

УДК 533.9.02

PACS: 52.40.Hf

DOI: 10.51368/1996-0948-2023-5-5-14

EDN: AXQOEC



## Обобщенная формула для расчета электрического поля на поверхности электрода в плазме

В. А. Иванов, М. Е. Коньжев, Т. И. Камолова, А. А. Дорофеюк

*На поверхности металлического электрода, погруженного в плазму с электронной температурой  $T_e \sim 10$  эВ и плотностью плазмы  $n_e$  от  $10^{10}$  см $^{-3}$  до  $10^{13}$  см $^{-3}$  рассчитывается электрическое поле при значениях отрицательного электрического потенциала  $\Psi_0$  электрода при больших значениях параметра  $|e\Psi_0/T_e| \gg 1$ . Полученная асимптотическая формула для величины поля при  $|e\Psi_0/T_e| \gg 1$  существенно отличается от классических формул расчета электрического поля и дебаевской длины экранирования поля вблизи поверхности электрода в плазме, которые справедливы при условии  $|e\Psi_0/T_e| \ll 1$ . Показано, что при  $|e\Psi_0/T_e| \gg 1$  вблизи электрода в плазме модифицированный дебаевский слой может на два порядка превышать классическую дебаевскую длину. Для расчета электрического поля на поверхности электрода в плазме предложена в явном виде обобщенная формула, справедливая в широком диапазоне значений параметра  $0 < |e\Psi_0/T_e| < 10^4$  при отрицательных значениях потенциала электрода до 10 кВ.*

**Ключевые слова:** плазма, электрод, отрицательный потенциал, уравнение Пуассона, электрическое поле, модифицированная длина Дебая, обобщенная формула для расчета электрического поля на поверхности электрода в плазме.

### 1. Введение

Хорошо известно, что электрическое поле, возникающее вблизи погруженного в плазму металлического электрода, играет существенно роль в развитии многих явлений, определяющих характер взаимодействия заряженных частиц плазмы с поверхностью металлов [1, 2].

Особенно это взаимодействие важно при возникновении сильных электрических полей, при этом на поверхности металлического электрода в плазме, газе и в вакууме могут развиваться такие процессы как автоэлектронная эмиссия и взрывная электронная эмиссия [3, 4]. В вакуумном дуговом разряде на металле [5] электрическое поле играет существенную роль в формировании эмиссии электронов из катодных пятен, в установлении баланса токов в плазме катодного пятна, а также определяет процессы разогрева, плавления и испарения металла в катодных пятнах [6]. В тлеющем разряде электрическое поле на катоде определяет явление ионно-электронной эмиссии с его поверхности [2]. Сильное электрическое поле на поверхности погруженного в разреженный газ и плазму электрода инициирует такие явления, как искровой, стримерный, дуговой и микроплазменный разряды [7, 8]. В ряде случаев установлено, что наличие на поверхности металла естественных или

Иванов Вячеслав Алексеевич, гл.н.с., к.ф.-м.н.

E-mail: ivanov@fpl.gpi.ru

Коньжев Михаил Евгеньевич, н.с.

Камолова Татьяна Ивановна, н.с., к.т.н.

Дорофеюк Анна Александровна, н.с., к.т.н.

Институт общей физики им. А. М. Прохорова

Российской академии наук.

Россия, 119991, Москва, ул. Вавилова, 38.

Статья поступила в редакцию 31.08.2023

После доработки 26.09.2023

Принята к публикации 4.10.2023

© Иванов В. А., Коньжев М. Е., Камолова Т. И.,  
Дорофеюк А. А., 2023

нанесенных диэлектрических пленок, а также диэлектрических микровключений, существенно влияет на величину сильного электрического поля, возникающего на поверхности металла в плазме [9–11]. При этом возбуждаемые сильными электрическими полями явления приводят к изменению структуры и свойств поверхностных слоев металлов, которые могут найти применение как в различных отраслях промышленности, так и в медицине [12–14]. Для практических приложений важно разработать методы модифицирования с помощью плазмы приповерхностного слоя металлов для формирования полезных свойств обрабатываемых металлических изделий [14, 16, 17], а также для предотвращения многих нежелательных явлений эрозии металлов, включая разрушения стенок термоядерных установок [18–20].

Цель работы состояла в получении обобщенной физической формулы для расчета электрического поля, возникающего на поверхности металлического электрода, погруженного в полностью ионизованную плазму с электронной температурой  $T_e \sim 10$  эВ и находящегося как при малых, так и при больших значениях отрицательного потенциала  $\Psi_0$  в интервале значений от  $0 < \Psi_0 < 10$  кВ, что соответствует значениям безразмерного параметра  $e\Psi_0/T_e$  интервале от 0 до  $10^3$  (здесь и далее символ  $e$  – это величина заряда электрона или однозарядного иона плазмы). При этом в расчетах будем считать, что на поверхности электрода отсутствуют диэлектрические пленки и микровключения, что будет рассмотрено в отдельной публикации.

## 2. Электрическое поле в плазме вблизи металлического электрода при $|e\Psi_0|/T_e \ll 1$

В классической литературе [21–23] приводятся расчеты распределения электрического поля вблизи плоского электрода (при его отрицательном потенциале  $\Psi_0$ ), погруженного в однородную полностью ионизованную плазму с электронной температурой  $T_e$ , которая существенно превышает ионную температуру  $T_i$  при значениях характерного параметра  $\frac{e\Psi_0}{T_e} \ll 1$ . В условиях одномерного приближения вблизи погруженного в плазму электрода

пространственные распределения потенциала  $\Psi(x)$ , электрического поля  $E(x)$  и плотности электронов  $n_e(x)$  и ионов  $n_i(x)$  плазмы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} E(x) &= -\frac{d\Psi(x)}{dx}; & \operatorname{div} E(x) &= 4\pi\rho(x); \\ \operatorname{div}\left[-\frac{d\Psi(x)}{dx}\right] &= -\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = & & \\ &= 4\pi\rho(x) = 4\pi e[n_i(x) - n_e(x)] & (1) & \\ \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} &= -4\pi e[n_i(x) - n_e(x)], & & \end{aligned}$$

где  $\rho = e[n_i(x) - n_e(x)]$  – плотность некомпенсированных зарядов в слое плазмы вблизи электрода. Уравнение (1) – это известное уравнение Пуассона для пространственного распределения электрического потенциала вблизи электрода в плазме. Вдали от электрода в невозмущенной плазме, где плотности ионов и электронов равны  $n_i(x \rightarrow \infty) = n_e(x \rightarrow \infty) = n_0$ , величина потенциала принимается равной нулю  $\Psi(x \rightarrow \infty) = 0$ . Далее под  $\Psi(x)$  будем понимать его абсолютное значение, а отрицательный знак потенциала будем учитывать непосредственно в уравнениях и в их решениях. В потенциальном электрическом поле вблизи электрода электроны плазмы распределяются по закону Больцмана:

$$n_e(\Psi) = n_0 \exp\left(-\frac{e\Psi}{T_e}\right). \quad (2)$$

При отрицательном потенциале электрода  $\Psi_0$  ионы должны ускоряться из плазмы к электроду, но при  $\frac{e\Psi_0}{T_e} \ll 1$  это ускорение весьма мало, поэтому пространственное распределение плотности ионов вблизи электрода можно считать однородным. При этом плотность ионов  $n_i$  в слое вблизи электрода равна плотности в невозмущенной плазме  $n_i(0 \leq x \leq \infty) \approx n_0$ . Уравнение (1) с учетом (2) преобразуется к виду:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = -4\pi n_0 e \left[ 1 - \exp\left(-\frac{e\Psi(x)}{T_e}\right) \right]. \quad (3)$$

В правой части (3) при  $\frac{e\Psi}{T_e} \ll 1$  экспонента раскладывается в ряд:  $\exp\left(-\frac{e\Psi}{T_e}\right) \approx 1 - \frac{e\Psi}{T_e}$ . Учитывая это, далее выполняются следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi(x)}{dx} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} &= -4\pi n e^2 \frac{\Psi(x)}{T_e} \frac{d\Psi(x)}{dx}; \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[ \frac{d\Psi(x)}{dx} \right]^2 &= -4\pi n e^2 \frac{\Psi(x)}{T_e} \frac{d\Psi(x)}{dx}. \end{aligned} \quad (4)$$

После интегрирования уравнения (4) по координате  $x$  с учетом граничных условий  $\Psi(x \rightarrow \infty) = 0$  получаем уравнение для расчета пространственного распределения потенциала  $\Psi(x)$  вблизи электрода:

$$\frac{d\Psi(x)}{dx} = -\sqrt{\frac{4\pi n e^2}{T_e}} \Psi(x) = -\frac{\Psi(x)}{r_D}, \quad (5)$$

где  $r_D = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi n e^2}}$  – классическая дебаевская длина. Решение уравнения (5) дает выражения для экранирования в плазме потенциала  $\Psi(x)$  и формулу для «классического» электрического поля  $E_{cl}$  на поверхности электрода при  $\frac{e\Psi_0}{T_e} \ll 1$ :

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \Psi_0 \exp\left(-\frac{x}{r_D}\right); \\ E(x) &= -\text{grad}\Psi(x) = \frac{\Psi_0}{r_D} \exp\left(-\frac{x}{r_D}\right); \\ r_D &= \sqrt{\frac{T_e}{4\pi n e^2}} \\ E(x=0) &= E_{cl} = \frac{\Psi_0}{r_D}. \end{aligned} \quad (6)$$

В лабораторных экспериментах [8–10, 17] на электроды в плазме часто подаются достаточно большие отрицательные потенциалы, для которых величина  $e\Psi_0$  существенно превышает температуру электронов  $|e\Psi_0|/T_e \gg 1$ . В этом случае пространственные распределения потенциала и электрического

поля вблизи электрода будут сильно отличаться от классических значений (6), полученных при  $|e\Psi_0|/T_e \ll 1$ . Поскольку характерные значения дебаевской длины для лабораторной плазмы с плотностью  $10^{10} \text{ см}^{-3} - 10^{13} \text{ см}^{-3}$  при электронной температуре 1–10 эВ лежат в интервале (235–7,4) мкм (таблица), то в лабораторных экспериментах при характерных размерах электрода и кривизне его поверхности, существенно превышающих дебаевскую длину, все уравнения и выражения для плоского случая (1)–(6) будут справедливы и в нашем случае.

### 3. Электрическое поле на поверхности электрода в плазме при $|e\Psi_0|/T_e \gg 1$

Далее рассматривается металлический электрод, погруженный в бесстолкновительную полностью ионизованную однородную плазму с плотностью  $10^{10} \text{ см}^{-3} - 10^{13} \text{ см}^{-3}$  и электронной температурой около 10 эВ. Электрод находится под отрицательным электрическим потенциалом от 100 В до 10 кВ, что в отличие от классического случая соответствует величине параметра  $e\Psi_0/T_e \gg 1$ . Далее мы ограничимся рассмотрением максимальных значений потенциала  $\Psi_0 < 10 \text{ кВ}$ , так как при этом условии ион–электронную эмиссию с поверхности электрода можно не учитывать [18]. В расчетах мы также не будем учитывать десорбцию газов с поверхности электрода, а также роль оксидных пленок и диэлектрических микровключений на поверхности электрода, т. к. подобные рассмотрения заслуживают отдельной работы.

При  $|e\Psi|/T_e \gg 1$  отрицательный потенциал электрода в плазме вызывает отталкивание значительной части электронной компоненты плазмы из области вблизи электрода, в то время как его действие на ионы приводит к их ускорению к электроду. Это приведет к образованию слоя разделения зарядов вблизи поверхности электрода, при этом плотность ионов  $n_i(\Psi)$  и их скорость  $V_i(\Psi)$  будут изменяться по мере их движения из невозмущенной плазмы к поверхности электрода, подчиняясь закону непрерывности потока ионов:

$$n_i(\Psi) v_i(\Psi) = n_{i0} v_{i0}, \quad (7)$$

где  $n_{i0}$  и  $V_{i0}$  – соответственно плотность и скорость ионов на границе слоя разделения зарядов. В соответствии с критерием Бома [24] величина ионного потока  $n_{i0}V_{i0}$  из невозмущенной плазмы с плотностью  $n_0$  на границе входа в слой равна:

$$n_{i0}V_{i0} = n_0 \sqrt{\frac{T_e}{M_i}}, \quad (8)$$

где скорость ионов массой  $M_i$  при входе в слой равна  $V_{i0} = (T_e/M_i)^{1/2}$ . При  $e\Psi_0/T_e \gg 1$  положительно заряженные ионы в слое ускоряются из невозмущенной плазмы к электроду в потенциальном поле, и приобретают такую энергию, что их скорость  $V_i(\Psi)$  определяется законом сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \frac{M_i v_i^2(\Psi)}{2} &= e\Psi + \frac{M_i V_{i0}^2}{2} = \\ &= e\Psi + \frac{M_i}{2} \left[ \sqrt{\frac{T_e}{M_i}} \right]^2 = e\Psi + \frac{T_e}{2} \approx e\Psi. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) получаем выражения для скорости ионов и их плотности в зависимости от  $\Psi(x)$ :

$$v_i(\Psi) \approx \sqrt{\frac{2e\Psi(x)}{M_i}}; \quad n_i(\Psi) = n_0 \sqrt{\frac{T_e}{2e\Psi(x)}}. \quad (10)$$

В электрическом поле электрода электроны распределяются по закону Больцмана:

$$\begin{aligned} n_e(\varepsilon_e) &= n_0 \exp\left[-\frac{\varepsilon_e}{T_e}\right]; \quad \varepsilon_e = (-e)(-\Psi) = e\Psi; \\ n_e(\Psi) &= n_0 \exp\left[-\frac{e\Psi(x)}{T_e}\right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая (10) и (11), получаем уравнение Пуассона для случая  $e\Psi_0/T_e \gg 1$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} &= \\ &= -4\pi e \left\{ n_0 \sqrt{\frac{T_e}{2e\Psi(x)}} - n_0 \exp\left[-\frac{e\Psi(x)}{T_e}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

При  $|e\Psi_0|/T_e \gg 1$  в правой части (12) можно пренебречь вторым экспоненциально малым членом по сравнению с первым членом, и тогда получаем упрощенное уравнение Пуассона:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = -4\pi e n_0 \sqrt{\frac{T_e}{2e\Psi(x)}}. \quad (13)$$

Решение уравнения (13) для расчета электрического поля непосредственной на поверхности электрода в плазме имеет вид:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\Psi}{dx}(x=0) \right]^2 &= E^2(\Psi_0) = \\ &= 8\pi e n_0 \sqrt{\frac{T_e}{2e}} \int_{\infty}^0 \Psi^{-1/2} d\Psi = 16\pi e n_0 \sqrt{\frac{T_e}{2e}} \Psi_0^{1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) получаем аналитическое асимптотическое выражение для электрического поля  $E(\Psi_0)$  при  $e\Psi_0/T_e \gg 1$  на поверхности электрода в плазме при отрицательном потенциале  $\Psi(x=0) = \Psi_0$  [25]:

$$\begin{aligned} E(\Psi_0) &= \frac{\Psi_0}{r_D \left( \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right)^{3/4}} = \frac{\Psi_0}{L}; \\ L &= r_D \left( \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right)^{3/4}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $L$  – модифицированная дебаевская длина в плазме вблизи электрода при  $e\Psi_0/T_e \gg 1$ . Отметим, что классическая формула (6) также является асимптотическим выражением, но при значениях параметра  $e\Psi_0/T_e \ll 1$ . Для плазмы с плотностью  $n_0 = 10^{10} \text{ см}^{-3}$  и электронной температурой  $T_e = 10 \text{ эВ}$  при  $\Psi_0 = 10 \text{ кВ}$  расчет по классической формуле (6) дает значение электрического поля на поверхности электрода в плазме 425 кВ/см, а по модифицированной формуле (15) электрическое поле на поверхности электрода составляет всего около 2,3 кВ/см. При  $n_0 = 10^{13} \text{ см}^{-3}$  величины полей также значительно различаются при расчётах по классической формуле (6) и по модифицированной формуле (15): 13,5 МВ/см (6) и 75 кВ/см (15).

Есть основания полагать, что в промежуточной области значений параметра  $e\Psi_0/T_e \sim 1$  между асимптотическими решениями (6) и (15) отсутствуют локальные максимумы или минимумы, поэтому можно предложить объединение этих асимптотических решений в виде единой плавной функции (формулы), для расчета электрического поля на поверхности электрода в широком интервале изменения значений параметра  $e\Psi_0/T_e$ .

Мы рассмотрим два варианта обобщенной простой формулы для расчета электрического поля на поверхности электрода в плазме в широком интервале значений параметра  $0 < e\Psi_0/T_e < 10^3$ .

Вариант 1 представлен в виде:

$$E(\Psi_0) \approx \frac{\Psi_0}{L^*}; \quad L^* = r_D \left[ 1 + \left( \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right)^{3/4} \right]. \quad (16)$$

Вариант 2 имеет вид:

$$E(\Psi_0) \approx \frac{\Psi_0}{L^{**}}; \quad L^{**} = r_D \left[ 1 + \left( \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right) \right]^{3/4}. \quad (17)$$

Формулы (16) и (17) в асимптотическом пределе при малых значениях параметра  $e\Psi_0/T_e \ll 1$  совпадают с классической формулой (6), а при  $e\Psi_0/T_e \gg 1$  формулы (16) и (17) переходят в полученную нами асимптотическую формулу (15). Для того, чтобы определить, какая из формул (16) и (17) лучше согла-

суется с асимптотическими выражениями, рассчитаем значения параметров  $r_D$ ,  $L$ ,  $L^*$  и  $L^{**}$  по асимптотическим формулам (6), (15) и обобщенным формулам (16), (17) для нескольких значений плотности  $n_e$  плазмы при электронной температуре  $T_e = 10$  эВ, а также для нескольких значений потенциала электрода в промежуточной области значений параметра  $0,5 \leq e\Psi_0/T_e \leq 3$ , которую не описывают асимптотические формулы (6) и (15). Результаты расчетов представлены в таблице.

Из приведенных в таблице данных следует, что при значении параметра  $e\Psi_0/T_e = 0,5$  необходимо выбирать тот вариант из сконструированных формул (16) и (17), который дает значения модифицированной длины Дебая, наиболее близкие к классическому радиусу Дебая  $r_D$ , которая получена при  $e\Psi_0/T_e \ll 1$ . Этому требованию лучше соответствует формула (17). При значениях параметра  $e\Psi_0/T_e = 3$  необходимо выбирать ту формулу, которая дает значения, наиболее близкие к модифицированной длине Дебая  $L$ , которая получена при  $e\Psi_0/T_e \gg 1$ . Этому требованию также лучше соответствует формула (17). Этот выбор справедлив как для редкой плазмы с плотностью  $n_e = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ , так и для плотной плазмы при  $n_e = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ . Также для значения параметра  $e\Psi_0/T_e = 1$  формула (17) дает значение  $L^{**}$ , которое ближе к асимптотической формуле для  $L$ , полученной при  $e\Psi_0/T_e \gg 1$ . Результаты этого анализа представлены также в виде графиков на рис. 1.

Таблица

$n_e, \text{ см}^{-3}$	$T_e, \text{ эВ}$	$\Psi_0, \text{ В}$	$e\Psi_0/T_e$	$r_D, \text{ мкм (6)}$	$L, \text{ мкм (15)}$	$L^*, \text{ мкм (16)}$	$L^{**}, \text{ мкм (17)}$
$10^{10}$	10	5	0,5	235	83	318	277
$10^{10}$	10	10	1	235	140	375	318
$10^{10}$	10	30	3	235	318	553	467
$10^{13}$	10	5	0,5	7,4	2,6	10,0	8,7
$10^{13}$	10	10	1	7,4	4,4	11,8	10,0
$10^{13}$	10	30	3	7,4	10,0	17,4	14,7

Примечание. Расчетные значения длин Дебая  $r_D$  по классической формуле (6), модифицированных длин Дебая  $L$ ,  $L^*$ ,  $L^{**}$  при расчете значений  $L$  – по формуле (15),  $L^*$  – по формуле (16) и  $L^{**}$  – по формуле (17) для нескольких значений плотности  $n_e$  плазмы (от  $10^{10} \text{ см}^{-3}$  до  $10^{13} \text{ см}^{-3}$ ) при электронной температуре  $T_e = 10$  эВ для отрицательных потенциалов электрода в интервале значений параметра  $0,5 \leq e\Psi_0/T_e \leq 3$ .

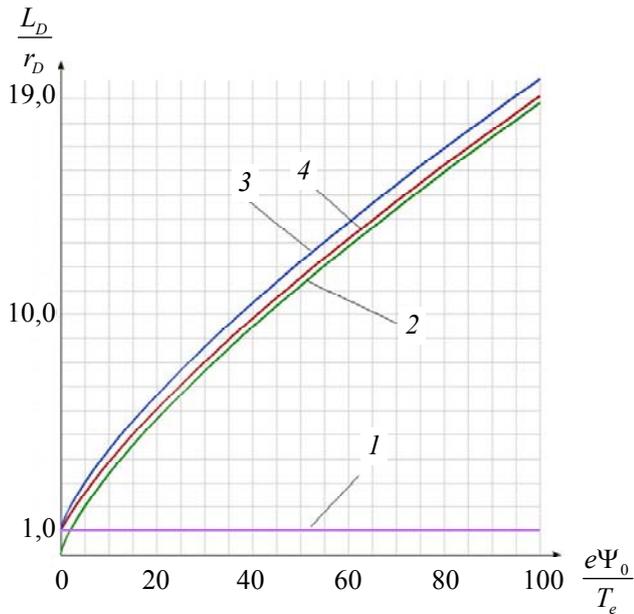


Рис. 1. Графики зависимости отношений классической и модифицированных длин Дебая  $L_D = \{r_D, L, L^*, L^{**}\}$  к классической длине Дебая  $r_D$ : (1) – соответствует классической длине Дебая  $r_D$  (не зависит от параметра  $e\Psi_0/T_e$ ); (2) – расчет по формуле (15)

$$\frac{L}{r_D} = \left[ \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right]^{3/4}; \quad (3) - \text{ расчет по формуле (16)}$$

$$\frac{L^*}{r_D} = 1 + \left[ \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right]^{3/4}; \quad (4) - \text{ расчет по формуле (17)}$$

$$\frac{L^{**}}{r_D} = \left[ 1 + \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right]^{3/4}. \quad \text{Графики построены для интервала значений параметра } 0 \leq e\Psi_0/T_e \leq 100$$

Из представленных графиков рис. 1 для классической и модифицированных длин Дебая видно, что график, построенный по формуле (17) наиболее приближен как к асимптотической формуле (15), полученной при  $e\Psi_0/T_e \gg 1$ , так и к классической формуле длины Дебая (6), полученной при  $e\Psi_0/T_e \ll 1$ .

Рассмотрим ход зависимостей логарифма нормированного электрического поля в зависимости от величины приложенного к электроду потенциала. Прежде всего, представляет интерес область промежуточных значений параметра  $0,5 \leq e\Psi_0/T_e \leq 3$ . Эти расчеты представлены на рис. 2.

Из графиков рис. 2 видно, что классическая формула расчета электрического поля на поверхности электрода (6) практически совпадает с модифицированными формулами (16) и (17), при этом асимптотическая формула (15)

существенно завышает значения поля, что также естественно, т. к. эта формула (15) справедлива только для случая  $e\Psi_0/T_e \gg 1$ .

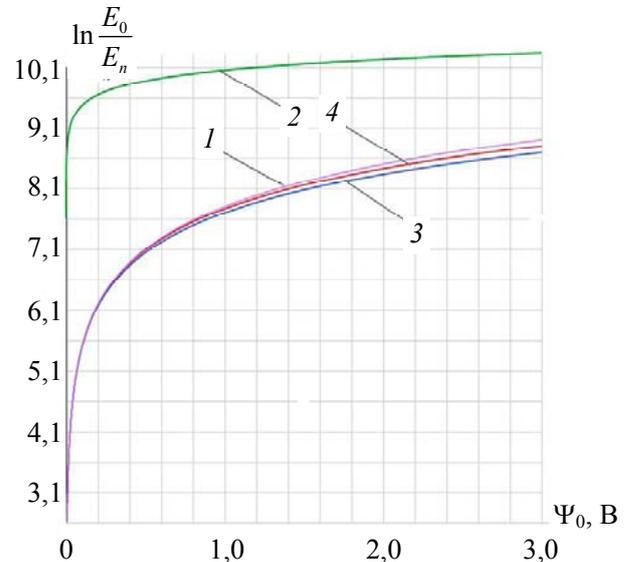


Рис. 2. Графики зависимости нормированного электрического поля  $\frac{E_0}{E_n}$  на поверхности погруженного в плазму электрода в зависимости от величины электрического потенциала электрода  $\Psi_0$  в Вольтах в интервале значений  $0 < \Psi_0 < 3$  В. По вертикальной оси отложены значения натурального логарифма электрического поля  $E_0$  нормированного на величину  $E_n = 1$  В/см. Расчет выполнялся при значении плотности плазмы  $n_e = 10^{13}$  см<sup>-3</sup> и электронной температуре  $T_e = 10$  эВ. (1) – расчет по классической формуле (6)  $E_0 = E_{cl} = \frac{\Psi_0}{r_D}$ ; (2) – расчет поля по асимптотической формуле (15)  $E_0 = \frac{\Psi_0}{r_D \left( \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right)^{3/4}}$ ; (3) – расчет поля по формуле (16)  $E_0 \approx \frac{\Psi_0}{r_D \left[ 1 + \left( \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right)^{3/4} \right]}$ ; (4) – расчет поля по обобщенной формуле (17)  $E_0 \approx \frac{\Psi_0}{r_D \left[ 1 + \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right]^{3/4}}$

расчет поля по формуле (16)  $E_0 \approx \frac{\Psi_0}{r_D \left[ 1 + \left( \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right)^{3/4} \right]}$ ; (4) – расчет поля по обобщенной формуле (17)  $E_0 \approx \frac{\Psi_0}{r_D \left[ 1 + \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right]^{3/4}}$

расчет поля по формуле (16)  $E_0 \approx \frac{\Psi_0}{r_D \left[ 1 + \left( \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right)^{3/4} \right]}$ ; (4) – расчет поля по обобщенной формуле (17)  $E_0 \approx \frac{\Psi_0}{r_D \left[ 1 + \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right]^{3/4}}$

расчет поля по формуле (16)  $E_0 \approx \frac{\Psi_0}{r_D \left[ 1 + \left( \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right)^{3/4} \right]}$ ; (4) – расчет поля по обобщенной формуле (17)  $E_0 \approx \frac{\Psi_0}{r_D \left[ 1 + \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right]^{3/4}}$

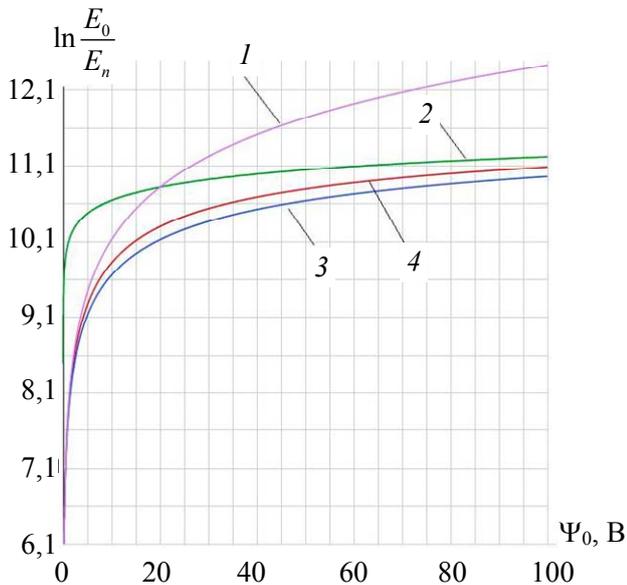
расчет поля по формуле (16)  $E_0 \approx \frac{\Psi_0}{r_D \left[ 1 + \left( \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right)^{3/4} \right]}$ ; (4) – расчет поля по обобщенной формуле (17)  $E_0 \approx \frac{\Psi_0}{r_D \left[ 1 + \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right]^{3/4}}$

расчет поля по формуле (16)  $E_0 \approx \frac{\Psi_0}{r_D \left[ 1 + \left( \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right)^{3/4} \right]}$ ; (4) – расчет поля по обобщенной формуле (17)  $E_0 \approx \frac{\Psi_0}{r_D \left[ 1 + \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right]^{3/4}}$

расчет поля по формуле (16)  $E_0 \approx \frac{\Psi_0}{r_D \left[ 1 + \left( \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right)^{3/4} \right]}$ ; (4) – расчет поля по обобщенной формуле (17)  $E_0 \approx \frac{\Psi_0}{r_D \left[ 1 + \frac{e\Psi_0}{2T_e} \right]^{3/4}}$

На рис. 3 представлены графики зависимости расчетной величины электрического поля на поверхности электрода в зависимости от значений электрического потенциала  $\Psi_0$  электрода в интервале значений  $0 \leq \Psi_0 \leq 100$  В, построенные при значении

плотности плазмы  $n_e = 10^{13} \text{ см}^{-3}$  и для электронной температуры  $T_e = 10 \text{ эВ}$ .



**Рис. 3.** Графики зависимости нормированного электрического поля  $\frac{E_0}{E_n}$  на поверхности погруженного в

плазму электрода в зависимости от величины электрического потенциала электрода  $\Psi_0$  в Вольтах в интервале значений  $0 < \Psi_0 < 100 \text{ В}$ . По вертикальной оси отложены значения натурального логарифма электрического поля  $E_0$ , нормированного на величину  $E_n = 1 \text{ В/см}$ . Расчет выполнялся при значении плотности плазмы  $n_e = 10^{13} \text{ см}^{-3}$  и при электронной температуре  $T_e = 10 \text{ эВ}$ . (Обозначения кривых 1–4 см. на рис. 2)

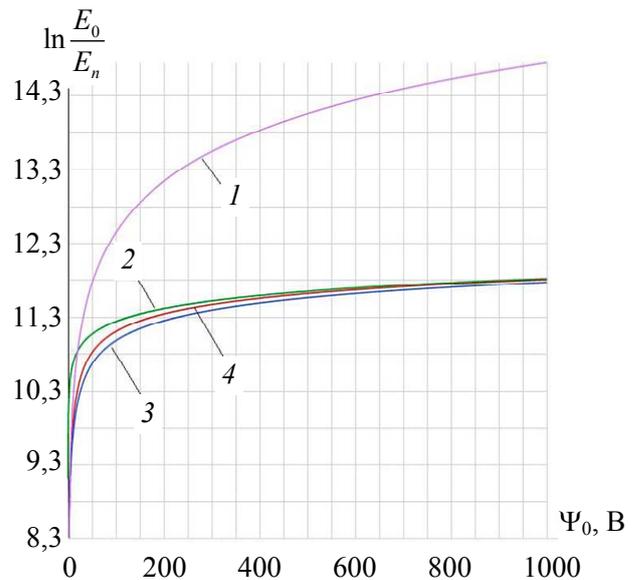
Из рис. 3 видно, что при значениях потенциала более 80 В, что соответствует значениям параметра  $e\Psi_0/T_e > 8$ , величины электрических полей, рассчитанных по модифицированным формулам (15), (16) и (17) сближаются, что естественно, т.к. все эти формулы построены на основе асимптотического выражения (15), справедливого при  $e\Psi_0/T_e \gg 1$ . При этом величина электрического поля, рассчитанная по классической формуле (6), значительно завышена, так как получена при значениях параметра  $e\Psi_0/T_e \ll 1$  и не учитывает значительного увеличения размера области разделения зарядов в плазме вблизи поверхности электрода при больших значениях потенциала (см. рис. 1).

Графики рис. 2 и рис. 3 демонстрируют, что наилучшей в нашем рассмотрении является

формула (17), которая позволяет рассчитывать электрическое поле на поверхности электрода в плазме так, что практически совпадает с классической формулой (6) при  $e\Psi_0/T_e \ll 1$ , и с асимптотической формулой (15), справедливой при больших значениях параметра  $e\Psi_0/T_e \gg 1$ . Данные, приведенные на рис. 2 и рис. 3 согласуются также с данными таблицы.

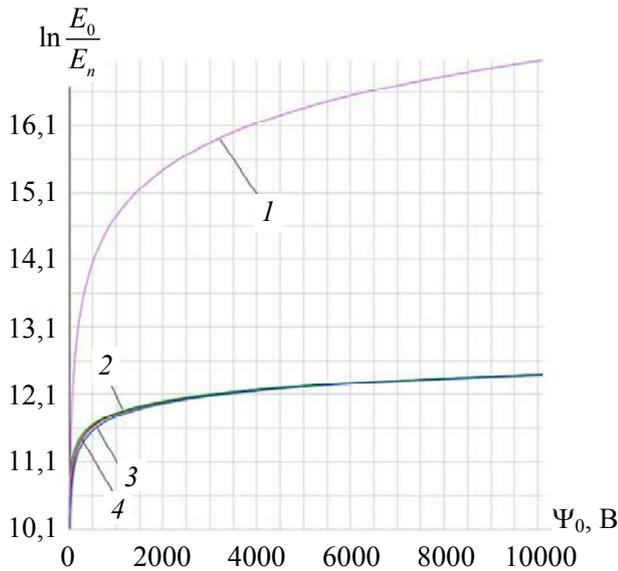
На рис. 4 и рис. 5 представлены расчеты нормированных величин электрического поля на поверхности электрода при потенциалах 1000 В и 10000 В, соответственно.

Эти расчеты, представленные в виде графиков на рис. 4 и рис. 5, показывают, что обе формулы (16) и (17) дают весьма близкие значения поля, однако формула (17) ближе располагается к графику, определяемому асимптотической формулой (15), которая непосредственно получена из уравнения Пуассона, и при этих значениях потенциала является асимптотически точной.



**Рис. 4.** Графики зависимости нормированного электрического поля  $\frac{E_0}{E_n}$  на поверхности погруженного в

плазму электрода в зависимости от величины электрического потенциала электрода  $\Psi_0$  в Вольтах в интервале значений  $0 < \Psi_0 < 1000 \text{ В}$ . По вертикальной оси отложены значения натурального логарифма электрического поля  $E_0$ , нормированного на величину  $E_n = 1 \text{ В/см}$ . Расчет выполнялся при значении плотности плазмы  $n_e = 10^{13} \text{ см}^{-3}$  и при электронной температуре  $T_e = 10 \text{ эВ}$ . (Обозначения кривых 1–4 см. на рис. 2)



**Рис. 5.** Графики зависимости нормированного электрического поля  $\frac{E_0}{E_n}$  на поверхности погруженного в плазму электрода в зависимости от величины электрического потенциала электрода  $\Psi_0$  в Вольтах в интервале значений  $0 < \Psi_0 < 10000$  В. По вертикальной оси отложены значения натурального логарифма электрического поля  $E_0$ , нормированного на величину  $E_n = 1$  В/см. Расчет выполнялся при значении плотности плазмы  $n_e = 10^{13}$  см<sup>-3</sup> и при электронной температуре  $T_e = 10$  эВ. (Обозначения кривых 1–4 см. на рис. 2)

Таким образом, на основе расчета и анализа сконструирована аналитическая обобщенная формула для расчета модифицированной длины Дебая  $L_{MD}$  и значений электрического поля  $E_0 \equiv E(\Psi_0)$  на поверхности погруженного в плазму электрода для значений потенциала электрода от 1 В до  $10^4$  В и в широком интервале значений безразмерного параметра  $0 < e\Psi_0/T_e < 10^3$ :

$$E_0 \equiv E(\Psi_0) \approx \frac{\Psi_0}{L_{MD}}; \quad (18)$$

$$L_{MD} = r_D \left[ 1 + \frac{|e\Psi_0|}{2T_e} \right]^{3/4}.$$

### Заключение

Предложена обобщенная аналитическая формула (18) для расчета электрического поля на поверхности электрода  $E_0$  и модифицированной длины Дебая  $L_{MD}$  в плазме с плот-

ностью от  $10^{10}$  см<sup>-3</sup> до  $10^{13}$  см<sup>-3</sup> и температурой  $T_e$  порядка 10 эВ в широком диапазоне значений безразмерного параметра  $0 < e\Psi_0/T_e < 10^3$ :

$$E_0 = \frac{\Psi_0}{r_D \left[ 1 + \frac{|e\Psi_0|}{2T_e} \right]^{3/4}}; \quad L_{MD} = r_D \left[ 1 + \frac{|e\Psi_0|}{2T_e} \right]^{3/4}.$$

Отличие полученной обобщенной аналитической формулы (18) для электрического поля  $E_0$  от классической формулы (6)

$E_{cl} = \frac{\Psi_0}{r_D}$  обусловлено значительным увели-

чением размера модифицированного дебаевского слоя  $L_{MD}$  с разделением зарядов плазмы вблизи поверхности электрода по сравнению с

классическим выражением  $r_D = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi n e^2}}$  при

увеличении значения отрицательного потенциала электрода  $\Psi_0$ . Действительно, при значениях параметра  $e\Psi_0/T_e \gg 1$  толщина слоя  $L_{MD}$  увеличивается по сравнению с классической длиной Дебая  $r_D$  пропорционально выражению  $[e\Psi_0/2T_e]^{3/4}$ , и при изменении потенциала от 10 В до 10 кВ размер модифицированного слоя плазмы вблизи электрода  $L_{MD}$  возрастает почти в 100 раз по сравнению с классической длиной Дебая  $r_D$ . Вследствие этого величина электрического поля  $E_0$  на поверхности погруженного в плазму электрода с ростом потенциала увеличивается значительно слабее  $E_0 \sim (\Psi_0)^{1/4}$ , что на два порядка меньше по сравнению с расчетом по классической формуле (6), которая справедлива только при  $e\Psi_0/T_e \ll 1$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Raiser Yu. P. Gas Discharge Physics. – Berlin, New York: Springer, 1997.
2. Von Engel A. Ionized Gases. – Oxford: Clarendon Press, 1955.
3. Королев Ю. Д., Месяц Г. А. Автоэмиссионные и взрывные процессы в газовом разряде. – Новосибирск: Наука, 1982.
4. Mesyats G. A., Proskurovsky D. I. Pulsed Electrical Discharge in Vacuum. – Berlin: Springer Verlag, 1989.
5. Mackeown S. S. / Phys. Rev. 1929. Vol. 34. P. 611.
6. Lafferty J. M. Vacuum Arcs: Theory and Application. – New York: Wiley, 1980.

7. Лозанский О. Д., Фирсов О. Б. Теория искры. – М.: Атомиздат, 1975.
8. Ivanov V. A., Sakharov A. S., Konyzhev M. E. / Plasma Physics Reports. 2008. Vol. 34. № 2. P. 150–161.
9. Ivanov V. A., Sakharov A. S., Konyzhev M. E. / Plasma Physics Reports. 2016. Vol. 42. № 6. P. 619–632.
10. Ivanov V. A., Konyzhev M. E., Dorofeyuk A. A., Kamolova T. I. / Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1647. P. 012018. doi: 10.1088/1742-6596/1647/1/012018 (IOP Publishing)
11. Ivanov V. A., Konyzhev M. E., Kuksenova L. I., Lapteva V. G., Sakharov A. S., Kamolova T. I., Dorofeyuk A. A., Satunin S. N. / Plasma Physics Reports. 2010. Vol. 36. № 13. P. 1241–1246.
12. Kuksenova L. I., Lapteva V. G., Ivanov V. A., Konyzhev M. E. / Friction and lubrication in machines and mechanisms. 2009. № 5. P. 10–16.
13. Ivanov V. A., Konyzhev M. E., Kuksenova L. I., Lapteva V. G., Khrennikova I. A. / Friction and wear. 2009. Vol. 30. № 4. P. 396–404.
14. Димитрович Д. А., Бычков А. И., Иванов В. А. / Прикладная физика. 2009. № 2. С. 35–43.
15. Ivanov V. A., Konyzhev M. E., Kuksenova L. I., Lapteva V. G., Khrennikova I. A. / Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2015. Vol. 44. № 4. P. 384–388.
16. Ivanov V. A., Sakharov A. S., Konyzhev M. E., Kamolova T. I., Dorofeyuk A. A., Kuksenova L. I. / Journal of Physics: Conf. Series. 2017. Vol. 907. P. 012023. doi: 10.1088/1742-6596/907/1/012023
17. Ivanov V. A., Konyzhev M. E., Kamolova T. I., Dorofeyuk A. A. / Plasma Physics Reports. 2021. Vol. 47. № 6. P. 603–610. doi: 10.1134/S1063780X21060076
18. Gabovich M. D., Pleshivtsev N. V., Semashko N. N. Ion and Atomic Beams for Controlled Fusion and Technology / Translated from Russian by McNeill D. H. – New York and London: Consultants Bureau, 1988.
19. ITER Documentation Series. № 29. IV. Plasma Facing Materials. – Vienna: IAEA, 1991. P. 247–266.
20. Behrich R., Ehremberg J. / Journal of Nuclear Materials. Part 1. 1988. Vol. 155–157. P. 95–104.
21. Bittencourt J. A. Fundamentals of Plasma Physics. – New York: Springer Science+Business Media, 2004. doi: 10.1007/978-1-4757-4030-1
22. Plasma Diagnostics, Ed. by Lochte-Holtgreven W., Kiel University. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1968.
23. Plasma Diagnostic Techniques. Ed. by Huddleston R. H., Leonard S. L. Plasma Research Laboratory, Aerospace Corporation. Los Angeles, California. – New York – London: Academic Press, 1965.
24. Bohm D. The Characteristics of the Electrical Discharges in Magnetic Fields (Chapter 3). Ed. Guthrie A., Wakerling R. K. – New York, 1949.
25. Ivanov V. A. / Plasma Physics Reports. 2023. Vol. 49. № 2. P. 284–289. doi: 10.1134/S1063780X2260136524

PACS: 52.40.Hf

## Generalized formula for calculating the electric field on the electrode surface in plasma

*V. A. Ivanov, M. E. Konyzhev, T. I. Kamolova and A. A. Dorofeyuk*

Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences  
38 Vavilov st., Moscow, 119991, Russia  
E-mail: ivanov@fpl.gpi.ru

*Received 31.08.2023; revised 26.09.2023; accepted 4.10.2023*

***On the surface of a metal electrode immersed in a plasma with an electron temperature  $T_e \sim 10$  eV and a plasma density  $n_e$  from  $10^{10} \text{ cm}^{-3}$  to  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$  the electric field of the electrode is calculated under the negative electric potential  $\Psi_0$  at large values of the dimensionless parameter  $|e\Psi_0/T_e \gg 1$ .***

***The resulting asymptotic formula for the field strength at  $|e\Psi_0/T_e \gg 1$  differs significantly from the classical formulas for calculating the electric field and the Debye length near the electrode surface in plasma, which are valid under the condition  $|e\Psi_0/T_e \ll 1$ . It is shown that at  $|e\Psi_0/T_e \gg 1$  a modified Debye layer in the plasma near the electrode can exceed the classical Debye length by two orders of magnitude. To calculate the electric field on the electrode surface in plasma a generalized formula is proposed explicitly, which is valid in a wide range of values of the parameter  $0 < |e\Psi_0/T_e < 10^3$  at negative values of the electrode potential up to 10 kV.***

**Keywords:** plasma, electrode, negative potential, Poisson's equation, electric field, modified Debye length, generalized formula for electrical field calculation at electrode.

DOI: 10.51368/1996-0948-2023-5-5-14

## REFERENCES

1. Raiser Yu. P., Gas Discharge Physics, Berlin, New York, Springer, 1997.
2. Von Engel A., Ionized Gases, Oxford, Clarendon Press, 1955.
3. Korolev Yu. D. and Mesyats G. A., Field emission and explosive processes in a gas discharge, Novosibirsk, Nauka, 1982 [in Russian].
4. Mesyats G. A. and Proskurovsky D. I., Pulsed Electrical Discharge in Vacuum, Berlin, Springer Verlag, 1989.
5. Mackeown S. S., Phys. Rev. **34**, 611 (1929).
6. Lafferty J. M., Vacuum Arcs: Theory and Application, New York, Wiley, 1980.
7. Lozansky E. D. and Firsov O. B., The Theory of the Spark, Moscow, Atomizdat, 1975 [in Russian].
8. Ivanov V. A., Sakharov A. S. and Konyzhev M. E., Plasma Physics Reports **34** (2), 150–161 (2008).
9. Ivanov V. A., Sakharov A. S. and Konyzhev M. E., Plasma Physics Reports **42** (6), 619–632 (2016).
10. Ivanov V. A., Konyzhev M. E., Dorofeyuk A. A. and Kamolova T. I., Journal of Physics: Conference Series **1647**, 012018 (2020). doi: 10.1088/1742-6596/1647/1/012018 (IOP Publishing)
11. Ivanov V. A., Konyzhev M. E., Kuksenova L. I., Lapteva V. G., Sakharov A. S., Kamolova T. I., Dorofeyuk A. A. and Satunin S. N., Plasma Physics Reports **36** (13), 1241–1246 (2010).
12. Kuksenova L. I., Lapteva V. G., Ivanov V. A. and Konyzhev M. E., Friction and lubrication in machines and mechanisms, № 5, 10–16 (2009).
13. Ivanov V. A., Konyzhev M. E., Kuksenova L. I., Lapteva V. G. and Khrennikova I. A., Friction and wear **30** (4), 396–404 (2009).
14. Dimitrovich D. A., Bychkov A. I. and Ivanov V. A., Applied Physics, № 2, 35–43 (2009) [in Russian].
15. Ivanov V. A., Konyzhev M. E., Kuksenova L. I., Lapteva V. G. and Khrennikova I. A., Journal of Machinery Manufacture and Reliability **44** (4), 384–388 (2015).
16. Ivanov V. A., Sakharov A. S., Konyzhev M. E., Kamolova T. I., Dorofeyuk A. A. and Kuksenova L. I., Journal of Physics: Conf. Series **907**, 012023 (2017). doi: 10.1088/1742-6596/907/1/012023
17. Ivanov V. A., Konyzhev M. E., Kamolova T. I. and Dorofeyuk A. A., Plasma Physics Reports **47** (6), 603–610 (2021). doi: 10.1134/S1063780X21060076
18. Gabovich M. D., Pleshivtsev N. V. and Semashko N. N., Ion and Atomic Beams for Controlled Fusion and Technology. Translated from Russian by McNeill D. H., New York and London, Consultants Bureau, 1988.
19. ITER Documentation Series. № 29. IV. Plasma Facing Materials, Vienna, IAEA, 1991, pp. 247–266.
20. Behrich R. and Ehremberg J., Journal of Nuclear Materials, Part 1 **155–157**, 95–104 (1988).
21. Bittencourt J. A., Fundamentals of Plasma Physics, New York, Springer Science+Business Media, 2004. doi: 10.1007/978-1-4757-4030-1
22. Plasma Diagnostics, Ed. by Lochte-Holtgreven W., Kiel University, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1968.
23. Plasma Diagnostic Techniques. Edited by Huuddlestone R. H. and Leonard S. L., Plasma Research Laboratory, Aerospace Corporation. Los Angeles, California, New York – London, Academic Press, 1965.
24. Bohm D., The Characteristics of the Electrical Discharges in Magnetic Fields (Chapter 3). Ed. Guthrie A., Wakerling R. K., New York, 1949.
25. Ivanov V. A., Plasma Physics Reports **49** (2), 284–289 (2023). doi: 10.1134/S1063780X2260136524