

УДК 536.3
EDN: BGFATO

PACS: 44.40.+a, 42.68Ay, 42.72.g



Метод расчета тепловых излучений субволновых частиц

А. Н. Свиридов, Л. Д. Сагинов

Предложена новая методика расчета тепловых излучений субволновых частиц с использованием зависимости добротности электрически малых радиоантенн (ESA) от их относительных (по отношению к длине излучаемой волны) размеров. Эта зависимость характеризует фундаментальный предел минимальных размеров ESA радиоантенн. С помощью предложенной методики проведены расчеты зависимостей мощностей и коэффициентов тепловых излучений графитового и золотого шариков от их размеров. Для сравнения приведены аналогичные зависимости, полученные с помощью двух других методик. Эта методика расчетов тепловых излучений субволновых частиц адекватно описывает зависимости мощности и коэффициента теплового излучения от размеров частиц.

Ключевые слова: закон Планка, закон Стефана-Больцмана, закон смещения Вина, коэффициент излучения, коэффициент поглощения, пространственная спектральная мода, энергия моды, субволновая частица, наноантенна, электрически малая антенна (ESA), добротность, ближнее поле, дальнее поле.

DOI: 10.51368/1996-0948-2024-2-18-30

Введение

Известно [1–15], что законы Планка и Стефана-Больцмана, хорошо описывающие тепловое излучение тел, нельзя применять в случаях, когда размеры тел становятся меньшими λ_{\max} ¹. Эти тела нельзя считать черными или серыми излучателями. Их излучательные способности и спектральный состав излучения

зависят не только от материала тел, но и от их размеров и формы. Далее такие тела будем называть субволновыми частицами (СЧ).

Потребность в разработках методик и математических моделей, позволяющих рассчитывать процессы излучения и поглощения СЧ, связана с исследованиями атмосферы и космического пространства, с исследованиями пределов эффективности преобразования солнечной энергии, с быстрым прогрессом нанотехнологий, наноматериалов, наноустройств (в том числе таких, как наноантенны, нанолазеры, спазеры), с развитием технологий получения нанопорошков для использования в металлургии, микроэлектронике, медицине и коллоидной химии, с исследованиями процессов в пылевой плазме, процессов взрывов и горения при наличии в газообразной среде микро и наночастиц [5, 16–33].

Наиболее сложными и трудоемкими являются количественные описания процессов взаимодействия внешнего излучения с СЧ, т. к. при этом проявляются вместе такие явления как возбуждение и вторичное излучение

Свиридов Анатолий Николаевич, научный консультант, к.ф.-м.н.

E-mail: sviridtol@yandex.ru

Сагинов Леонид Дмитриевич, в.н.с., д.ф.-м.н.

E-mail: lsaginov@yandex.ru

Федеральный научный агроинженерный центр ВИМ.
Россия, 109428, Москва, 1-й Институтский проезд, 5.

Статья поступила в редакцию 2.04.2024

Принята к публикации 16.04.2024

Шифр научной специальности: 1.3.14

© Свиридов А. Н., Сагинов Л. Д., 2024

¹ λ_{\max} – длина волны, соответствующая максимальной интенсивности излучения черного (серого) тела, нагретого до температуры T .

(рассеяние) и обусловленные ими: преломление, поглощение и дифракция. Для описания взаимодействия частиц с внешним излучением субволновые частицы математически моделируются телами определенной формы, что позволяет решать для таких тел задачу о дифракции на них электромагнитных волн. Точное решение задачи дифракции и рассеяния излучения впервые получено в 1908 г. для однородного шара в рамках теории Г. Ми [1]. Решение задачи дифракции электромагнитной волны на сферической частице представляет собой сходящийся ряд, каждый член которого соответствует некоторой парциальной волне (электрической или магнитной), причем амплитуды этих волн быстро убывают с увеличением индекса волны. Для металлических *наночастиц*, размеры которых много меньше длины волны в видимой области спектра и не превышают толщины скин слоя (для хорошо проводящих металлов толщина скин слоя попадает в диапазон 20–30 нм), учет только первого члена ряда может обеспечивать точность, достаточную для практических применений (дипольное приближение).

Однако, с увеличением размеров частиц объем расчетов резко возрастает, а точность быстро падает, поэтому в рамках теории Ми не удастся получить приемлемые по точности и достаточно общие зависимости сечений и коэффициентов поглощения, а также другие характеристики *субволновых частиц*, размеры которых соизмеримы с λ_{\max} и которые могут быть в сотни раз больше размеров *наночастиц* [1–5, 9, 15]. Этим обусловлены последующие исследования и разработки других методик расчетов. Например, в [5] проведены расчеты (с использованием приближенного метода [3]) зависимостей излучательных способностей проводящих сферических частиц из меди и графита от их радиуса при различных температурах. Для расчетов потери энергии малым телом использовался закон Кирхгофа для равновесного теплового излучения, а для расчета зависимостей сечения поглощения от параметров частиц использовался приближенный метод, основанный на учете глубины проникновения излучения в среду [3, 4].

В [14] приведены формулы и результаты расчета излучательных способностей сферических частиц из золота, проведенных по методу [3–5, 9, 15], основанному на расчетах толщины скин слоя.

В [7] с помощью флуктационной электродинамики вычисляли тепловое излучение апертуры черного тела с субволновым отверстием. Принцип решения задачи заключался в следующем. Тело при локальном равновесии температуры инициирует флуктуирующие токи, генерирующее электромагнитное поле. Тепловые токи статистически характеризуются корреляционной функцией, заданной теоремой флуктуации-диссипации. Излучение этими токами вычисляется путем решений уравнений Максвелла в конкретной геометрии.

В [8] описываются методы вычислений теплового излучения произвольных объектов (основанные на учете их рассеивающих свойств), в которых используется теория неравновесных электромагнитных флуктуаций множества объектов и массивов.

В [10] сообщается о разработке модели определения характеристик излучения различных СЧ, в основе которой лежит метод машинного обучения с использованием нейронных сетей (искусственный интеллект). Модель «обучалась» на наборе сведений о твердых частицах, который содержал данные о спектральных излучательных способностях для 15900 частиц различной формы (сферы, параллелепипеды, треугольные призмы, цилиндры) с различными размерами и соотношениями сторон, изготовленных из различных материалов (например: SiO_2 , Si_3N_4 , Au и др.).

В [11–13] было предложено использовать для расчета собственных тепловых излучений СЧ формализм модовой теории излучений [16, 17].

Однако, несмотря на наличие различных методик расчетов тепловых излучений СЧ, нельзя считать, что эта задача в достаточной мере решена.

Расчеты, проведенные с помощью известных методик трудоемки, и показывают большой разброс результатов (например, см. рисунок 1 [18]). Почти все известные методики теоретически обоснованы только для расчетов излучений наночастиц [1–5, 9, 15]. Методики, основанные на учете глубины проникновения излучения в материал, пригодны только для расчетов металлических наночастиц с низким удельным сопротивлением [9, 15].

В этой связи проблема разработки новых методик расчетов теплового излучения СЧ остается актуальной.

Обоснование предлагаемой методики расчетов

Субволновую частицу, поглощающую оптическую энергию облучающих ее мод (ТЕМ электромагнитных волн), можно рассматривать как антенну, в которой под действием электрических и магнитных полей облучающих мод возбуждаются колебания токов проводимости и (или) смещения. В первом приближении эти колебания аналогичны собственным колебаниям электрического диполя. Парциальные волны более высоких порядков можно считать результатом колебаний мультиполей (квадруполь, октуполь и т. д.). Для частиц простой формы и имеющих размеры много меньше длины волны, учет только дипольных колебаний дает точность, достаточную для большинства практических применений [9, 19].

Проблемы, связанные с математическим описанием процессов излучения СЧ (антенн), размеры которых существенно меньше излучаемых (принимаемых) длин волн существуют не только в оптическом диапазоне, но и радиодиапазоне. Приемопередающие модули для мобильной связи, приемники спутниковых навигационных систем и других приложений микроэлектроники стремятся делать все меньше не только в абсолютных размерах, но и относительно излучаемых (принимаемых) длин волн. Поэтому вопрос о теоретическом пределе уменьшения размеров антенн по отношению к излучаемым (принимаемым) длинам радиоволн имеет большое научное и практическое значение.

Эту проблему в радиотехнике пытались решить еще в 40-х годах прошлого века. В 1947 году Н. А. Wheeler опубликовал статью [34], в которой дал следующее определение электрически малых антенн (Electric Small Antenna – ESA). ESA – это антенны, геометрические размеры которых меньше $\lambda/2\pi$, т. е. это антенны для которых справедливо следующее соотношение $K \cdot a < 1$, где $K = 2\pi/\lambda$, a – радиус антенной опорной сферы, охватывающий максимальный размер дипольной антенны, или радиус соответствующей полусферы для случая монополя. Там же было введено понятие «Радан-сферы», широко принятое в теории. Поверхность этой сферы часто интерпретируется как эталонная граница между

ближним и дальним полем, создаваемая излучающей ESA.

На рисунке 1 схематически показана дипольная ESA (из [35]), заключенная в воображаемую Раданную сферу (Radian Sphere) с радиусом $r = \lambda/2\pi$, внутри которой находится воображаемая антенная сфера (Antenna Sphere) с радиусом a , охватывающим максимальный размер реальной дипольной антенны. Поверхность Раданной сферы является границей ближнего поля, создаваемого излучением ESA. В объеме между сферами сосредоточена колебательная энергия электрических и (или) магнитных полей, возбуждаемых ESA (реактивная энергия, нераспространяющаяся в дальнюю зону). Нераспространяющиеся волны – это волны, у которых одна компонента волнового вектора является мнимой². В дальней зоне эти компоненты ближнего поля отсутствуют. В то же время возбуждаемые ESA ТЕМ (поперечные электромагнитные волны) волны свободно распространяются в дальней зоне, за пределами Раданной сферы и образуют поток электромагнитной энергии, излучаемый антенной.

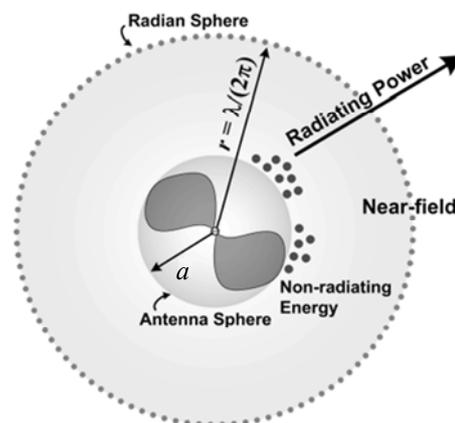


Рис. 1. Дипольная ESA, заключенная в воображаемую Раданную сферу

В 1948 году Chu L. J. формулирует фундаментальные пределы Q -добротности для ESA с линейной и круговой поляризациями, вписанных в Раданную сферу [36]. Добротность характеризовалась отношением электромагнитной энергии W , накопленной внутри

² В оптике нераспространяющиеся в дальнюю зону ЭМ волны теплового излучения, существующие на расстояниях от поверхностей меньших $\lambda/2\pi$, называют эванесцентными волнами.

Радиальной сферы окружающей антенну, к мощности P_{rad} , излучаемой за ее пределы в дальнюю зону. $Q = \omega W/P_{rad}$, где W представляет неизлучаемую энергию, накапливаемую либо электрическим, либо магнитным полем (в зависимости от типа диполя), ω обозначает круговую частоту электромагнитных колебаний. Chu L. J. получил приближенные выражения для границы добротности ESA в случае вертикальной линейной и круговой поляризации при $K \cdot a \rightarrow 0$. Далее R. F. Harrington уточнил теорию Chu L. J. [37]. Он рассчитал эффекты размера антенны, усиления и минимальной Q для ближней и дальней зоны дифракции поля для волн линейной и круговой поляризации. Тем не менее, проблема расчетов добротности ESA, оставалась актуальной, поскольку Q напрямую связана с реактивной мощностью излучения, а расчеты реактивной части мощности излучения сложны и приближенны.

В последующие годы (вплоть до настоящего времени) теория и техника ESA-радиоантенн интенсивно развивалась усилиями многих известных исследователей: R. E. Collin and S. Rothschild [38], R. C. Hansen [39], McLean J. S. [40] и других [40–51], которые предложили различные уточненные варианты математических выражений, описывающих зависимости добротности ESA-радиоантенн $Q(Ka)$ от их относительных (по сравнению с излучаемой длиной волны) размеров. Все эти зависимости практически совпадают при $K \cdot a < 0,3$ и показывают быстрое увеличение добротности ESA-радиоантенн (и, соответственно, уменьшение доли энергии, излучаемой в дальнюю зону) по мере уменьшения $K \cdot a$. Зависимости $Q(K \cdot a)$ показывают теоретический предел уменьшения размеров антенн по отношению к излучаемым длинам радиоволн. Другими словами $P_{rad} \rightarrow 0$ при $K \cdot a \rightarrow 0$. Следует отметить, что этот предел имеет фундаментальный характер [48] и вероятно обусловлен дифракционными эффектами. Это подтверждается тем, что в приведенных ниже формулах (1) и (2) добротность Q зависит только от размеров антенны и длины излучаемой волны.

Радио и тепловые излучения, распространяющиеся в свободном пространстве, являются ТЕМ волнами, отличающимися только

частотными диапазонами, поэтому природа фундаментальных ограничений, показывающих увеличение доли энергии неизлучаемой в дальнюю зону по отношению к излучаемой энергии при уменьшении относительных размеров как ESA-радиоантенн, так и СЧ, по видимому, одинакова.

Исходя из этих соображений, мы предлагаем использовать для разработки новой методики расчетов тепловых излучений СЧ следующие выражения для $Q(K \cdot a)$, описывающие зависимости добротности ESA-радиоантенн от их относительных геометрических размеров [38, 42]:

$$Q = \frac{1}{2K^3 a^3} + \frac{1}{Ka} + \sqrt{\frac{1}{4K^6 a^6} + \frac{1}{K^2 a^2}} \quad (1)$$

$$Q = \frac{1}{K^3 a^3} + \frac{1}{Ka}. \quad (2)$$

Так как результаты расчетов Q по выражению (1) очень мало отличаются от результатов расчетов по часто приводимому во многих работах [38, 39, 44, 46, 47, и др.] упрощенному выражению (2), то в дальнейшем мы будем использовать выражение (2).

Следует обязательно отметить, что ESA-антенны не обеспечивают полностью взаимность между режимами излучения и приема. Результаты, полученные для ESA передающих антенн, не могут быть в полной мере распространены на аналогичные приемные ESA антенны, поскольку предположение о сферичности³ излучаемых волн не является справедливым для принимаемых волн (фронт электромагнитных волн, принимаемых из дальней области поля, почти плоский) и это не позволяет строго использовать теорему взаимности между режимами излучения и приема [44]. Поэтому зависимости $Q(K \cdot a)$, выведенные для описания процессов излучения ESA-радиоантенн, мы в дальнейшем будем использовать для построения математической модели, описывающей только тепловые излучения СЧ.

³ В сферических волнах электромагнитная энергия вблизи поверхности излучателя в основном сосредоточена в ближних полях (реактивных полях), которые не вносят вклада в дальнее поле, что соответственно, приводит к снижению коэффициента излучения [50].

Процессы поглощения теплового излучения СЧ будем рассчитывать с использованием модовой теории [11–14].

Разработка математической модели для расчета мощности и коэффициента излучения СЧ, находящейся внутри замкнутой полости

Предположим, что мы поместили в замкнутую полость (из полости выкачен воздух; температура непрозрачных стенок полости равна T_{cc} ; размеры полости много больше λ_{\max}) одну сферическую частицу, диаметр которой соизмерим с λ_{\max} (пусть для определенности это будет графитовый шарик) и рассчитаем (с учетом дифракционных эффектов) тепловые потоки, излучаемые и поглощаемые этой СЧ. Поле излучения внутри полости будет однородным и количество энергии, поступающей (пересекающей) на любую единичную площадку внутри полости (в единичном интервале частот, заключенное в единичном телесном угле, ось которого перпендикулярна плоскости площадки), дается функцией Планка.

Приведем основные соотношения, применяемые в дальнейших расчетах, в которых используются следующие обозначения (размерность в СИ):

h , k , σ , c – соответственно, постоянные Планка, Больцмана, Стефана-Больцмана и скорость света; λ , ν – соответственно, длина волны и частота излучения; D – диаметр шарика; S_{csa} – площадь поперечного сечения шарика, $S_{csa} = \pi D^2/4$; Ω – телесный угол в котором излучает (поглощает) полусфера поверхности шарика, ε_i – коэффициент поглощения материала из которого сделан шарик.

Для расчета теплового потока, поглощаемого СЧ, используем результаты работ [11–14], в которых применялся формализм модовой⁴ теории излучений. Такой подход позволял естественным образом учитывать дифракционные эффекты. Мы исходили из

представления о том, что тепловое излучение, распространяющееся в свободном пространстве в телесном угле Ω в виде полихроматического пучка сечением S в его основании, можно представить набором монохроматических лучей (пространственных спектральных мод), число которых $M(\lambda_m)$ для любой длины волны λ_m этого пучка равно [30]:

$$M(\lambda_m, D) = (\Omega \cdot S) / \lambda_m^2. \quad (3)$$

Пусть:

$Po(\nu, T_{cc})$ – энергия одной пространственной моды с частотой ν , излучаемой черным телом с температурой T_{cc} [29, 30]:

$$Po(\nu, T_{cc}) = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT_{cc}}\right) - 1} \quad (4)$$

$\Psi_{abc}(\nu, T_{cc}, D)$ – энергия, поглощаемая всей сферической поверхностью СЧ на частоте ν за время, равное $1/\omega$.

$\Psi_{abc}(\nu, T_{cc}, D)$ может быть рассчитана путем произведения числа мод $M(\nu, D)$, поглощаемых полусферой СЧ в телесном угле $\Omega = 2\pi$ (в виде пучка с площадью поперечного сечения S_{csa}), на энергию каждой моды $Po(\nu, T_{cc})$, причем это произведение необходимо умножить на 4. (Множитель 4 появляется при учете поглощения излучения двумя полусферами поверхности шарика и учете двух возможных поляризаций поглощаемых мод).

$$\Psi_{abc}(\nu, T_{cc}, D) = 4\varepsilon_i P_0(\nu, T_{cc}) \cdot M(\nu, D)$$

$$\text{где } M(\nu, D) = \frac{S_{csa} \Omega \nu^2}{c^2}. \quad (5)$$

Тогда,

$$\begin{aligned} P_{abc}(\nu, T_{cc}, D) &= \omega \cdot \Psi_{abc}(\nu, T_{cc}, D) = \\ &= 2\pi\nu \cdot \Psi_{abc}(\nu, T_{cc}, D) \end{aligned} \quad (6)$$

где $P_{abc}(\nu, T_{cc}, D)$ – мощность, поглощаемая частицей на частоте ν (т. е. продолжая аналогию с излучающей антенной – это мощность, подводимая к антенне от внешнего источника питания).

⁴ Под пространственной спектральной модой (типом колебаний) понимают ТЕМ волну с заданными частотой ν , волновым вектором K и поляризацией ρ_e , где ρ_e – единичный вектор поляризации; e – индекс, принимающий только два значения: $e = 1, 2$ [16, 17].

$\Psi_R(\nu, T_{cc}, D)$ – неизлучаемая в свободное пространство энергия (реактивная энергия) электрических и (или) магнитных колебательных полей на частоте ν , накопленная за время $1/\omega$ внутри Радианной сферы.

$P_R(\nu, T_{cc}, D)$ – неизлучаемая в свободное пространство мощность (реактивная мощность) электрических и (или) магнитных колебаний на частоте ν полей, циркулирующих внутри Радианной сферы.

$$\begin{aligned} P_R(\nu, T_{cc}, D) &= \omega \cdot \Psi_R(\nu, T_{cc}, D) = \\ &= 2\pi\nu \cdot \Psi_R(\nu, T_{cc}, D) \end{aligned} \quad (7)$$

$P_{rad}(\nu, T_{cc}, D)$ – мощность, излучаемая частицей в свободное пространство на частоте ν .

Тогда выражение для $Q(\nu, T_{cc}, D)$ – добротности субволновой частицы источника ТЕМ электромагнитных волн и колеблющихся электрических и (или) магнитных полей запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} Q(\nu, T_{cc}, D) &= \frac{\omega \cdot \Psi_R(\nu, T_{cc}, D)}{P_{rad}(\nu, T_{cc}, D)} = \\ &= \frac{1}{\left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^3 \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^3} + \frac{1}{\frac{2\pi\nu}{c} \cdot \frac{D}{2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Будем считать, что

$$\begin{aligned} P_{abc}(\nu, T_{cc}, D) &= P_R(\nu, T_{cc}, D) + \\ &+ P_{rad}(\nu, T_{cc}, D). \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда

$$P_{rad}(\nu, T_{cc}, D) = \frac{P_{abc}(\nu, T_{cc}, D)}{Q(\nu, T_{cc}, D) + 1} \quad (10)$$

$$P_R(\nu, T_{cc}, D) = Q(\nu, T_{cc}, D) \cdot P_{rad}(\nu, T_{cc}, D). \quad (11)$$

Отметим, что приведенные выше выражения справедливы для одночастотного режима как для ESA-радиоантенн, так и для СЧ.

Нагретые тела излучают в широком спектральном диапазоне. Поэтому для описания этих процессов проведем интегрирование энергий: энергии питания СЧ (поглощаемой

энергии), энергии, излучаемой в свободное пространство и неизлучаемой энергии. В результате получим следующие выражения для соответствующих мощностей излучения в спектральном диапазоне частот 10^{12} – 10^{15} Гц:

$$\Phi_{abc}(\nu, T_{cc}, D) = \int_{10^{12}}^{10^{15}} \Psi_{abc}(\nu, T_{cc}, D) d\nu \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Phi_R(\nu, T_{cc}, D) &= \\ &= \int_{10^{12}}^{10^{15}} \frac{1}{2\pi\nu} Q(\nu, T_{cc}, D) P_{rad}(\nu, T_{cc}, D) d\nu \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Phi_{rad}(\nu, T_{cc}, D) = \int_{10^{12}}^{10^{15}} \frac{1}{2\pi\nu} \frac{P_{abc}(\nu, T_{cc}, D)}{Q(\nu, T_{cc}, D) + 1} d\nu \quad (14)$$

Где $\Phi_{abc}(\nu, T_{cc}, D)$ – мощность теплового излучения, поглощаемая частицей (мощность питающая антенну) в спектральном диапазоне частот 10^{12} – 10^{15} Гц;

$\Phi_R(\nu, T_{cc}, D)$ – неизлучаемая в свободное пространство мощность (реактивная мощность) электрических и (или) магнитных колебаний полей в спектральном диапазоне частот 10^{12} – 10^{15} Гц, циркулирующих внутри Радианной сферы;

$\Phi_{rad}(\nu, T_{cc}, D)$ – мощность, излучаемая частицей в свободное пространство в спектральном диапазоне частот 10^{12} – 10^{15} Гц.

Результаты расчетов мощности, поглощаемой и излучаемой СЧ, находящейся внутри замкнутой полости

На рисунке 2 показаны зависимости $\Phi_{abc}(\nu, T_{cc}, D)$, $\Phi_R(\nu, T_{cc}, D)$, $\Phi_{rad}(\nu, T_{cc}, D)$ от D -диаметра графитового шарика, рассчитанные в рамках предложенной модели по формулам (12–14). Там же (для сравнения) показана $\Phi_{1rad}(\nu, T_{sp}, D)$ – зависимость мощности, излучаемой в свободное пространство в спектральном диапазоне частот 10^{12} – 10^{15} Гц таким же шариком, рассчитанная при тех же исходных данных, но по методике, описанной

в [11–14] и $\Phi_{abcP}(\nu, T_{cc}, D)$ – зависимость мощности, поглощаемой шариком от излучения оболочки окружающей его сферы, рассчитанная с использованием формулы Планка по следующему выражению:

$$\Phi_{abcP}(\nu, T_{cc}, D) = \varepsilon_i \pi D^2 \int_{10^{12}}^{10^{15}} \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT_{cc}}\right) - 1} d\nu \quad (15)$$

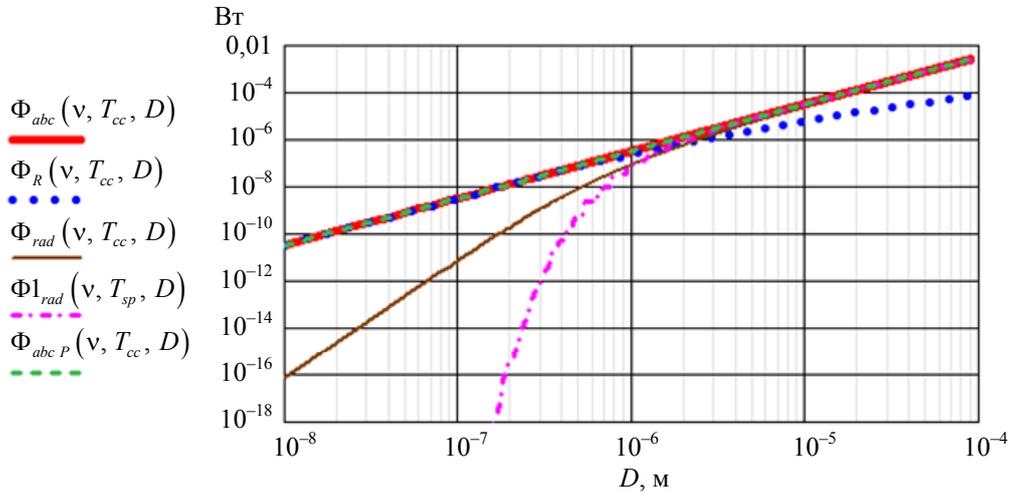


Рис. 2. Зависимости $\Phi_{abc}(\nu, T_{cc}, D)$, $\Phi_{abcP}(\nu, T_{cc}, D)$, $\Phi_R(\nu, T_{cc}, D)$, $\Phi_{rad}(\nu, T_{cc}, D)$ от D -диаметра графитового шарика рассчитаны при $T_{cc} = 1273$ К – температуре оболочки сферической полости, в центре которой находится шарик. Зависимость $\Phi_{1rad}(\nu, T_{sp}, D)$ рассчитана при температуре шарика $T_{sp} = 1273$ К

Отметим полное совпадение зависимостей $\Phi_{abc}(\nu, T_{cc}, D)$ и $\Phi_{abcP}(\nu, T_{cc}, D)$, рассчитанных соответственно по формулам (12) и (15).

Видно, что при $D > 3 \cdot 10^{-6}$ м практически вся тепловая мощность, поглощаемая шариком от излучения оболочки сферы (мощность нагрева), расходуется на его тепловое излучение в свободное пространство. Мощности, излучаемые в свободное пространство (рассчитанные по двум разным методикам), $\Phi_{rad}(\nu, T_{cc}, D)$ и $\Phi_{1rad}(\nu, T_{sp}, D)$ практически совпадают и превосходят неизлучаемую (реактивную) мощность $\Phi_R(\nu, T_{cc}, D)$. Однако, по мере уменьшения D обе методики показывают быстрое уменьшение мощностей, излучаемых в свободное пространство. Так (см. зависимость $\Phi_{rad}(\nu, T_{cc}, D)$) при $D = 10^{-8}$ м шарик излучает примерно лишь $1/10^6$ долю от поглощаемой им мощности. Остальная поглощаемая тепловая мощность идет в конечном итоге на повышение температуры шарика, т. к. возбуждаемые эванесцентные волны не излучаются в свободное пространство и их

мощность (энергия) $\Phi_R(\nu, T_{cc}, D)$ практически не расходуется. Еще более резкое уменьшение мощностей, излучаемых в свободное пространство, показывает зависимость $\Phi_{1rad}(\nu, T_{sp}, D)$.

На рисунках 3 и 4 приведены зависимости коэффициентов излучения графитового шарика (рис. 3) и золотого шарика (рис. 4) от их диаметров D , рассчитанные (для сравнения) с помощью трех разных методик. Зависимость $\varepsilon(\nu, T_{cc}, D)$ рассчитывалась с помощью методики, предложенной в настоящей работе по следующему выражению:

$$\varepsilon(\nu, T_{cc}, D) = \frac{\Phi_{rad}(\nu, T_{cc}, D)}{\sigma T_{sp}^4 S_{sp}(D)} \quad (16)$$

где T_{sp} и $S_{sp}(D)$ – температура и площадь поверхности шарика, соответственно. Причем при всех значениях D предполагалось, что $T_{cc} = T_{sp}$.

Зависимость $\varepsilon_1(\nu, T_{cc}, D)$ рассчитывалась по методике, описанной в [11–14]. Зави-

симось $\varepsilon_2(\nu, T_{sp}, D)$, обозначенная на рисунке 3 черными квадратами, взята из [5]. При расчете этой зависимости в [5] использовался приближенный метод, основанный на учете глубины проникновения излучения в среду. Зависимость, приведенная на рисунке 4, рассчитывалась с использования метода, основанного на учете глубины проникновения излучения в среду по формулам (13–19), приведенным в [14].

Видно, что все три графика показывают, что коэффициенты излучения графитового шарика при $D > 10^{-5}$ м не зависят от D и при-

близительно равны 0,7–0,74 (коэффициенту излучения массивного графитового тела при температурах 1100–1300 К). Однако, при уменьшении размеров шарика происходит уменьшение его излучательной способности. Например, при $D = 10^{-8}$ м коэффициент излучения шарика (рассчитанный по методике, предлагаемой в настоящей работе) составляет примерно одну миллионную часть от величины коэффициента, который имеет шарик при $D > 10^{-5}$ м. Еще более резкое уменьшение коэффициента излучения демонстрирует зависимость, рассчитанная по методике [11–14].

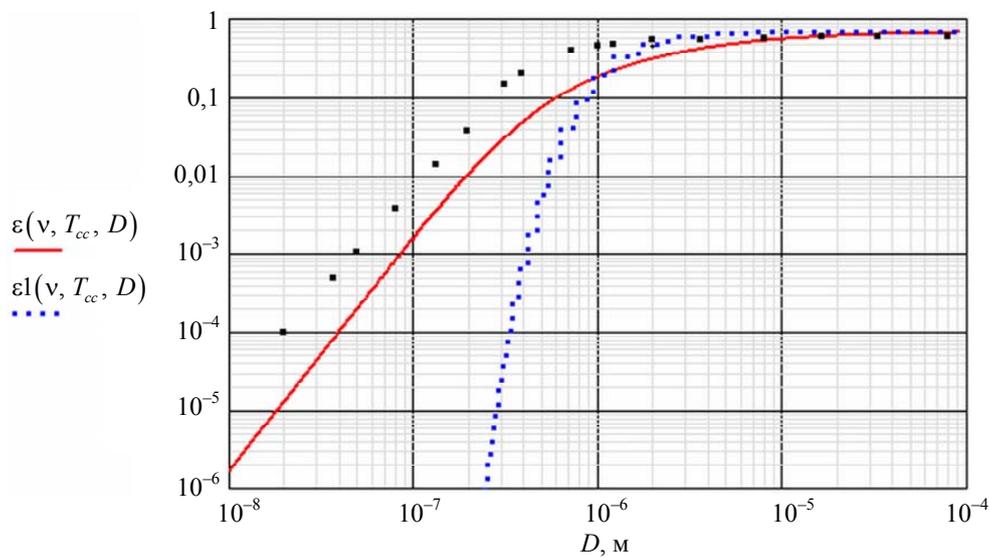


Рис. 3. Зависимости коэффициентов излучения графитового шарика от его диаметра D , рассчитанные с помощью трех разных методик. При расчетах предполагалось, что $T_{cc} = T_{sp} = 1273$ К

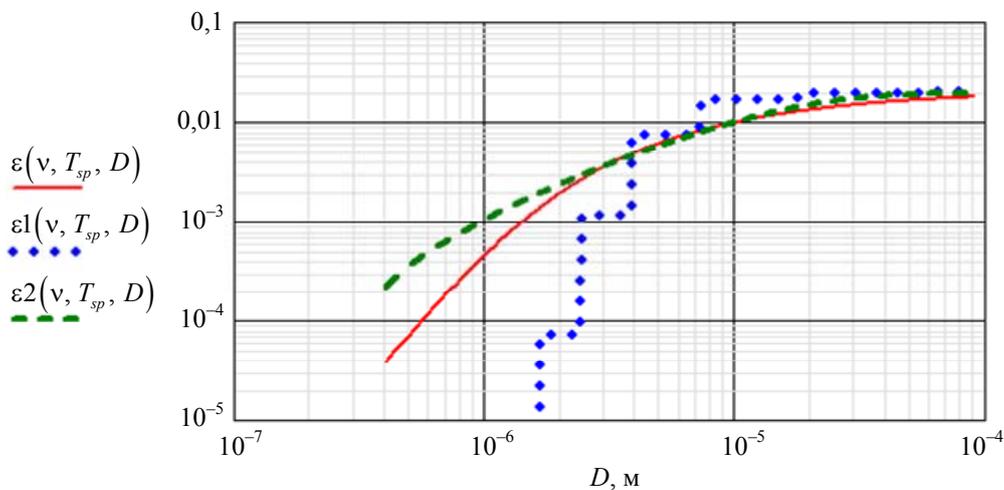


Рис. 4. Зависимости коэффициентов излучения золотого шарика от его диаметра D , рассчитанные с помощью трех разных методик. При расчетах предполагалось, что $T_{cc} = T_{sp} = 300$ К

Видно, что все три графика показывают, что коэффициенты излучения золотого шарика при $D > 5 \cdot 10^{-5}$ м не зависят от D и приблизительно равны 0,02 (коэффициенту излучения массивного золотого тела при температуре 300 K). Однако, с уменьшением D коэффициент излучения быстро уменьшается. Например, при $D = 4 \cdot 10^{-7}$ м коэффициент излучения шарика (рассчитанный по предлагаемой методике) составляет примерно одну двухтысячную часть от величины коэффициента, который имеет шарик при $D > 5 \cdot 10^{-5}$ м. Еще более резкое уменьшение коэффициента излучения демонстрирует зависимость, рассчитанная по методике [11–14].

На рисунке 5 показаны (для графитового шарика) температурные зависимости:

$\varepsilon(\nu, T_{cc}, D)$ – коэффициента излучения; $Z1(\nu, T_{cc}, D)$ – отношения мощности, излучаемой в свободное пространство, к мощности, поглощаемой шариком от излучения окружающей его сферы; $Z2(\nu, T_{cc}, D)$ – отношения неизлучаемой (реактивной) мощности к мощности, поглощаемой шариком от излучения окружающей его сферы. Расчет этих зависимостей проводился по следующим формулам:

$$Z1(\nu, T_{cc}, D) = \frac{\Phi_{rad}(\nu, T_{cc}, D)}{\Phi_{abc}(\nu, T_{cc}, D)} \quad (17)$$

$$Z2(\nu, T_{cc}, D) = \frac{\Phi_R(\nu, T_{cc}, D)}{\Phi_{abc}(\nu, T_{cc}, D)} \quad (18)$$

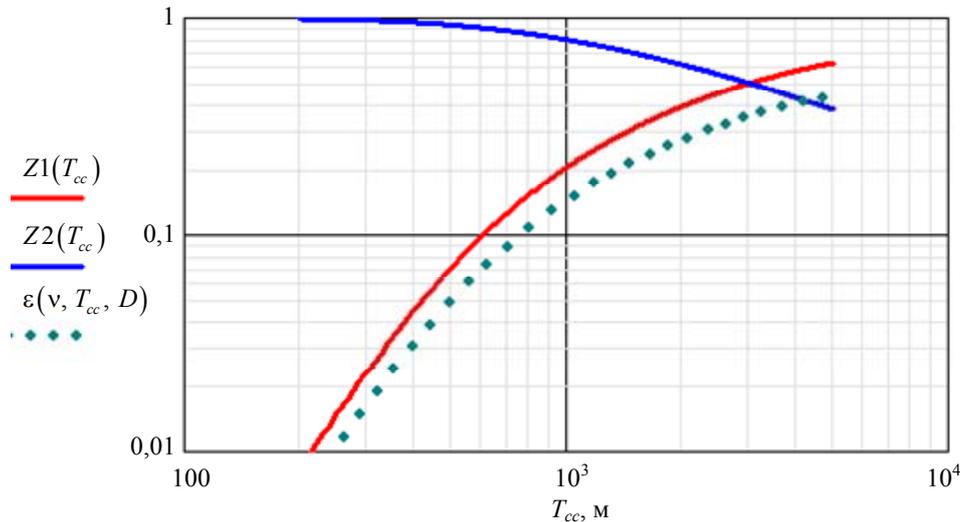


Рис. 5. Зависимости $Z1(\nu, T_{cc}, D)$, $Z2(\nu, T_{cc}, D)$, $\varepsilon(\nu, T_{cc}, D)$ от температуры T_{cc} , рассчитанные для графитового шарика при следующих исходных данных: $D = 10^{-6}$ м, $T_{sp} = T_{cc}$

Видно, что рост температуры (при неизменных размерах шарика) приводит к увеличению его излучательной способности, к увеличению доли излученной мощности по отношению к поглощенной и одновременному уменьшению относительной величины реактивной мощности.

Обсуждение результатов

Выше было отмечено, что для построения новой методики расчетов тепловых излучений СЧ мы предложили использовать

$Q(\nu, D)$ – зависимости добротности узкополосных ESA радиантенн от их размеров и длин (частот) излучаемых радиоволн (см. выражение (8)). Из выражения (8) следует, что в случаях, когда геометрические размеры антенны (излучателя) меньше $\lambda/2\pi$ в дальнюю зону (в свободное пространство) излучается не вся подводимая к излучателю мощность питания. Причем при дальнейшем уменьшении относительных размеров антенны отношение излученной мощности к мощности питания быстро уменьшается. Остальная тепловая мощность, поглощаемая шариком, идет (в конечном итоге) на повышение температу-

ры шарика, т. к. возбуждаемые эванесцентные волны не излучаются в свободное пространство и их мощность (энергия) $\Phi_R(v, T_{cc}, D)$ практически не расходуется. (В радиоантеннах реактивная мощность расходуется на нагревание резистивных элементов передатчика).

Также необходимо отметить, что утверждение о неизбежном повышении температуры шарика (при уменьшении его размеров) до некой температуры, превышающей температуру стенок полости T_{cc} , справедливо при любом методе расчета поглощаемой им мощности излучения от стенок замкнутой полости, в которой он находится. Это следует из выражений (8) и (9), которые показывают, что в момент времени, когда T_{sp} – температура шарика, помещенного в полость, становится равной температуре стенок полости T_{cc} , мощность, поглощаемая шариком, будет больше, чем мощность, излучаемая им в свободное пространство. В результате температура шарика становится выше температуры полости и тепловое излучение шарика увеличивается. (Ранее к подобному заключению мы пришли в работе [14]). Рост температуры прекращается, когда мощность этого теплового излучения будет компенсировать мощность (накачки), поглощаемую шариком, которая остается постоянной и практически не зависит от температуры шарика.

Расчеты излучаемой мощности и коэффициентов излучения шариков из графита и золота (проведенных по трем разным методикам) показывают во всех случаях быстрое абсолютное и относительное (по отношению к поглощаемой мощности) уменьшение излучаемой мощности и уменьшение излучательной способности при уменьшении размеров шариков. При этом следует отметить довольно большой разброс результатов при уменьшении размеров шариков меньше микрона.

Заключение

Нам представляется, что предложенная методика расчетов тепловых излучений СЧ, использующая зависимости добротности ESA-радиоантенн, от их относительных (по отношению к излучаемым длинам волн) размеров,

наиболее адекватно описывает зависимости мощности и коэффициента теплового излучения от размеров СЧ. Эта методика применима для расчета тепловых излучений не только металлических, но и диэлектрических частиц.

Отметим еще раз, что теория, описывающая фундаментальные пределы достижимых параметров электрически малых радиоантенн (и определение выражений, описывающих их добротность) разрабатывалась, совершенствовалась и проверялась на практике в течение почти восьмидесяти лет многими известными учеными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mie G.* / *Annalen der Physik.* 1908. Vol. 25. P. 377–445.
2. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. – М.: Мир, 1986.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
4. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. – М.: Наука, 1973.
5. *Мартыненко Ю. В., Огнев Л. И.* / *ЖТФ.* 2005. Т. 75. № 11. С. 130–132.
6. *Домбровский Л. А.* / *Теплофизика высоких температур.* 1999. Т. 37. № 2. С. 284–293.
7. *Joulain K., Ezzahri Y., Carminati R.* / *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer.* 2016. Vol. 173. P. 1–6. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1509.05927>
8. *Joulain K.* / HAL Id: hal-01860367. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01860367>.
9. *Трибельский М. И., Мирошниченко А. Е.* / *Успехи физических наук.* 2022. Т. 192. № 1. С. 45–68.
10. *Elzoukal M., Yang Ch., Albert A., Lubner S., Prasher R.* / *Cell Reports Physical Science.* 2020. Vol. 1. № 12.100259. P. 1–16
11. *Свиридов А. Н., Сагинов Л. Д.* / *Прикладная физика.* 2021. № 1. С. 57–62.
12. *Свиридов А. Н., Сагинов Л. Д.* / *Прикладная физика.* 2021. № 2. С. 12–21.
13. *Свиридов А. Н., Сагинов Л. Д.* / *Прикладная физика.* 2021. № 3. С. 17–25.
14. *Свиридов А. Н., Сагинов Л. Д.* / *Прикладная физика.* 2023. № 2. С. 44–55.
15. *Князев Б. А., Кузьмин А. В.* / *Вестник НГУ. Серия: Физика.* 2007. Т. 2. № 1. С. 108–122.
16. *Гальярди Р. М., Карп Ш.* Оптическая связь. – М.: Связь, 1978.
17. *Фридрихов С. А., Мовнин С. М.* Физические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1982.
18. *Свиридов А. Н., Сагинов Л. Д.* / *Успехи прикладной физики.* 2023. Т. 11. № 5. С. 384–398.
19. *Хлебцов Б. Н.* / *Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках.* 2016. № 2.

URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/opticheskie-svoystva-metallicheskih-nanochastits>.

20. *Дмитриев А. С.* / Введение в нанотеплофизику. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.

21. *Винтер Дж., Цытович В. Н.* / УФН. 1998. Т. 168. № 8. С. 899–907.

22. *Смирнов Б. М.* / УФН. 1997. Т. 167. № 11. С. 1169–1200.

23. *Гуренцов Е. В., Еремин А. В., Фальченко М. Г.* / Физико-химическая кинетика в газовой динамике. Электронный журнал. www.chemphys.edu.ru/pdf/2011-02-01-008.pdf

24. *Харинцев С. С.* Оптические антенны. – Казань: Казан. ун-т, 2015.

25. *Краснок А. Е., Максимов И. С., Денисюк А. И., Белов П. А., Мирошниченко А. Е., Симоновский К. П., Кившарь Ю. С.* / УФН. 2013. Т. 183. № 6. С. 561–589.

26. *Maslovski S. I., Simovski C. R., Tretyakov S. A.* / New J. of Phys. 2016. Vol. 18 (1). P. 013034. doi: 10.1088/1367-2630/18/1/013034.

27. *Tsakmakidis K. L., Boyd R. W., Yablonovitch E., Xiang Zhang* / Optics express. 2016. Vol. 24. № 16. P. 17916–17927.

28. *Eggleston M. S., Messer K., Zhang L., Yablonovitch E., Wu M. C.* / Proc. of the National Academy of Sciences. 2015. Vol. 112. № 6. P. 1704–1709. <https://doi.org/10.1073/pnas.1423294112>

29. *Biagioni P., Huang J.-S., Hecht B.* / Reports on Progress in Physics. 2012. Vol. 75. P. 024402. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/2/024402>

30. *Волокитин А. И., Перссон Б. Н. Дж.* / УФН. 2007. Т. 177. № 9. С. 921–951.

31. *Kumar N.* Electrical Engineering and Computer Sciences University of California at Berkeley Technical Report № UCSB/Eecs-2013-107. <http://www.eecs.berkeley.edu/pubs/techrpts/2013/eecs-2013-107.html>

32. *Nguyen K. L., Merchiers O., Chapuis P.-O.* / Appl. Phys. Lett. 2018. Vol. 112. P. 111906. <https://doi.org/10.1063/1.5010426>

33. *Стребков Д. С.* / Электрооборудование и электротехнологии в АПК. 2021. Т. 6. № 3(44). С. 15–19. doi: 10.22314/2658-4859-2021-68-2-15-19

34. *Wheeler H. A.* / Proc. of the IRE. 1947. Vol. 35. № 12. P. 1479–1488. doi: 10.1109/jrproc.1947.226199

35. *Davis W. A., Yang T. Y., Caswell E. D., Stutzman W.* / IET Microwaves Antennas & Propagation. 2011. Vol. 5. № 11. P. 1297–1302. doi: 10.1049/iet-map.2010.0604

36. *Chu L. J.* / Journal of Applied Physics. 1948. Vol. 19. P. 1163–1175.

37. *Harrington R. F.* / J. Res. Natl. Bur. Stand. 1960. Vol. 64-D. Jan/Feb. P. 1–12.

38. *Collin R. E., Rothschild S.* / IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1964. № 1. P. 23–27.

39. *Hansen R. C.* / Proceedings of the IEEE. 1981. Vol. 69. № 2. P. 170–182.

40. *McLean J. S.* / IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1996. Vol. 44. № 5. P. 672–676.

41. *Grimes D. M., Grimes C. A.* / Radio Science. 1999. Vol. 34. № 2. P. 281–296.

42. *Caswell E. D., Davis W. A., Stutzman W. L.* / IET Microwaves Antennas & Propagation. 2011. Vol. 5. № 11. P. 1297–1302. doi: 10.1049/iet-map.2010.0604

43. *Thiele G. A., Detweiler P. L., Penno R. P.* / IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2003. Vol. 51. № 6. P. 1263–1269.

44. *Shusar V. I.* / Electronics: Science, Technology, Business. 2006. № 7. P. 10–19. http://www.electronics.ru/pdf/7_2006/02.pdf.

45. *Hansen R. C.* Electrically Small Superdirective and Superconducting Antennas. – A John Wiley & Sons, Inc. Publication, 2006.

46. *Беличенко В. П., Запасной А. С.* / Известия высших учебных заведений. Серия: Физика. 2012. Т. 55. № 8/2. С. 62–63.

47. *Ицков В. В., Уваров Ант. В., Уваров Анд. В.* / Физические основы приборостроения. 2018. Т. 7. № 4 (30). С. 56–69. doi: 10.25210/jfop-1804-056069

48. *Климов К., Годин А. С., Гежа Д. С.* Электрические малые антенны (ESA). 2018. doi: 10.13140/rg.2.2.31888.71686

49. *Беличенко В. П.* / 9-я Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы радиофизики». Сборник трудов конференции. – Томск. 2021. С. 55–60.

50. *Maslovski S. I., Simovski C. R., Tretyakov S. A.* / New J. Phys. 2016. Vol. 18. № 1. P. 013034. doi: 10.1088/1367-2630/18/1/013034

51. *Hyungki Shim, Lingling Fan, Johnson S. G., Miller O. D.* / Physical review x. 2019. Vol. 9. P. 011043. doi: 10.1103/PhysRevX.9.011043

Method of calculation of thermal emissions of subwavelength particles

A. N. Sviridov and L. D. Saginov

FSAC VIM

5 1st Institutsky proezd, Moscow, 109428, Russia

E-mail: sviridto@yandex.ru

Received 2.04.2024; accepted 16.04.2024

A new method is proposed for calculating the thermal emissions of subwavelength particles using the dependence of the Q-factor of electrically small radio antennas (ESA) on their relative (relative to the wavelength of the emitted wave) sizes. This dependence characterizes the fundamental limit of the minimum relative sizes of ESA radio antennas. With the help of the proposed methodology, calculations of the dependences of the capacities and coefficients of thermal radiation of graphite and gold balls on their sizes were carried out. For comparison, similar dependencies obtained using other techniques are given. This method of calculating the thermal emissions of subwavelength particles adequately describes the dependence of the power and coefficient of thermal radiation on the particle size.

Keywords: Planck's law, Stefan-Boltzmann's law, Wien's displacement law, radiation coefficient, absorption coefficient, spatial spectral mode, mode energy, subwavelength particle, nanoantenna, electrically small antenna (ESA), Q-factor, near field, far field.

REFERENCES

1. Mie G., *Annalen der Physik* **25**, 377–445 (1908).
2. Boren K. and Hafman D., *Absorption and scattering of light by small particles*, Moscow, Mir, 1986.
3. Landau L. D. and Lifshits E. M., *Electrodynamics of continuous media*, Moscow, FIZMATLIT, 2003.
4. Born M. and Wolf E., *Fundamentals of optics*, Moscow, Nauka, 1973.
5. Martynenko Yu. V. and Ognev L. I., *Zhurnal Tekhnicheskoy fiziki* **75** (11), 130–132 (2005) [in Russian].
6. Dombrovsky L. A., *Thermophysics of high temperatures* **37** (2), 284–293 (1999) [in Russian].
7. Joulain K., Ezzahri Y. and Carminati R., *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* **173**, 1–6 (2016). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1509.059278>.
8. Joulain K., HAL Id: hal-01860367. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01860367>.
9. Tribelsky M. I. and Miroshnichenko A. E., *Uspekhi fizicheskikh nauk* **192** (1), 45–68 (2022) [in Russian].
10. Elzukul M., Jan Ch., Albert A., Lubner S. and Prasher R., *Cell Reports Physical Science* **1** (12), 100259 (2020).
11. Sviridov A. N. and Saginov L. D., *Applied Physics*, № 1, 57–62 (2021) [in Russian].
12. Sviridov A. N. and Saginov L. D., *Applied Physics*, № 2, 12–21 (2021) [in Russian].
13. Sviridov A. N. and Saginov L. D., *Applied Physics*, № 3, 17–25 (2021) [in Russian].
14. Sviridov A. N. and Saginov L. D., *Applied Physics*, № 2, 44–55 (2023) [in Russian].
15. Knyazev B. A. and Kuzmin A. V., *Bulletin of the NSU. Series: Physics* **2** (1), 108–122 (2007) [in Russian].
16. Gagliardi R. M. and Karp Sh., *Optical communication*, Moscow, Svyaz, 1978.
17. Friedrichov S. A. and Movnin S. M., *Physical foundations of electrical engineering*, Moscow, Higher School, 1982.
18. Sviridov A. N. and Saginov L. D., *Usp. Prikl. Fiz. (Advances in Applied Physics)* **11** (5), 384–398 (2023) [in Russian].
19. Khlebtsov B. N., *Matematicheskoe modelirovanie, komp'yuternyj i naturnyj eksperiment v estestvennyh naukah*. № 2 (2016). <https://cyberleninka.ru/article/n/opticheskie-svoystva-metallicheskikh-nanochastits>
20. Dmitriev A. S., *Introduction to nanoteplophysics*, Moscow, BINOM electronic edition. Laboratory of Knowledge, 2015.
21. Winter J. and Tsytoich V. N., *Uspekhi fizicheskikh nauk* **168** (8), 899–907 (1998) [in Russian].
22. Smirnov B. M., *Uspekhi fizicheskikh nauk* **167** (11), 1169–1200 (1997) [in Russian].

23. Gurentsov E. V., Eremin A. V. and Falchenko M. G., Fiziko-himicheskaya kinetika v gazovoj dinamike. Elektronnyj zhurnal. www.chemphys.edu.ru/pdf/2011-02-01-008.pdf [in Russian].
24. Kharintsev S. S., Opticheskie anteny, Kazan: Kazan. Univ., 2015.
25. Krasnok A. E., Maksimov I. S., Denisjuk A. I., Belov P. A., Miroshnichenko A. E., Simonovsky K. P. and Kivshar Y. S., Uspekhi fizicheskikh nauk **183** (6), 561–589 (2013) [in Russian].
26. Maslovsky S. I., Simovsky K. R. and Tretyakov S. A., New J. Phys. **18**, 013034 (2016). doi: 10.1088/1367-2630/18/1/013034.
27. Tsakmakidis K. L., Boyd R. W., Yablonovitch E. and Xiang Zhang, Optics express **24** (16), 17916–17927 (2016).
28. Eggleston M. S., Messer K., Zhangb L., Yablonovitch E. and Wu M. C., Proc. of the National Academy of Sciences. **112** (6), 1704–1709 (2015). <https://doi.org/10.1073/pnas.1423294112>
29. Biagioni P., Huang J.-S. and Hecht B., Reports on Progress in Physics **75**, 024402 (2012). <https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/2/024402>
30. Volokitin A. I. and Persson B. N. J., Uspekhi fizicheskikh nauk **177** (9), 921–951 (2007) [in Russian].
31. Kumar N., Electrical Engineering and Computer Science University of California at Berkeley Technical Report № UCB/EECS-2013-107 <http://www.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/2013/EECS-2013-107.html>
32. Nguyen K. L., Merchiers O. and Chapuis P.-O., Appl. Phys. Lett. **112**, 111906 (2018) <https://doi.org/10.1063/1.5010426>
33. Strebkov D. S., Elektrooborudovanie i elektrotehnologii v APK **6** (3(44)), 15–19 (2021). doi: 10.22314/2658-4859-2021-68-2-15-19 [in Russian].
34. Wheeler H. A., Proc. of the IRE **35** (12) 1479–1488 (1947). doi: 10.1109/jrproc.1947.226199
35. Davis W. A., Yang T. Y., Caswell E. D. and Stutzman W., IET Microwaves Antennas & Propagation **5** (11), 1297–1302. (2011). doi: 10.1049/iet-map.2010.0604
36. Chu L. J., Journal of Applied Physics **19**, 1163–1175 (1948).
37. Harrington R. F., J. Res. Natl. Bur. Stand. **64-D** (Jan/Feb), 1–12 (1960).
38. Collin R. E. and Rothschild S., IEEE Transactions on Antennas and Propagation, № 1, 23–27 (1964).
39. Hansen R. C., Proceedings of the IEEE **69** (2), 170–182 (1981).
40. McLean J. S., IEEE Transactions on Antennas and Propagation **44** (5), 672–676 (1996).
41. Grimes D. M. and Grimes C. A., Radio Science **34** (2), 281–296 (1999).
42. Caswell E. D., Davis W. A. and Stutzman W. L., IET Microwaves Antennas & Propagation **5** (11), 1297–1302 (2011). doi: 10.1049/iet-map.2010.0604
43. Thiele G. A., Detweiler P. L. and Penno R. P., IEEE Transactions on Antennas and Propagation **51** (6), 1263–1269 (2003).
44. Slusar V. I., Electronics: Science, Technology, Business, № 7, 10–19 (2006). http://www.electronics.ru/pdf/7_2006/02.pdf
45. Hansen R. C. Electrically Small Superdirective and Superconducting Antennas. A John Wiley & Sons, Inc. Publication, 2006.
46. Belichenko V. P. and Zapasnoj A. S., Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij, Fizika **55** (8/2), 62–63 (2012) [in Russian].
47. Itskov V. V., Uvarov Ant. V. and Uvarov And. V., Fizicheskie osnovy priborostroeniya **7** (4(30)), 56–69 (2018) [in Russian].
48. Klimov K. and Godin A. S., Electric small Antennas (ESA). (Review in Russian) 2018. doi: 10.13140/rg.2.2.31888.71686
49. Belichenko V. P., 9th International scientific and practical Conference «Actual problems of radiophysics» Proceedings of the conference Tomsk, 2021. pp. 55–60.
50. Maslovski S. I., Simovski C. R. and Tretyakov S. A., New J. Phys. **18** (1), 013034 (2016). doi: 10.1088/1367-2630/18/1/013034
51. Hyunki Shim, Lingling Fan, Johnson S. G. and Miller O. D., Physical review x **9**, (2019). doi: 10.1103/PhysRevX.9.011043