские, представлены ниже [11]:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{q_e}{m_e} \vec{E} + \vec{v} \times \vec{H} \times \mu_0 \times \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0, \\ \Delta\varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \vec{E} &= -\nabla\varphi, \\ \rho &= q_e n, \\ n &= \int f d\vec{v}, \\ \vec{J} &= q_e \int f \vec{v} d\vec{v} \end{aligned} \quad (2)$$

где $f = f(\vec{v}, \vec{r}, t)$ – функция распределения; t – время; \vec{v} – скорость; \vec{r} – радиус-вектор; \vec{E} – напряженность электрического поля; \vec{H} – напряженность магнитного поля; μ_0 – магнитная постоянная; φ – потенциал; ρ – объемная плотность заряда; n – концентрация; \vec{J} – плотность тока.

Кроме расчета распределения заряда, потенциала и электрического поля, которые в литературе зачастую приводятся в качественном виде [10, 13], в настоящей работе решается задача количественного расчета ВАХ диода. ВАХ, в отличие от распределения объёмной плотности заряда и электростатического потенциала, показывает, что предложенная модель работает во всём диапазоне ускоряющих напряжений.

Для одномерного случая без магнитного поля система уравнений (2) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{q_e}{m_e} E \times \frac{\partial f}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ E &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \rho &= q_e n, \\ n &= \int f dv, \\ j &= q_e \int f v dv. \end{aligned} \quad (3)$$

Для первых двух уравнений необходимы граничные условия. Для уравнения Пуассона на катоде задавался нулевой потенциал, а на аноде напряжение:

$$\begin{aligned} \varphi \quad x=0 &= 0, \\ \varphi \quad x=x_{\max} &= U. \end{aligned} \quad (4)$$

Для уравнения Власова в фазовом пространстве координат и скорости граничные условия будут следующие:

$$\begin{aligned} f \quad x=0, v \geq 0 &= f_0 \quad v \geq 0, \\ f \quad x=x_{\max}, v < 0 &= 0, \\ f \quad x=0 \dots x_{\max}, v = +\infty &= 0, \\ f \quad x=0 \dots x_{\max}, v = -\infty &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Функция распределения f_0 может быть получена из функции Максвелла–Больцмана либо Ферми–Дирака, описывающих плотность вероятности распределения электронов по энергиям. Условием нормировки для функции f_0 на эмиттере будет являться равенство интеграла $\int f_0 v dv$ плотности тока насыщения, определяемой по формуле Ричардсона–Дешмана. Неравенство нулю функции распределения на катоде в области положительных скоростей описывает эмиссию электронов, в то же время равенство нулю функции распределения на аноде говорит об отсутствии эмиссии.

В работе [14] было проведено сравнение экспериментальных данных распределения электронов по энергиям с распределением Максвелла–Больцмана и Ферми–Дирака. В ней предлагают использовать функцию Ферми–Дирака, как наиболее близкую к экспериментальным данным [14]:

$$F_{FD} \quad E = C_{Norm} \frac{\sqrt{E}}{\exp\left(\frac{E - E_f}{kT}\right) + 1}, \quad (6)$$

где $E_f = 0,55 \pm 0,6$ эВ – энергия Ферми; k – постоянная Больцмана; T – температура катода.

Для представления зависимости функции распределения (f_0) на катоде от скорости подставим в (6) выражение для кинетической энергии с учетом того, что скорости положительные, и перенесём все постоянные в коэффициент C_{Norm} , получим:

$$f_0 \quad v \geq 0 = C_{Norm} \frac{v}{\exp\left(\frac{1}{kT} \left(\frac{mv^2}{2} - E_f\right)\right) + 1}. \quad (7)$$

Плотность тока насыщения рассчитаем по выражению Ричардсона–Дешмана:

$$\begin{aligned} j &= AT^2 \exp\left(-\frac{q_e \varphi_{out}}{kT}\right), \\ A &= \frac{4\pi m_e k^2 q_e}{h^3}, \end{aligned} \quad (8)$$

где A – термоэлектрическая постоянная; h – постоянная планка; $q_e \varphi_{out}$ – работа выхода электронов.

Зная значение плотности тока насыщения, можно рассчитать коэффициент C_{Norm} и получить граничное условие для уравнения Власова на катоде для положительных значений скорости.

Алгоритмы и реализация

Система уравнений (3) с соответствующими граничными условиями (4)–(5) была решена численно, итерационным методом [15].

Для численного решения уравнения Власова была применена схема расщепления [15]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \eta E \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + \eta E \frac{\partial f_2}{\partial v} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где f_1, f_2 – вспомогательные функции на текущем шаге интегрирования по времени, удовлетворяющие условию:

$$\begin{aligned} f_1^i &= f^i, \\ f_2^i &= f_1^{i+1}, \\ f^{i+1} &= f_2^{i+1}, \end{aligned}$$

где i – шаги по времени.

Уравнения (9) представляют собой два уравнения переноса. Для их численного решения была использована схема «MUSCL-CUS» с функцией ограничителем «Superbee» [16].

Начальные условия для функции распределения:

$$f|_{t=0, x, v} = 0. \quad (10)$$

Итерационный алгоритм для решения системы (3) был следующим:

- 1) Расчет функции f_1 .
- 2) Расчет концентрации n , объемной плотности заряда ρ по соответствующим выражениям.
- 3) Расчет потенциала ϕ и напряженности электрического поля E .
- 4) Расчет функции f_2 .
- 5) Расчет невязки ξ .

Отдельно стоит остановиться на невязке. В методе крупных частиц обычно для расчета невязки используют распределение потенциала. Первоначально было принято решение использовать также потенциал. Однако в методике используется нестационарное уравнение Власова и расчет необходимо продолжать пока переходные процессы не прекратятся. Установление тока представляет собой колебательный процесс с постепенным затуханием. Важно, что распределение потенциала не сильно меняется от одного момента времени к другому, в то время как ток изменяется заметно и «стационарная» ВАХ диода, посчитанная

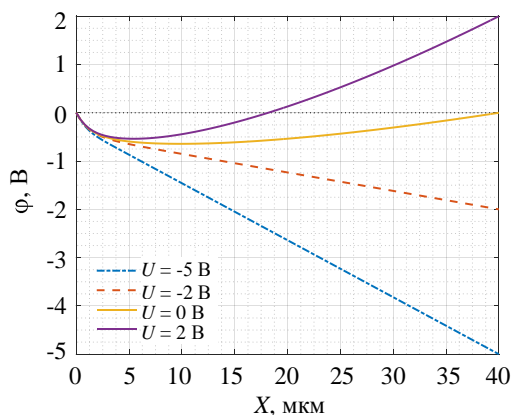


Рис. 2. Распределение потенциала при различных значениях напряжения на аноде.

с использованием невязки по потенциалу, выглядела негладкой, поскольку рассчитанный ток относился к разным моментам времени переходного процесса. Поэтому было принято решение для расчета невязки при моделировании стационарного режима использовать плотность тока. Этот подход дал хороший результат (рис. 1). На рис. 1 представлены ВАХ одномерного вакуумного диода, рассчитанные с учетом теплового разброса скоростей, рассчитанного по распределению Максвелла–Больцмана и Ферми–Дирака, а также ВАХ, рассчитанная по закону 3/2, в котором тепловой разброс скоростей электронов и ограничение по току не учитываются.

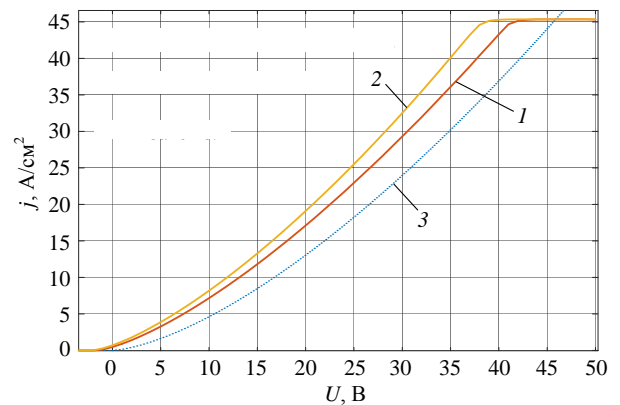
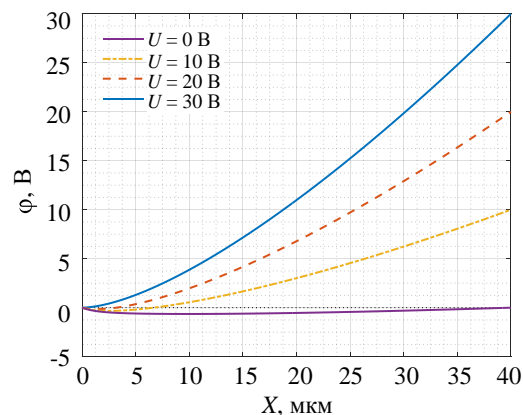


Рис. 1. ВАХ вакуумного диода. 1 – расп. Максвелла–Больцмана; 2 – расп. Ферми–Дирака; 3 – закон 3/2.

На рис. 2–4 представлены результаты моделирования для вакуумного одномерного диода со следующими характеристиками: длина 40 мкм, $T = 1323$ К, $\phi_{out} = 1,8$ В.

Форма провисания потенциала хорошо согласуется с результатами, приведенными в работах [10, 11]. На рис. 4 представлена функция распределения в фазовом пространстве при различных напряжениях на аноде.



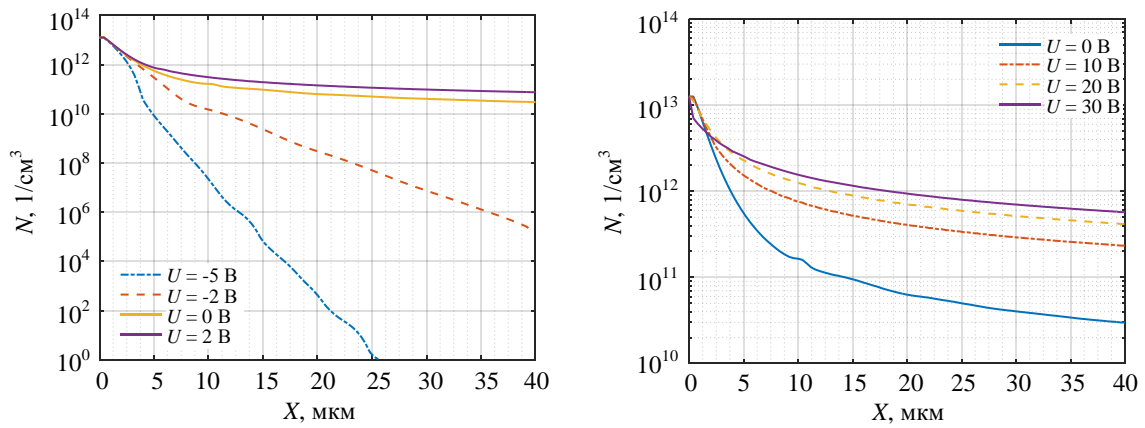


Рис. 3. Распределение концентрации электронов в диоде при различных значениях напряжения на аноде. Графики построены в полулогарифмическом масштабе.

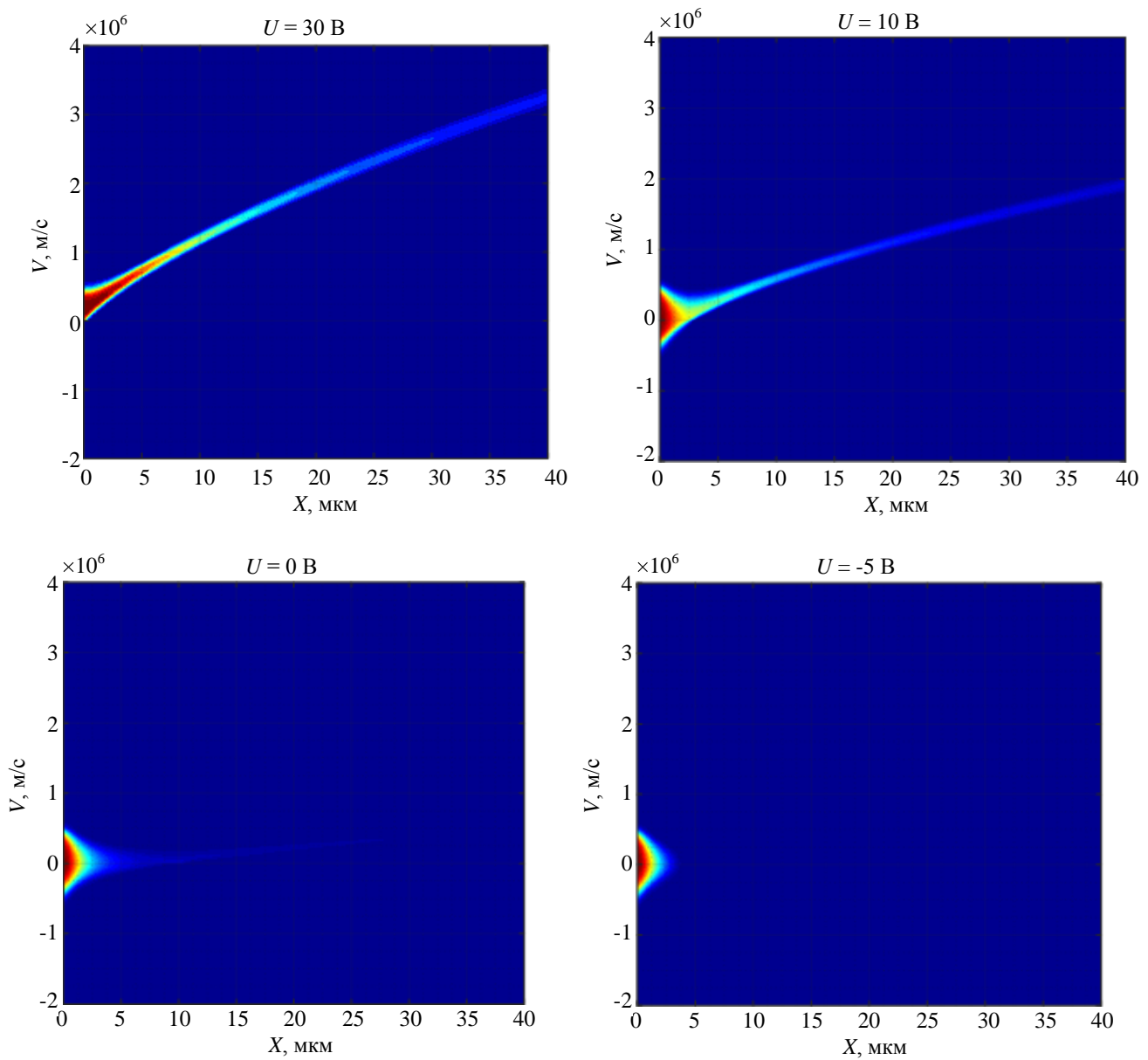


Рис. 4. Функция распределения электронов в фазовом пространстве при различных значениях напряжения на аноде.

Заключение

Разработанная методика дает хорошие результаты во всем диапазоне напряжений и позволяет моделировать поведение электронного пучка в любом режиме работы от запирающего до режима насыщения. Расчет невязки по плотности тока позволяет не только наиболее точно рассчитать плотность тока и потенциал, но и построить «стационарную» ВАХ диода.

В разработанном подходе нет необходимости рассчитывать траектории и для расчета плотности заряда и тока использовать различные методы интерполяции и пересчета тока траекторий в пространственные функции распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. <https://3ds.com>
2. Журавлева В. Д., Семенов С. О. // Прикладная физика. 2006. № 3. С. 97.
3. Семенов С. О. // Прикладная физика. 2010. № 3. С. 96.
4. Голеницкий И. И., Куцевская Т. П., Румянцев С. А. // Электронная техника. Сер. 1. СВЧ-Техника. 2001. Вып. 2 (478). С. 65.
5. Petillo John, Eppley Kenneth, Panagos Dimitrios, Blanchard Paul, Nelson Eric, Dionne Norman, DeFord John, Held Ben, Chernyakova Liya, Krueger Warren, Humphries Stanley, McClure Thomas, Mondelli Alfred, Burdette James, Cattellino Mark, True Richard, Nguyen Khanh T., Levush Baruch // IEEE Transactions on plasma science. June 2002. Vol. 30. No. 3.
6. Численные методы решения задач электронной оптики. Сборник научных трудов / Под ред. В. П. Ильина. Академия наук СССР Сибирское отделение. Вычислительный центр. Новосибирск 1979. – 146 с.
7. Kozevnikov V. Yu., Kozыrev A. V., Semeniuk N. S. Kinetic Modelling of the one-dimensional planar virtual cathode oscillator // 2016, 24th Telecommunications Forum (TELFOR). doi: 10.1109/TELFOR.2016.7818844
8. Козырев А. Н., Свеишиков В. М. // Прикладная физика. 2018. № 1. С. 30.
9. Алямовский И. В. Электронные пуски и электронные пушки. – М.: Изд-во «Советское радио», 1966.
10. Langmuir Irving. The effect of space charge and initial velocities on the potential distribution and thermionic current between parallel plane electrodes // Phys. Rev. April 1923. Vol. 21. No. 4. P. 419. doi 10.1103/PhysRev.21.419
11. Власов А. А. Теория многих частиц. – М.: Изд-во «Государственное издательство технико-теоретической литературы», 1950.
12. Vogman Genia, Colella Philip, Shumlak Uri. (2014). High-order continuum kinetic method for modeling plasma dynamics in phase space. AIP Conference Proceedings. 2014. Vol. 1639. P. 146–149. doi: 10.1063/1.4904797.
13. Кузнецов В. И., Эндер Ф. Я. // Журнал технической физики. 2013. Т. 83. Вып. 12. С. 1.
14. Azooz A. A. An experiment on thermionic emission: back to the good old triode // European Journal of Physics. 2007. Vol. 28. P. 635. doi: 10.1088/0143-0807/28/4/002.
15. Цветков И. В. Применение численных методов для моделирования процессов в плазме: учебное пособие МИФИ. Изд-во «Гривант» г. Троицк, 2007.
16. Костюшин К. В., Шувариков В. А. Сравнение схем типа «MUSCL» для расчета течений идеального газа в соплах Лавала // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 54. doi: 10.17223/19988621/54/7

PACS: 52.65.-y, 84.47.+w, 41.75.Fr

Vacuum tube diode CVC computation by numerical solution of the Vlasov–Poisson equation

I. V. Kulikova

JSC "RPC "Istok" named after Shokin"

2A, Vokzalnaya st., Fryazino, Moscow Region, 141190, Russia

E-mail: cuttlefish99@mail.ru

Received February 21, 2020

In this paper we explore current-voltage characteristic of the vacuum tube diode by numerical simulation Vlasov–Poisson equation, taking into account the thermal distribution of electron speeds.

Vlasov equation is good describing time evolution of the distribution function of electron gas with long-range interaction in vacuum tube. So we can describe motion of electrons reflected

by space charge potential barrier, unlike steady-state particle-in-cell methods used in engineering practice.

When designing electron guns for pulse vacuum electron devices we need to predict their cut-off voltages with high accuracy. Emitter model used in optimization calculations is based on representation of the emission surface by set of flat diodes with infinite emissivity confined by space charge. These diodes are described by Child–Langmuir law, which overstates cut-off voltages. It happens because of thermal distribution of electron speeds is neglected.

Vlasov–Poisson equations used for electron transport simulation increase computation accuracy of the potential barrier shape in broad anode voltage range.

Keywords: the Vlasov–Poisson equation, the finite volume method, CVC of vacuum tube diode.

REFERENCES

1. <https://3ds.com>
2. V. D. Zhuravleva and S. O. Semenov, Plasma Physics Reports, No. 3, 97 (2006).
3. S. O. Semenov, Plasma Physics Reports, No. 3, 96 (2010).
4. I. I. Golenitsky, T. P. Kusschevskaya, and C. A. Rumjantsev, Elektronnaya tekhnika (Electronic Engineering). Series 1. SVCH-tehnika (Microwave Engineering), No. 2 (478), 65 (2001).
5. John Petillo, Kenneth Eppley, Dimitrios Panagos, Paul Blanchard, Eric Nelson, Norman Dionne, John DeFord, Ben Held, Liya Chernyakova, Warren Krueger, Stanley Humphries, Thomas McClure, Alfred Mondelli, James Burdette, Mark Cattelino, Richard True, Khanh T. Nguyen, and Baruch Levush, IEEE Transactions on plasma science **30** (3), (June 2002).
6. Numerical methods for solving problems of electronic optics. Collection of proceedings. Edited by V. P. Ilyina. USSR Academy of Sciences Siberian Branch. Computing Center (Novosibirsk, 1979) [in Russian].
7. Vasily Yu. Kozevnikov, Andrey V. Kozyrev, and Natalia S. Semeniuk. Kinetic Modelling of the one-dimensional planar virtual cathode oscillator / 2016, 24th Telecommunications Forum (TELFOR). doi: 10.1109/TELFOR.2016.7818844
8. A. N. Kozyrev and V. M. Sveshnikov, Plasma Physics Reports, No. 1, 30 (2018).
9. I. V. Alyamovsky, *Electron beams and electron guns* (Publishing House «Sovetskoye radio». M., 1966).
10. Irving Langmuir, The effect of space charge and initial velocities on the potential distribution and thermionic current between parallel plane electrodes, Phys. Rev. **21** (4), 419 (April 1923). doi 10.1103/PhysRev.21.419
11. A. A. Vlasov, *Many-Particle Theory* (Publishing house «State publishing house of technical and theoretical literature» M., 1950).
12. Genia Vogman, Philip Colella, and Uri Shumlak, (2014). High-order continuum kinetic method for modeling plasma dynamics in phase space. AIP Conference Proceedings **1639**, 146–149 (2014). doi: 10.1063/1.4904797.
13. V. I. Kuznetsov and A. Y. Ender, Technical Physics **58** (12), 1705 (2013).
14. A. A. Azooz, An experiment on thermionic emission: back to the good old triode. European Journal of Physics, **28**, 635 (2007). doi: 10.1088/0143-0807/28/4/002.
15. I. V. Tsvetkov, *Application of numerical methods for modeling plasma Textbook MEPHI*. (Publishing house «Trovan», Troitsk, 2007).
16. K. V. Kostyushin and V. A. Shuvarikov, Comparison of the MUSCL-type schemes for a gas flow calculation in de Laval nozzles. Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics, 2018. № 54. doi: 10.17223/19988621/54/7